$$\left\| \begin{matrix} d_1(x)\ d_2(x)\ \dots\ d_n(x) \\ * \end{matrix} \right\| = T_1 Q_1(x) \cdot \left\| \begin{matrix} (x-\alpha_j)^{k_j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (x-\alpha_j)^{k_j} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0\ 0\ \dots\ 0 \\ * \end{matrix} \right\|.$$

Отже, в $T_1 A_*(x)$ є стовпчик, всі елементи якого діляться на $(x-\alpha_j)^{k_j}$. Міркуючи так само для всіх коренів виділеної множини, дійдемо висновку, що в $T_1 A_*(x)$ є стовпчик, всі елементи якого діляться на $b(x)$. Цим лема доведена повністю.

Лема 2. Ранг матриці (8) менший від n тоді і лише тоді, коли існує така оборотна над P матриця S, що в $SA_*(x)$ є стовпець, всі елементи якого діляться на $b(x)$.

Доведення очевидне.

На підставі вищевикладених міркувань приходимо до наступної теореми.

Теорема. Щоб існував розклад (4), де перетин множин виділених коренів (6) і решти коренів рівняння $\det A(x) = 0$ має ранг $n-1$, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці (8) дорівнював n.

Цією теоремою встановлено критерій існування кореня рівняння (1) з наперед заданими його власними значеннями. Використовуючи один з розроблених авторами алгоритмів, наприклад[*], ми можемо знайти цей розв'язок.

УДК 518.12

Цегелик Г.Г.*, Федчишин Н.В.
*Львівський національний університет ім. І. Франка
Технологічний університет Поділля

ПРО ОБЧИСЛЮВАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The interpolating method of majorizing type of solving the Cauchy problem for ordinary differential equations has been considered. The convergence and stability of this method has been invertigated.

Розглядається інтерполяційний метод мажорантного типу для розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Встановлюється збіжність і обчислювальна стійкість цього методу.

[*] *Максимів Є.М., Томецький М.І., Худий М.І. Розв'язування деяких матричних рівнянь // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1988. № 346. С.87–92.*

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі треба знайти на проміжку $[x_0, x_0 + a]$, де $a > 0$. При цьому вважатимемо, що в області G, яка містить прямокутник $R = \left\{ x_0 \le x \le x_0 + a, \ \left| y - y_0 \right| \le b \right\}$, функція $f(x, y)$ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою L. В [1], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично або аналітично [2, 3], побудовано два числових методи розв'язування задачі (1), (2): метод, який використовує заміну підінтегральної функції мажорантою Ньютона всередині проміжка інтегрування (інтерполяційний метод), і метод, який використовує заміну підінтегральної функції мажорантою Ньютона ззовні проміжку інтегрування (екстраполяційний метод). У цій роботі розглядається питання обчислювальної стійкості інтерполяційного методу.

Якщо на проміжку $[x_0, x_0 + a]$ вибрати систему точок $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, де $h > 0$, $x_n \le x_0 + a$, то для знаходження наближених значень $y_1, y_2, \ldots, y_n$ розв'язку $y = y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в інтерполяційному методі використовують формулу [1]

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i) \right)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (3)$$

де $y_0 = y(x_0)$. Ознакою збіжності цього методу є така теорема.

Теорема. Якщо в області G, яка містить прямокутник

$$R = \left\{ x_0 \le x \le x_0 + a, \ \left| y - y_0 \right| \le b \right\},$$

функція $f(x, y)$ неперервна, задовольняє умову Ліпшиця по y з сталою L і

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right| \le N < \infty,$$

де N – деяка стала, то наближені значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при $h \to 0$ рівномірно відносно x збігаються до точного розв'язку $y = y(x)$ задачі (1), (2).

Розглянемо питання обчислювальної стійкості цього методу.

Нехай $\tilde{y}_0$ – наближене значення точного початкового значення y_0, а ε_0' – абсолютна похибка початкового наближення, тобто

$$\varepsilon_0' = \left| \tilde{y}_0 - y_0 \right|.$$

Тоді замість формули (3) для обчислення наближених значень розв'язку $y = y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одержуємо формулу

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h \frac{f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) - f(x_i, \tilde{y}_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) / f(x_i, \tilde{y}_i) \right)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Якщо позначити

$$\varepsilon_i' = \left| \tilde{y}_i - y_i \right| \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\varepsilon_{i+1}' = \left| \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1} \right| =$$

$$= \left| (\tilde{y}_i - y_i) + h\left(\frac{f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) - f(x_i, \tilde{y}_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) / f(x_i, \tilde{y}_i) \right)} - \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i) \right)} \right) \right| \le \varepsilon'_i +$$

$$+ h \left| \frac{f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) - f(x_i, \tilde{y}_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) / f(x_i, \tilde{y}_i) \right)} - \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i) \right)} \right|.$$

Оскільки на основі границі

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

одержуємо

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) - f(x_i, \tilde{y}_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) / f(x_i, \tilde{y}_i) \right)} = f(x_i, \tilde{y}_i),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i) \right)} = f(x_i, y_i),$$

то

$$\frac{f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) - f(x_i, \tilde{y}_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) / f(x_i, \tilde{y}_i) \right)} = f(x_i, \tilde{y}_i) - \tilde{\delta}_i(h),$$

$$\frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{\ln\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) / f(x_i, y_i) \right)} = f(x_i, y_i) - \delta_i(h),$$

де $\tilde{\delta}_i(h) \to 0$ і $\delta_i(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тому

$$\varepsilon'_{i+1} \le \varepsilon'_i + h \left| \left(f(x_i, \tilde{y}_i) - f(x_i, y_i) \right) + \left(\delta_i(h) - \tilde{\delta}_i(h) \right) \right|.$$

Функція $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою L, тому

$$\varepsilon'_{i+1} \le \varepsilon'_i + Lh \left| \tilde{y}_i - y_i \right| + h \left| \delta_i(h) - \tilde{\delta}_i(h) \right|,$$

або

$$\varepsilon'_{i+1} \le (1 + Lh)\varepsilon'_i + h\bar{\delta}_i(h), \tag{4}$$

де $\bar{\delta}_i(h) = \left| \tilde{\delta}_i(h) - \delta_i(h) \right|$. При цьому $\bar{\delta}_i(h) \to 0$, якщо $h \to 0$. Із (4) одержуємо

$$\varepsilon'_1 \le (1 + Lh)\varepsilon'_0 + h\bar{\delta}_0(h);$$

$$\varepsilon'_2 \le (1 + Lh)\varepsilon'_1 + h\bar{\delta}_1(h) \le (1 + Lh)^2 \varepsilon'_0 + h\left((1 + Lh)\bar{\delta}_0(h) + \bar{\delta}_1(h) \right);$$

$$\varepsilon'_3 \le (1 + Lh)\varepsilon'_2 + h\bar{\delta}_2(h) \le (1 + Lh)^3 \varepsilon'_0 + h\left((1 + Lh)^2 \bar{\delta}_0(h) + (1 + Lh)\bar{\delta}_1(h) + \bar{\delta}_2(h) \right);$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varepsilon'_n \le (1 + Lh)^n \varepsilon'_0 + h\left((1 + Lh)^{n-1} \bar{\delta}_0(h) + (1 + Lh)^{n-2} \bar{\delta}_1(h) + \cdots + \bar{\delta}_{n-1}(h) \right).$$

Якщо позначити

$$\max_{0 \le i \le n-1} \bar{\delta}_i(h) = \delta(h),$$

то

$$\varepsilon'_n \le (1 + Lh)^n \varepsilon'_0 + h\delta(h)\left((1 + Lh)^{n-1} + (1 + Lh)^{n-2} + \cdots + 1 \right),$$

або

$$\varepsilon_n' \le (1+Lh)^n \varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left((1+Lh)^n - 1\right).$$

Оскільки при $u > 0$ справедлива нерівність $e^u > 1+u$, то

$$\varepsilon_n' \le e^{Lnh}\varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left(e^{Lnh} - 1\right),$$

або

$$\varepsilon_n' \le e^{La}\varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left(e^{La} - 1\right).$$

Із одержаної нерівності випливає, що похибка початкових даних не нагромаджується, тобто метод має обчислювальну стійкість.

1. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання апарату некласичних мажорант Ньютона для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С.250–254. 2. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и её приложение // Укр. мат. журн. 1989. Т.41. №9. С.1273–1276. 3. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке // Докл. АН УССР. Сер.А. 1987. № 6. С.18–19.

УДК 519.21

Чабанюк Я.М.
НУ "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики

НЕПЕРЕРВНА ПРОЦЕДУРА КІФЕРА-ВОЛЬФОВИЦЯ В МАРКІВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Встановлено достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної апроксимації Кіфера-Вольфовиця у випадковому середовищі, що описується ергодичним марківським процесом, до точки максимуму функції регресії.

The sufficient conditions of Kiefer-Wolfowitz continuous procedure of stochastic approximation convergence in the case of accidental environment thet is describet with ergodic Markov process up to the regression function maximum point is determined in this article.

Вступ. Використовуючи ідеї стохастичної апроксимації Робінса-Монро [1], Кіфер та Вольфовиць у 1952 р. запропонували стохастичну апроксимацію для знаходження точки максимуму u_0 функції регресії $C(u)$, або відшукання розв'язку рівняння $gradC(u)$=0. При