або

$$\varepsilon_n' \le (1+Lh)^n \varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left((1+Lh)^n - 1\right).$$

Оскільки при $u > 0$ справедлива нерівність $e^u > 1 + u$, то

$$\varepsilon_n' \le e^{Lnh}\varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left(e^{Lnh} - 1\right),$$

або

$$\varepsilon_n' \le e^{La}\varepsilon_0' + \frac{1}{L}\delta(h)\left(e^{La} - 1\right).$$

Із одержаної нерівності випливає, що похибка початкових даних не нагромаджується, тобто метод має обчислювальну стійкість.

1. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Використання апарату некласичних мажорант Ньютона для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С.250–254. 2. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и её приложение // Укр. мат. журн. 1989. Т.41. №9. С.1273–1276. 3. Цегелик Г.Г. Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке // Докл. АН УССР. Сер.А. 1987. № 6. С.18–19.

УДК 519.21

Чабанюк Я.М.
НУ "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики

НЕПЕРЕРВНА ПРОЦЕДУРА КІФЕРА-ВОЛЬФОВИЦЯ В МАРКІВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Встановлено достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної апроксимації Кіфера-Вольфовиця у випадковому середовищі, що описується ергодичним марківським процесом, до точки максимуму функції регресії.

The sufficient conditions of Kiefer-Wolfowitz continuous procedure of stochastic approximation convergence in the case of accidental environment thet is describet with ergodic Markov process up to the regression function maximum point is determined in this article.

Вступ. Використовуючи ідеї стохастичної апроксимації Робінса-Монро [1], Кіфер та Вольфовиць у 1952 р. запропонували стохастичну апроксимацію для знаходження точки максимуму u_0 функції регресії $C(u)$, або відшукання розв'язку рівняння $gradC(u)$=0. При цьому вимірювання функції регресії $C(u)$ здійснюється з похибкою типу гауссівського “білого шуму”, що не дозволяє нехтувати такими похибками. В припущенні єдиності точки u_0, умови збіжності процедури стохастичної апроксимації Кіфера-Вольфовиця в роботі [2] формулюються за допомогою другого методу Ляпунова.

Неперервна процедура стохастичної апроксимації Робінса-Монро, у випадку, коли функція регресії залежить від впливу зовнішнього середовища, що описується ергодичним марківським процесом, розглянута в [3]. Використання властивостей функцій Ляпунова дає можливість розв’язати проблему сингулярного збурення ([4], proposition 1) для відповідного породжуючого оператора стохастичного диференціального рівняння, що описує неперервну процедуру стохастичної апроксимації Робінса-Монро.

У цій роботі розглядається неперервна процедура стохастичної апроксимації Кіфера-Вольфовиця для знаходження точки максимуму $u_0 \in R^N$ функції регресії $C(u,x)$, коли $x(t),\ t \ge 0$ – марківський процес.

Формулювання задачі. Отже, нехай функцію регресії $C(u,\cdot)$ можна виміряти в $2N$ точках

$$u_i^{\pm} = u_i \pm b(t)e_i\,;$$

де e_i – вектор в R^N з координатами δ_{ij} ($i,j=\overline{1,N}$), а функція $b(t)$ – додатна. позначимо вектор з координатами $\nabla_b C(u,\cdot)$

$$\frac{C(u_i^{+},\cdot) - C(u_i^{-},\cdot)}{2b(t)}, \qquad (i=\overline{1,N}).$$

Друга компонентна функції регресії $C(u,x)$ характеризує вплив зовнішнього середовища, що описується рівномірно ергодичним марківським процесом $x(t),\ t \ge 0$ у стандартному фазовому просторі станів $(X,\boldsymbol{X})$, з простором станів X і σ – алгеброю $\boldsymbol{X}$ на X. Передбачається, що марківський процес $x(t),\ t \ge 0$ є суто стрибковим, рівномірно ергодичним процесом з породжуючим оператором Q, що діє на функції φ з області свого визначення D_Q за правилом

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dz)\,[\,\varphi(z) - \varphi(x)\,], \tag{1}$$

де інтенсивності $q(x),\ x \in X$, обмежені

$$\|\,q(x)\| := \sup_{x\in X} |\,q(x)| \le c < \infty; \tag{2}$$

ядро $P(x,B),\ B \in \boldsymbol{X}$, визначається ймовірностями переходу вкладеного ланцюга Маркова $x(n), n \ge 0$, за один крок

$$P(x,B) = P\left\{ x(n+1) \in B \big/ x(n) = x \right\}$$

Нехай $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, – стаціонарний розподіл марківського процесу $x(t), t \ge 0$, що задовольняє співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx)\,,\ \ q = \int_x \pi(dx)q(x)$$

де $\rho(dx)$ – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x(n), n \ge 0$.

Для породжуючого оператора Q марківського процесу $x(t), t \geq 0$ розглянемо потенціал R_0 [5], що визначається співвідношеннями

$$Q R_0 = R_0 Q = \Pi\text{-I}, \tag{3}$$

де Π – проектор на підпростір $N_Q := \{\varphi\colon Q\,\varphi = 0\}$ нулів оператора Q, що визначається співвідношеннями

$$\Pi\varphi(x) = \hat{\varphi}\cdot\mathbf{1}(x),\ \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\,\varphi(x).$$

Неперервна процедура стохастичної апроксимації Кіфера-Вольфовиця в ергодичному марківському середовищі задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)\nabla_b C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon))dt + \frac{a(t)}{b(t)}\sigma(t, u^{\varepsilon}(t))dw_t, \tag{4}$$

де функції $a(t)$, $b(t)$ – додатні, w_t – стандартний вінерівський процес [6], $\varepsilon > 0$ – малий параметр серії марківського середовища з породжуючим оператором Q ([5], с. 57).

Для рівняння (4) розглянемо параметричну систему

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)\nabla_b C(u^{\varepsilon}(t), x)dt + \frac{a(t)}{b(t)}\sigma(t, u^{x}(t))dw_t, \tag{5}$$

для якої усереднена процедура стохастичної апроксимації задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)\nabla_b C(u(t))dt + \frac{a(t)}{b(t)}\sigma(t, u(t))dw_t, \tag{6}$$

де усереднена функція регресії $C(u)$, $u \in R^N$, задається формулою

$$C(u) = \int_X \pi(dx)\ C(u, x). \tag{7}$$

Збіжність неперервної процедури стохастичної апроксимації (4) обмежується випадком, коли для усередненої функції регресії $C(u)$, точка u_0 є рівномірно експоненційно стійкою в цілому для суто градієнтної динамічної системи

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = a\,\frac{\partial}{\partial u}C(\hat{u}) \tag{8}$$

при постійному a. В цьому випадку згідно з теоремою Красовського ([7], теорема 5.3) існує функція Ляпунова $V(u)$, така, що

$$V(u) > 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial u}C(u),\ \frac{\partial}{\partial u}V(u)\right) < 0,$$

при

$$u \neq u_0,\ V(u_0) = 0,\ \lim_{|u|\to\infty} V(u) = \infty. \tag{9}$$

Надалі під $f'(u,\cdot)$ або $\dfrac{\partial}{\partial u}\ f(u,\cdot)$ будемо розуміти ветор $\left(\dfrac{\partial}{\partial u_i}f(u,\cdot), i = \overline{1, N}\right)^T$, якщо не буде вказано іншого правила.

Встановимо додаткові умови на функції Ляпунова $V(u)$, регресії $C(u, x)$, а також на функціїї $a(t)$ і $b(t)$, при яких процедура (4) збігається до точки u_0.

Основний результат.

Теорема. Нехай існує функція. Ляпунова $V(u)$ для усередненої системи (8), така, що має неперервні похідні до третього порядку включно, та задовольняє умови

1. $(\nabla_b C(u), \frac{\partial}{\partial u} V(u)) < -c\, V(u)$, c>0,
2. $| R_0\ \nabla_b \tilde{C}(u,x)\ V'(u) | \le c_0\, V(u)$, $c_0>0$,
3. $|\nabla_b C(u,x)\ R_0\ [\nabla_b \tilde{C}(u,x)\ V'(u)]'| \le c_1\, V(u)$, $c_1>0$,
4. $|\sigma^2(u)\, R_0[\nabla_b \tilde{C}(u,x)\ V'(u)]''| \le c_2(1+V(u))$, $\forall t \ge 0$,

де

$$\tilde{C}(u,x) := C(u,x) - C(u).$$

Крім того, функція регресії $C(u,x)$ має перші три похідні по $u \in R^N$, обмежені рівномірно по $x \in X$, а функції $a(t)$ і $b(t)$ такі, що

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty,\ \int_0^\infty \frac{a^2(t)}{b^2(t)} dt < \infty,$$

і

$$\frac{a'(t)}{a(t)} \le a < \infty,$$

тоді для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0)=u \in R^N$, розв'язок рівняння (4) при достатньо малих $\varepsilon \le \varepsilon_0$ збігається з ймовірністю 1 до точки максимуму u_0.

Доведення теореми 1. Двокомпонентний процес $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), t \ge 0$ є марківським процесом з породжуючим оператором

$$L^\varepsilon = \varepsilon^{-1} Q + a(t)\ \nabla_b \mathbf{C}(x) + \frac{a(t)}{b(t)} \mathbf{B},$$

де оператор Q діє по змінній x згідно з формулою (1), оператор $\nabla_b \mathbf{C}(x), x \in X,$ діє за правилом

$$\nabla_b \mathbf{C}(x)\varphi(u) := \nabla_b C(u,x)\varphi'(u) := \frac{1}{2b(t)} \sum_{i=1}^N [\ C(u_i^+, x) - C(u_i^-, x)\ ] \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i},$$

а оператор

$$\mathbf{B}\varphi(u) := \sigma^2(u)\ \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u^2}$$

є породжуючим оператором дифузійного процесу з дисперсією $\sigma^2(u)$.

Розглянемо збурену функцію Ляпунова

$$V^\varepsilon(t,u,x) = V(u) + \varepsilon\, V_1(t,u,x)$$

де функція збурення $V_1(t,u,x)$ будується згідно з розв'язком проблеми сингулярного збурення ([5], лема 3, с. 40)

Лема. Для зведено-оборотного оператора Q в банаховому просторі B та необмеженого оператора Q_1, таких, що мають щільну спільну область визначення в B, розв'язок проблеми сингулярного збурення

$$[\varepsilon^{-1} Q \;+\; Q_1](\varphi + \varepsilon\,\varphi_1) = \psi + \varepsilon\theta^{\varepsilon} \qquad (10)$$

із залишковим членом θ^{ε} таким,що $\|\theta^{\varepsilon}\| \to 0$, при $\varepsilon \to 0$, з умовою, що існує $\hat{Q}_1^{-1}$, задається рівняннями

$$\hat{Q}_1\ \hat{\varphi} = \hat{\psi}\ , \qquad (11)$$

$$\varphi_1 = R_0[Q_1 - \hat{Q}_1]\varphi, \qquad (12)$$

залишковий член θ^{ε} обчислюють за формулою

$$\theta^{\varepsilon} = Q_1\varphi_1, \qquad (13)$$

а звужений оператор $\hat{Q}_1$ на підпросторі N_Q визначають рівністю

$$\hat{Q}_1\ \Pi = \Pi\ Q_1\ \Pi.$$

Доведення леми проводиться аналогічно, як і в [5], оскільки форма потенціалу R_0 (3) і необмеженість оператора Q_1, істотно впливає лише на зображення φ_1, в (12).   .

Розглянемо дію оператора L^{ε} на функцію $V^{\varepsilon}(t,u,x)$. Маємо проблему сингулярного збурення (10) у вигляді

$$[\ \varepsilon^{-1}Q + a(t)\ \nabla_b\mathbf{C}(x) + \frac{a(t)}{b(t)}\mathbf{B}](V(u) + \varepsilon V_1(t,u,x)) = a(t)\ \nabla_b C(u)\ V'(u) + \varepsilon\theta(t,u,x) \qquad (14)$$

із збурюючим оператором

$$Q_1 = a(t)\ \nabla_b\mathbf{C}(x) + \frac{a(t)}{b(t)}\mathbf{B}.$$

Отже, функцію $V_1(t,u,x)$ визначаємо за формулою (12)

$$V_1(t,u,x) = a(t)R_0[\nabla_b\widetilde{C}(u,x)V'(u)]. \qquad (15)$$

При цьому потенціал R_0 можна використовувати до $\nabla_b\widetilde{C}(u,x)$, оскільки

$$\Pi\nabla_b\widetilde{C}(u,x) = \nabla_b\,\Pi\widetilde{C}(u,x) = 0$$

Залишковий член розв’язку проблеми сингулярного збурення (14) обчислимо за формулою (13)

$$\theta(t,u,x) = [a(t)\nabla_b\mathbf{C}(x) + \frac{a(t)}{b(t)}\mathbf{B}]V_1(t,u,x) + \frac{\partial V_1(t,u,x)}{\partial t} =$$

$$= a(t)\nabla_b \mathrm{C}(u,x)V_1'(t,u,x) + \frac{a(t)}{b(t)}\sigma^2(u)V_1''(t,u,x) + \frac{\partial V_1(t,u,x)}{\partial t} =$$

$$= a^2(t)\,\nabla_b C(u,x)R_0[\nabla_b\widetilde{C}\,(u,x)V'(u)]' + \frac{a^2(t)}{b(t)}\ \sigma^2(u)\ R_0[\nabla_b\widetilde{C}\,(u,x)V'(u)]'' +$$

$$+ a'(t)\ R_0[\nabla_b\widetilde{C}\,(u,x)V'(u)] + a(t)\ R_0[\nabla_b\widetilde{C}\,(u,x)V'(u)]_t'.$$

Отже, розв’язок проблеми сингулярного збурення для оператора L^{ε} реалізується рівнянням

$$L^{\varepsilon}\ V^{\varepsilon}(t,u,x) = a(t)\ \nabla_b C(u)\ V'(u) + \varepsilon\theta(t,u,x).$$

Умови теореми забезпечують використання теореми Невельсона – Хасмінського ([2], теорема 3.8.1, с. 100) про збіжність траєкторій марківського процесу.

1. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. 22. 1. P.400–407. 2. Невельсон М.Б., Хасминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. М., 1972. 3. Чабанюк Я.М. Стохастична апроксимація в марківському випадковому середовищі // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 346. С. 143–156. 4. Korolyuk V.S. Stability of stochastik systems in diffusion approximetion scheme // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50. № 1. С. 36–47. 5. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем. К., 1993. 137 с. 6. Лоэв М. Теория вероятностей. М., 1962. 7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости. М., 1959.

УДК 517.98

Шарин С.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ПРО ДУАЛЬНІСТЬ $\langle D'_+, D_+ \rangle$

Розглядається дуальна пара $\langle D'_+, D_+ \rangle$ і досліджуються її властивості. Цей матеріал є доповненням попередніх робіт.

In the article we consider the dual pair $\langle D'_+, D_+ \rangle$ and investigate it's properties.

Розглянемо класичну дуальну пару $\langle D', D \rangle$, введену Лораном Шварцом у його праці з теорії розподілів. Нагадаємо, що $D \equiv D(\mathrm{R})$ – це комплексний векторний простір безмежно гладких функцій $\varphi = \varphi(t)$ з компактними носіями $supp\ \varphi$ на дійсній осі R, наділений локально опуклою топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними; $D' = D'(\mathrm{R})$ – спряжений до D простір лінійних неперервних функціоналів над D.

Позначимо дію деякого розподілу $f \in D'$ на функцію $\varphi \in D$ як $\langle f, \varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi(\cdot) \rangle$, де крапкою відмічатимемо змінну, по якій діє функціонал. Тоді білінійна форма $D' \times D \ni (f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle \in \mathrm{C}$ ставить простори D' і D у двоїстість.

Нехай всюди далі D'_+ – підпростір в D' тих узагальнених функцій f, носії $supp\ f$ яких містяться на додатній замкнутій півосі $[0, +\infty)$.

Поляра підпростору D'_+ відносно двоїстості $\langle D', D \rangle$ має вигляд

$$(D'_+)^0 = \{\varphi \in D : supp\, \varphi \subset (-\infty,\ 0]\}.$$