переконатися, що схема (2) при цьому матиме лише перший порядок апроксимації; а відповідні їй формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{3}[f(x_i) + 2f(x_i + \frac{h}{2})], \qquad (10)$$

де i=0,1,…,n-1, $y(x_0)$=y(a)=0, при тій самій кількості обчислень, що і у (6), приводять до значно гірших результатів. Зокрема, уже для f(x)=ax+b із (10) не випливає рівності

$$y(h) = \int_0^h (ax+b)dx .$$

Отже, при вказаній кількості обчислень виведена нами формула (6) є найбільш оптимальною формулою числового інтегрування функцій однієї змінної.

УДК 518.25

Федунець Л.П.
Академія народного господарства, м. Тернопіль

ВИКОРИСТАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

The systems of linear algebraical equations with symbolic elements are considered. The square algorithm for solving of the systems of linear algebraical equations by the matrix continued fractions is built in this work. The construction is based on the method of elimination of unknowns.

Розглядаються системи лінійних алгебраїчних рівнянь із символьними елементами. Будується кліткoвий алгоритм розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричними ланцюговими дробами. Побудова базується на основі методу виключення невідомих.

Розглядаються системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Ax=b \qquad (1)$$

із символьними елементами. Без обмеження загальності вважається, що $n = 2^s$, де s–ціле число (якщо це не так, то систему можна доповнити $\chi_{n+1} = 1, ..., \chi_{n+k} = 1$).

Відомо багато ефективних методів для обчислення невідомих числових систем (1). Кожен із них полягає у застосуванні певних рекурентних співвідношень, послідовне застосування котрих і дає значення невідомих. Але для аналітичного розв'язування систем (1) із символьними елементами подібний підхід практично непридатний.

Сьогодні існують і успішно розвиваються декілька напрямів і концепцій для виконання символьних перетворень. Із систем універсального характеру найбільшого поширення отримали REDUCE, muMATH, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab та DERIVE. Їх можна застосовувати для різних задач комп'ютерної алгебри, зокрема і для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проте цей розділ ще не так добре розвинений, як методи для числових систем.

У цій роботі йдеться про побудову кліткових алгоритмів розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричними ланцюговими дробами.

Розіб’ємо матрицю А на блоки, записавши (1) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Без обмеження загальності припустимо, що всі головні мінори системи (2) відмінні від нуля. Тоді для визначення невідомої X_2 на основі методу виключення можна записати таку систему:

$$\left(A_{2,2}-A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\right)X_2=B_2-A_{2,1}\;A_{1,1}^{-1}B_1 \tag{3}$$

Використаємо тотожність $P\,Q^{-1}=\left[\left(Q^{-1}\right)^T P^T\right]^T$, тоді для визначення $A_{2,1}\cdot A_{1,1}^{-1}$ можна записати:

$$A_{2,1}\cdot A_{1,1}^{-1}=\left[\left(A_{1,1}^{-1}\right)^T\cdot A_{2,1}^T\right]^T.$$

Або детальніше:

$$A_{2,1}\cdot A_{1,1}^{-1}=\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p-1,1} & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{p-1,2} & a_{p,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{p-1,p} & a_{p,p} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{p+1,1} & a_{p+2,1} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ a_{p+1,2} & a_{p+2,2} & \cdots & a_{n-1,2} & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1,p} & a_{p+2,p} & \cdots & a_{n-1,p} & a_{n,p} \end{pmatrix}\right]^T,$$

де p=n/2= 2^{s-1}.

Неважко помітити, що добуток

$$\left(A_{1,1}^{-1}\right)^T\left(a_{p+1,1} \quad a_{p+1,2} \quad \cdots \quad a_{p+1,p}\right)^T$$

є не що інше, як розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p-1,1} & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{p-1,2} & a_{p,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{p-1,p} & a_{p,p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{p+i,1} \\ z_{p+i,2} \\ \ldots \\ z_{p+i,p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{p+i,1} \\ a_{p+i,2} \\ \ldots \\ a_{p+i,p} \end{pmatrix} \qquad \left(i=\overline{1,p}\right)$$

Введемо тепер позначення:

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix} X_{p+1,1} & X_{p+2,1} & \cdots & X_{n,1} \\ X_{p+1,2} & X_{p+2,2} & \cdots & X_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{p+1,p} & X_{p+2,p} & \cdots & X_{n,p} \end{pmatrix},$$

тобто

$$X^{(1)}=\left(A_{1,1}^{-1}\right)^T A_{2,1}^T. \tag{4}$$

Тоді для визначення X_2 можемо записати таку систему:

$$\left(A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}\right)X_2 = B_2-\left[X^{(1)}\right]^T B_1\,, \tag{5}$$

звідки

$$X_2=\frac{B_2-\left[X^{(1)}\right]^T B_1\Big|}{\Big|A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}}=\frac{\left(A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}\right)A_{1,2}^{-1}B_1-A_{2,2}A_{1,2}^{-1}B_1+B_2\Big|}{\Big|A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}}=$$

$$=A_{1,2}^{-1}B_1+\frac{B_2-A_{2,2}A_{1,2}^{-1}B_1\Big|}{\Big|A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}} \tag{6}$$

$\dfrac{\cdot\;\big|}{\big|\;\cdot}$ – позначення, подібне до позначення Прінгсгейма для ланцюгових дробів. Воно означає множення на обернену матрицю зліва.

Якщо врахувати, що обернена матриця визначається як $Q^{-1}=\dfrac{1}{\det Q}Q^*$, де Q^* – приєднана матриця, то (6) матиме такий вигляд

$$X_2=\frac{1}{\det A_{1,2}}[A_{1,2}^*B_1+\frac{\det A_{1,2}B_2-A_{2,2}A_{1,2}^*B_1\Big|}{\Big|A_{2,2}-\left[X^{(1)}\right]^T A_{1,2}}] \tag{7}$$

Невідомі X_1 можна обчислити з матричного рівняння:

$$A_{1,1}X_1=B_1-A_{1,2}X_2\,,$$

звідки одержимо

$$X_1=A_{1,1}^{-1}\left(B_1-A_{1,2}X_2\right)=.\frac{A_{1,1}^*}{\det A_{1,1}}\left(B_1-A_{1,2}X_2\right) \tag{8}$$

Позначимо тепер $A\begin{Vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l \end{Vmatrix}$ блок матриці А, утворений на перетині рядків $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ та стовпців $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_l$ і розглянемо системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(k)} & A_{1,2}^{(k)} \\ A_{2,1}^{(k)} & A_{2,2}^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{1,3}^{(k)} \\ A_{2,3}^{(k)} \end{pmatrix},\text{(k=1,2,…,s-1)}, \tag{9}$$

де

$$A_{1,1}^{(k)}=A\begin{Vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{s-k-1} \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{s-k-1} \end{Vmatrix},\ A_{1,2}^{(k)}=A\begin{Vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{s-k-1} \\ 2^{s-k-1}+1 & 2^{s-k-1}+2 & \cdots & 2^{s-k} \end{Vmatrix},$$

$$A_{2,1}^{(k)}=A\begin{Vmatrix} 2^{s-k-1}+1 & 2^{s-k-1}+2 & \cdots & 2^{s-k} \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{s-k-1} \end{Vmatrix},\ A_{2,2}^{(k)}=A\begin{Vmatrix} 2^{s-k-1}+1 & 2^{s-k-1}+1 & \cdots & 2^{s-k} \\ 2^{s-k-1}+1 & 2^{s-k-1}+1 & \cdots & 2^{s-k} \end{Vmatrix},$$

$\left(A_{1,3}^{(k)}\quad A_{2,3}^{(k)}\right)^T$ – стовпець матриці $A\begin{Vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{s-k} \\ 2^{s-k}+1 & 2^{s-k}+2 & \cdots & 2^{s-k+1} \end{Vmatrix}$,(к=2,4,6,…) (10)

Для к=1,3,5,… беруться такі самі клітки, але транспонованої матриці A^T.

Матриця $X^{(1)}$ з (7) у свою чергу є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p-1,1} & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{p-1,2} & a_{p,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{p-1,p} & a_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{p+i,1} \\ z_{p+i,2} \\ \dots \\ z_{p+i,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p+i,1} \\ a_{p+i,2} \\ \dots \\ a_{p+i,p} \end{pmatrix}, \qquad \left(i = \overline{1, p}\right)$$

або

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(1)} & A_{1,2}^{(1)} \\ A_{2,1}^{(1)} & A_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,3}^{(1)} \\ A_{2,3}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Тому за аналогією з (5) можна записати:

$$X_2^{(1)} = \frac{A_{2,3}^{(1)} - A_{2,1}^{(1)} \left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1} A_{1,3}^{(1)} \Big|}{\Big| A_{2,2}^{(1)} - A_{2,1}^{(1)} \left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1} A_{1,2}^{(1)}}.$$

Для матриць $A_{2,1}^{(1)} \cdot \left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1}$ запишемо: $A_{2,1}^{(1)} \left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1} = \left\{ \left[\left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1} \right]^T \left(A_{2,1}^{(1)}\right)^T \right\}^T$.

Тоді, позначивши $X^{(2)}$ матрицю, яка задовольняє співвідношення:

$$A_{1,1}^{(1)T} X^{(2)} = A_{2,1}^{(1)T}, \tag{12}$$

тобто

$$X^{(2)} = \left(A_{1,1}^{(1)T} \right)^{-1} A_{2,1}^{(1)T},$$

і є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{l-1,1} & a_{l,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{l-1,2} & a_{l,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,l} & a_{2,l} & \cdots & a_{l-1,l} & a_{l,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{l+i,1} \\ z_{l+i,2} \\ \dots \\ z_{l+i,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{l+i,1} \\ a_{l+i,2} \\ \dots \\ a_{l+i,l} \end{pmatrix}, \qquad \left(i = \overline{1, l}\right)$$

для $X_2^{(1)}$ і $X_1^{(1)}$ отримаємо:

$$X_2^{(1)} = \frac{A_{2,3}^{(1)} - \left[X^{(2)}\right]^T A_{1,3}^{(1)} \Big|}{\Big| A_{2,2}^{(1)} - \left[X^{(2)}\right]^T A_{1,2}^{(1)}} = \left(A_{1,2}^{(1)}\right)^{-1} A_{1,3}^{(1)} + \frac{A_{2,3}^{(1)} - A_{2,2}^{(1)} \left(A_{1,2}^{(1)}\right)^{-1} A_{1,3}^{(1)} \,|}{\Big| A_{2,2}^{(1)} - \left[X^{(2)}\right]^T A_{1,2}^{(1)}} =$$

$$= \frac{1}{\det A_{1,2}^{(1)*}} \left[A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} + \frac{\det A_{1,2}^{(1)} A_{2,3}^{(1)} - A_{2,2}^{(1)} A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} \,|}{\Big| A_{2,2}^{(1)} - \left[X^{(2)}\right]^T A_{1,2}^{(1)}} \right], \tag{13}$$

$$X_1^{(1)} = \left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{-1}\left[A_{1,3}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)} X_2^{(1)}\right] = \frac{A_{1,1}^{(1)*}}{\det A_{1,1}^{(1)}}\left[A_{1,3}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)} X_2^{(1)}\right] \tag{14}$$

Підставивши (13), (14) у (7), матимемо:

$$X_2 = \frac{1}{\det A_{1,2}}\left[A_{1,2}^{*} B_1 + \frac{\det A_{1,2} B_2 - A_{2,2} A_{1,2}^{*} B_1 \Big|}{\left| A_{2,2} - \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\det A_{1,1}^{(1)}}\left(A_{1,1}^{(1)}\right)^{*}\left[A_{1,3}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)} X_2^{(1)}\right] \\ \dfrac{1}{\det A_{1,2}^{(1)}}\left[\left(A_{1,2}^{(1)}\right)^{*} A_{1,3}^{(1)} + \dfrac{A_{2,3}^{(1)} - A_{2,2}^{(1)}\left(A_{1,2}^{(1)}\right)^{*} A_{1,3}^{(1)}}{\left| A_{2,2}^{(1)} - \left[X^{(2)}\right]^{T} A_{1,2}^{(1)}\right.}\right] \end{Vmatrix}^{T} A_{1,2}\right.}\right]. \tag{15}$$

Продовживши далі цей процес, на к-му кроці для невідомих $X_2^{(1)}$ і $X_1^{(1)}$ одержимо:

$$X_2^{(k)} = \frac{1}{\det A_{1,2}^{(k)}}\left(A_{1,2}^{(k)}\right)^{*} A_{1,3}^{(k)} + \frac{\det A_{1,2}^{(k)} A_{2,3}^{(k)} - A_{2,2}^{(k)}\left(A_{1,2}^{(k)}\right)^{*} A_{1,3}^{(k)} \;|}{\left| A_{2,2}^{(k)} - \left[X^{(k)}\right]^{T} A_{1,2}^{(k)}\right.}, \tag{16}$$

$$X_1^{(k)} = \frac{1}{\det A_{1,1}^{(k)}}\left(A_{1,1}^{(k)}\right)^{*}\left[A_{1,3}^{(k)} - A_{1,2}^{(k} X_2^{(k)}\right], \tag{17}$$

де

$$X^{(k+1)} = \left[\left(A_{1,1}^{(k)}\right)^{-1}\right]^{T} A_{2,1}^{(k)^{T}}.$$

На останньому кроці отримаємо: $A_{1,1}^{(s-2)^{T}} X^{(s-1)} = A_{2,1}^{(s-2)}$,

тобто

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(s-1)} & A_{1,2}^{(s-1)} \\ A_{2,1}^{(s-1)} & A_{2,2}^{(s-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^{(s-1)} \\ X_2^{(s-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,3}^{(s-1)} \\ A_{2,3}^{(s-1)} \end{pmatrix}.$$

Фактично, в нас буде дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^{(s-1)} \\ X_2^{(s-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{3,1} \\ a_{4,1} \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^{(s-1)} \\ X_2^{(s-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{3,2} \\ a_{4,2} \end{pmatrix}.$$

Після запису розв’язків $X_2^{(s-1)}$ та $X_1^{(s-1)}$ для кожної з цих систем вираз для невідомих X_1 та X_2 матиме вигляд:

$$\det A_{1,2} X_2 = A_{1,2}^* B_1 + \frac{\det A_{1,2} B_2 - A_{2,2} A_{1,2}^* B_1 \big|}{\left| A_{2,2} - \left[\begin{matrix} \frac{A_{1,1}^{(1)*}}{\det A_{1,1}^{(1)}} \left(A_{1,3}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)} X_2^{(1)} \right) \\ \frac{1}{\det A_{1,2}^{(1)}} \left(A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} + \frac{\det A_{1,2}^{(1)} A_{2,3}^{(1)} - A_{2,2}^{(1)} A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} \big|}{\left| A_{2,2}^{(1)} - \ldots - A_{2,1}^{s-1} A_{1,1}^{(s-1)*} A_{1,2}^{(s-1)} \right.} \right) \end{matrix} \right]^T A_{1,2} \right.} . \quad (18)$$

$$X_1 = \frac{A_{1,1}^*}{\det A_{1,1}} \left(B_1 - A_{1,2} X_2 \right). \quad (19)$$

Розглянутий алгоритм придатний як для числових систем, так і для систем із символьними елементами. Для запису розв'язку потрібно О ($n^2 \log_2 n$).

1. Боднарчук П.І., Скоробагатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. К., 1974. 2. Недашковський М.О. Прямий метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1980. № 8. С. 24-28. 3. Недашковський М.О., Федунець Л.П. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричними ланцюговими дробами // Матеріали VIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М.Кравчукаюю. К., 2000.

УДК 512.83

Худий М.І., Максимів Є.М., Томецький М.І.
НУ "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

РОЗВ′ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НАД ПОЛЕМ ДОВІЛЬНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Led a decision existence criterion of matrix polynomial one-sided equation and indicated an untiing algorithm of this equation over field of arbitrary description.

Доведено критерій існування розв'язку матричного поліноміального одно-стороннього рівняння і вказано алгоритм розв'язання цього рівняння над полем довільної характеристики.

Розглядається матричне поліноміальне рівняння

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_{m-1} X + A_m = 0 \quad (1)$$

або

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \ldots + Y A_{m-1} + A_m = 0, \quad (2)$$

де $A_j \quad \left(j = \overline{0, m} \right)$ – квадратні матриці n-го порядку, елементи яких належать деякому полю P нульової характеристики, X і Y – квадратні невідомі матриці n-го порядку, $\left| A_0 \right| \neq 0$.