$$\det A_{1,2} X_2 = A_{1,2}^{*} B_1 + \frac{\det A_{1,2} B_2 - A_{2,2} A_{1,2}^{*} B_1 \big|}{\left| A_{2,2} - \begin{bmatrix} \dfrac{A_{1,1}^{(1)*}}{\det A_{1,1}^{(1)}} \left(A_{1,3}^{(1)} - A_{1,2}^{(1)} X_2^{(1)} \right) \\ \dfrac{1}{\det A_{1,2}^{(1)}} \left(A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} + \dfrac{\det A_{1,2}^{(1)} A_{2,3}^{(1)} - A_{2,2}^{(1)} A_{1,2}^{(1)*} A_{1,3}^{(1)} \big|}{\left| A_{2,2}^{(1)} - \ldots - A_{2,1}^{s-1} A_{1,1}^{(s-1)*} A_{1,2}^{(s-1)} \right.} \right) \end{bmatrix}^{T} A_{1,2} \right.} . \quad (18)$$

$$X_1 = \frac{A_{1,1}^{*}}{\det A_{1,1}} \left(B_1 - A_{1,2} X_2 \right). \quad (19)$$

Розглянутий алгоритм придатний як для числових систем, так і для систем із символьними елементами. Для запису розв'язку потрібно O ($n^2 \log_2 n$).

1. Боднарчук П.І., Скоробагатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. К., 1974. 2. Недашковський М.О. Прямий метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1980. № 8. С. 24-28. 3. Недашковський М.О., Федунець Л.П. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричними ланцюговими дробами // Матеріали VIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М.Кравчукаюю. К., 2000.

УДК 512.83

Худий М.І., Максимів Є.М., Томецький М.І.
НУ "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

РОЗВ′ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НАД ПОЛЕМ ДОВІЛЬНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Led a decision existence criterion of matrix polynomial one-sided equation and indicated an untiing algorithm of this equation over field of arbitrary description.

Доведено критерій існування розв'язку матричного поліноміального одностороннього рівняння і вказано алгоритм розв'язання цього рівняння над полем довільної характеристики.

Розглядається матричне поліноміальне рівняння

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \ldots + A_{m-1} X + A_m = 0 \quad (1)$$

або

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \ldots + Y A_{m-1} + A_m = 0, \quad (2)$$

де A_j $\left(j = \overline{0, m} \right)$ – квадратні матриці n-го порядку, елементи яких належать деякому полю P нульової характеристики, X і Y – квадратні невідомі матриці n-го порядку, $\left| A_0 \right| \neq 0$.

Існування розв'язку рівнянь (1) і (2) безпосередньо зв'язане з виділенням лінійного множника (правого чи лівого відповідно) із матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + ... + A_{m-1} x + A_m , \tag{3}$$

де A_j $\left(j = \overline{0, m}\right)$ – ті самі, що і вище, x – невідомий скаляр, тобто представлення (3) у вигляді

$$A(x) = B(x)\left(B_0 x + B_1\right) \tag{4}$$

або

$$A(x) = \left(C_0 x + C_1\right)C(x) , \tag{5}$$

де $\left|B_0\right| \neq 0$, $\left|C_0\right| \neq 0$.

Згідно з узагальненою теоремою Безу легко показати, що $-B_0^{-1}B_1$ є розв'язком рівняння (1), тобто $X = -B_0^{-1}B_1$, а $-C_1C_0^{-1}$ – розв′язком рівняння (2), тобто $Y = -C_1C_0^{-1}$.

Отже, питання існування розв′язків рівнянь (1) і (2) зводиться до існування розкладу (3) у вигляді (4) і (5).

У роботах П.С.Казімірського та його учнів, зокрема і авторів цієї роботи, вже розглядалися питання розкладності многочлена (3) і дано алгоритми знаходження розкладів (4) і (5). Але все це зроблено над полем нульової характеристики.

У цій роботі доведено існування розкладів (4) і (5) над полями довільної, не лише нульової характеристики.

З nm коренів рівняння $\det A(x) = 0$ виділимо n коренів

$$\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, ..., \alpha_i^{(k_i)} , \tag{6}$$

де $k_1, k_2, ..., k_i$ – кратності виділених коренів і $k_1 + k_2 + ... + k_i = n$, i – число різних коренів у виділеній множині.

Введемо до розгляду приєднану матрицю $A_*(x)$ до матриці $A(x)$, тобто таку, що

$$A_*(x)A(x) = A(x)A_*(x) = E\det A(x),$$

де E – одинична матриця n-го порядку.

$$\begin{aligned} &A_*(x) = Q_1(x)E\left(x - \alpha_j\right)^{h_j} + R_1^{(\alpha_j)}, \\ &R_1^{(\alpha_j)} = Q_2(x)E\left(x - \alpha_j\right)^{k_j - 1} + R_2^{(\alpha_j)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &R_{k_j-1}^{(\alpha_j)} = Q_{k_j} E\left(x - \alpha_j\right) + R_{k_j}^{(\alpha_j)} \end{aligned} \tag{7}$$

для $j = 1,2,...,i,$ де

$$R_p^{(\alpha_j)}(x) = R_{p0}^{(\alpha_j)} x^{k_j - 1} + R_{p1}^{(k_j)} x^{k_j - 2} + ... + R_{p,k_j-1}^{(\alpha_j)},$$

$p = 1,2,..., k_j$.

Матрицею, яка відповідає множині виділених коренів (6), назвемо матрицю виду:

$$\begin{aligned} &M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)},...,\alpha_i^{(k_i)}] = \\ &= \left\| R_{10}^{(\alpha_1)}, R_{20}^{(\alpha_1)}, ..., R_{k_1 0}^{(\alpha_1)}, R_{10}^{(\alpha_2)}, R_{20}^{(\alpha_2)}, ..., R_{k_2 0}^{(\alpha_3)}, ..., R_{10}^{(\alpha_i)}, R_{20}^{(\alpha_i)}, ..., R_{k_i 0}^{(\alpha_i)} \right\|. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут справджуються такі леми.

Лема 1. Ранг матриці (8) менший від n тоді і лише тоді, коли існує така оборотна над P матриця S, що в $SA_*(x)$ є рядок, всі елементи якого діляться на

$$b(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_i)^{k_i}.$$

Доведення. Якщо існує така оборотна над P матриця S, що

$$SA_*(x)=\left\|\begin{matrix} b(x)l_1(x)\ b(x)l_2(x)\ \dots\ b(x)l_n(x) \\ * \end{matrix}\right\|,\quad l_i(x)\in P[x],\quad i=\overline{1,n},$$

то, застосовуючи ділення (7) для матриці $SA_*(x)$, отримаємо

$$\left\|\begin{matrix} b(x)l_1(x)\ b(x)l_2(x)\ \dots\ b(x)l_n(x) \\ * \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} q_{11}(x)\ q_{12}(x)\ \dots\ q_{1n}(x) \\ * \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} (x-\alpha_j)^{k_j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (x-\alpha_j)^{k_j} \end{matrix}\right\|+$$

$$+\left\|\begin{matrix} r_{11}(x)\ r_{12}(x)\ \dots\ r_{1n}(x) \\ * \end{matrix}\right\|.$$

Звідси видно, що всі $r_{1i}(x)=0,\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, отже, ранг матриці (8) менший від n.

Якщо ранг матриці (8) менший від n, то це значить, що існує така оборотна над P матриця T_1, що в

$$T_1\left\|R_{10}^{(\alpha_1)},R_{20}^{(\alpha_1)},\dots,R_{k_10}^{(\alpha_1)},R_{10}^{(\alpha_2)},R_{20}^{(\alpha_2)},\dots,R_{k_20}^{(\alpha_3)},\dots,R_{10}^{(\alpha_i)},R_{20}^{(\alpha_i)},\dots,R_{k_i0}^{(\alpha_i)}\right\|$$

є повністю нульовий стовпець. Без обмеження загальності можемо вважати, що це буде перший стовпець. Помноживши рівності (7) зліва на T_1, отримаємо

$$\begin{aligned} &T_1A_*(x)=T_1Q_1(x)E(x-\alpha_j)^{h_j}+T_1R_1^{(\alpha_j)},\\ &T_1R_1^{(\alpha_j)}=T_1Q_2(x)E(x-\alpha_j)^{k_j-1}+T_1R_2^{(\alpha_j)},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &T_1R_{k_j-1}^{(\alpha_j)}=T_1Q_{k_j}E(x-\alpha_j)+T_1R_{k_j}^{(\alpha_j)} \end{aligned}\tag{7'}$$

Всі остачі в (7′) мають такий вигляд:

$$T_1R_1^{(\alpha_j)}(x)=\left\|\begin{matrix} 0\ 0\ \dots\ 0 \\ * \end{matrix}\right\|x^{k_j-1}+\dots$$

$$T_1R_2^{(\alpha_j)}(x)=\left\|\begin{matrix} 0\ 0\ \dots\ 0 \\ * \end{matrix}\right\|x^{k_j-2}+\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_1R_j^{(\alpha_j)}(x)=\left\|\begin{matrix} 0\ 0\ \dots\ 0 \\ * \end{matrix}\right\|.$$

Звідси видно, що $T_1R_1^{(\alpha_j)}(x)$ має такий вигляд:

$$T_1R_1^{(\alpha_j)}(x)=\left\|\begin{matrix} 0\ 0\ \dots\ 0 \\ * \end{matrix}\right\|.$$

Тоді перше співвідношення з (7′) набирає вигляду:

$$\left\| \begin{matrix} d_1(x) \ d_2(x) \ \ldots \ d_n(x) \\ * \end{matrix} \right\| = T_1 Q_1(x) \cdot \left\| \begin{matrix} (x-\alpha_j)^{k_j} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & (x-\alpha_j)^{k_j} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \ 0 \ \ldots \ 0 \\ * \end{matrix} \right\|.$$

Отже, в $T_1 A_*(x)$ є стовпчик, всі елементи якого діляться на $(x-\alpha_j)^{k_j}$. Міркуючи так само для всіх коренів виділеної множини, дійдемо висновку, що в $T_1 A_*(x)$ є стовпчик, всі елементи якого діляться на $b(x)$. Цим лема доведена повністю.

Лема 2. Ранг матриці (8) менший від n тоді і лише тоді, коли існує така оборотна над P матриця S, що в $SA_*(x)$ є стовпець, всі елементи якого діляться на $b(x)$.

Доведення очевидне.

На підставі вищевикладених міркувань приходимо до наступної теореми.

Теорема. Щоб існував розклад (4), де перетин множин виділених коренів (6) і решти коренів рівняння $\det A(x) = 0$ має ранг $n-1$, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці (8) дорівнював n.

Цією теоремою встановлено критерій існування кореня рівняння (1) з наперед заданими його власними значеннями. Використовуючи один з розроблених авторами алгоритмів, наприклад[*], ми можемо знайти цей розв'язок.

УДК 518.12

Цегелик Г.Г.*, Федчишин Н.В.
*Львівський національний університет ім. І. Франка
Технологічний університет Поділля

ПРО ОБЧИСЛЮВАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The interpolating method of majorizing type of solving the Cauchy problem for ordinary differential equations has been considered. The convergence and stability of this method has been invertigated.

Розглядається інтерполяційний метод мажорантного типу для розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Встановлюється збіжність і обчислювальна стійкість цього методу.

[*] *Максимів Є.М., Томецький М.І., Худий М.І. Розв′язування деяких матричних рівнянь // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1988. № 346. С.87–92.*