1. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. 22. 1. P.400–407. 2. Невельсон М.Б., Хасминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. М., 1972. 3. Чабанюк Я.М. Стохастична апроксимація в марківському випадковому середовищі // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 346. С. 143–156. 4. Korolyuk V.S. Stability of stochastik systems in diffusion approximetion scheme // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50. № 1. С. 36–47. 5. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем. К., 1993. 137 с. 6. Лоэв М. Теория вероятностей. М., 1962. 7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости. М., 1959.

УДК 517.98

Шарин С.
Прикарпатський університет ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

ПРО ДУАЛЬНІСТЬ $\langle D'_+, D_+ \rangle$

Розглядається дуальна пара $\langle D'_+, D_+ \rangle$ і досліджуються її властивості. Цей матеріал є доповненням попередніх робіт.

In the article we consider the dual pair $\langle D'_+, D_+ \rangle$ and investigate it's properties.

Розглянемо класичну дуальну пару $\langle D', D \rangle$, введену Лораном Шварцом у його праці з теорії розподілів. Нагадаємо, що $D \equiv D(\mathrm{R})$ – це комплексний векторний простір безмежно гладких функцій $\varphi = \varphi(t)$ з компактними носіями $supp\ \varphi$ на дійсній осі R, наділений локально опуклою топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними; $D' = D'(\mathrm{R})$ – спряжений до D простір лінійних неперервних функціоналів над D.

Позначимо дію деякого розподілу $f \in D'$ на функцію $\varphi \in D$ як $\langle f, \varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi(\cdot) \rangle$, де крапкою відмічатимемо змінну, по якій діє функціонал. Тоді білінійна форма $D' \times D \ni (f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle \in \mathrm{C}$ ставить простори D' і D у двоїстість.

Нехай всюди далі D'_+ – підпростір в D' тих узагальнених функцій f, носії $supp\ f$ яких містяться на додатній замкнутій півосі $[0, +\infty)$.

Поляра підпростору D'_+ відносно двоїстості $\langle D', D \rangle$ має вигляд

$$(D'_+)^0 = \{\varphi \in D : supp\, \varphi \subset (-\infty,\ 0]\}.$$

Звуження білінійної форми, породженої двоїстістю $\langle D', D\rangle$, на прямий добуток $D'\times D$ є константа на довільній множині $\{f_0, \varphi\}$, де $f_0\in D'_+$ – фіксований функці-онал, а функція φ пробігає клас еквівалентності $[\varphi]$ у фактор-просторі $D/(D'_+)^0$. То-му білінійна форма

$$D'_+\times D/(D'_+)^0 \ni (f, [\varphi])\mapsto \langle f,\varphi\rangle \in \mathrm{C},\ \varphi\in[\varphi],$$

індукована двоїстістю $\langle D', D\rangle$, ставить простори D'_+ і $D/(D'_+)^0$ у двоїстість.

На просторі D'_+ як правило, задають сильну топологію $b\left(D'_+, D/(D'_+)^0\right)$ віднос-но двоїстості $\left\langle D'_+, D/(D'_+)^0\right\rangle$.

Ми отримали, що двоїстим до простору D'_+ є певний фактор-простір. Побудуємо деякий клас функцій D_+, який буде топологічно ізоморфний до $D/(D'_+)^0$. Таким чином ми зможемо говорити про дуальну пару $\langle D'_+, D_+\rangle$.

Довільному числу $\nu>0$ поставимо у відповідність простір функцій

$$D_+^\nu=\{\varphi_+(t)=\theta(t)\varphi(t):\varphi(t)\in D,\ supp\,\varphi\bigcap[0,+\infty)\subset[0,\nu]\},$$

де $\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ – функція Хевісайда. Зрозуміло, що $supp\,\varphi_+\subset[0,\nu]$ для кожної функції $\varphi_+\in D_+^\nu$. Топологію на просторі D_+^ν задамо за допомогою набору норм

$$\|\varphi_+\|_{\nu,n}=\sup_{t\in[0,\nu]}\left|\varphi_+^{(n)}(t)\right|,$$

де у напіввідкритому інтервалі $(0,\nu]$ визначені двосторонні похідні, а в точці $t=0$ визначені лише правосторонні похідні. При $\nu\le\mu$ маємо

$$D_+^\nu\subset D_+^\mu \tag{1}$$

і $\|\varphi_+\|_{\mu,n}=\|\varphi_+\|_{\nu,n}$ для всіх $\varphi_+\subset D_+^\nu$. Тому можна визначити індуктивну границю

$$D_+\equiv\bigcup_{n\in N}D_+^{\nu_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{ind}\,D_+^{\nu_n}, \tag{2}$$

де послідовність $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ така, що $\lim_{n\to\infty}\nu_n=\infty$. Оскільки кожна індуктивна границя по кофінальній підпослідовності ізоморфна вихідній [5], то співвідношення (2) не зале-жить від вибору послідовності $\{\nu_n\}$. Очевидно також, що $D_+=\{\theta(t)\varphi(t):\varphi\in D\}$.

Теорема 1. Простори D_+ і $D/(D'_+)^0$ топологічно ізоморфні і канонічна білі-нійна форма з $\langle D', D\rangle$ індукує двоїстість $\langle D'_+, D_+\rangle$.

Доведення. Встановимо взаємно однозначну відповідність. З кожним класом су-міжності $[\varphi]\in D/(D'_+)^0$ зіставимо функцію з простору D_+ вигляду $\theta(t)\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ –

довільний представник $[\varphi]$. І навпаки, довільній функції $\varphi(t)\in D_+$ ставиться у відповідність той клас суміжності фактор-простору $D/(D'_+)^0$, що містить довільне гладке продовження функції $\varphi(t)$ у від'ємну відкриту піввісь $(-\infty,0)$ із збереженням компактності носія.

Для того, щоб показати, що ізоморфізм цих просторів є топологічним, доведемо рівність

$$\left\|[\varphi]\right\|_n=\inf_{\psi\in(D'_+)^0}\sup_{t\in[-\nu,\nu]}\left|\varphi^{(n)}(t)+\psi^{(n)}(t)\right|=\sup_{t\in[0,\nu]}\left|\varphi^{(n)}(t)\right|=\|\varphi\|_{\nu,n}$$

для всіх $\varphi\in D$ і деякого $\nu>0$. Доведення достатньо провести для $n=1$. Зафіксуємо довільну функцію $\varphi_0\in D$ і розглянемо клас суміжності $[\varphi_0]=\left\{\varphi_0+\psi:\psi\in(D'_+)^0\right\}$. З означення простору D випливає, що існує число $\nu>0$ таке, що $supp\,\varphi_0\subset[-\nu,\nu]$. Доведемо, що

$$\inf_{\psi\in(D'_+)^0}\sup_{t\in[-\nu,\nu]}\left|\varphi_0(t)+\psi(t)\right|=\sup_{t\in[0,\nu]}\left|\varphi_0(t)\right|. \tag{3}$$

Оскільки функція $\psi(t)$ є тотожний нуль на півосі $[0,+\infty)$, тобто функції $\varphi_0(t)$ і $\varphi_0(t)+\psi(t)$ збігаються на $[0,+\infty)$, то для доведення рівності (3) нам достатньо до-вести рівність

$$\inf_{\psi\in(D'_+)^0}\sup_{t\in[-\nu,0]}\left|\varphi_0(t)+\psi(t)\right|=|\varphi_0(0)|. \tag{4}$$

Якщо в точці $t=0$ похідна функції $|\varphi_0(t)|$ невід'ємна, то рівність (4) є очевидною.

Нехай $|\varphi_0(0)|'<0$. Виберемо деяке $\varepsilon>0$ таке, що в інтервалі $(-\varepsilon,0)$ функція $|\varphi_0(t)|$ спадна. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що це завжди можна зробити. Для доведення рівності (4) побудуємо в просторі $(D'_+)^0$ послідовність функцій $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ так:

$$\psi_n(t)=\begin{cases}-\varphi_0(t), & t\in(-\infty;-\varepsilon];\\ \tilde{\psi}_n(t), & t\in\left(-\varepsilon,-\dfrac{\varepsilon}{n+1}\right];\\ 0, & t\in\left(-\dfrac{\varepsilon}{n+1},0\right],\end{cases}$$

де $\tilde{\psi}_n(t)$ – довільні гладкі функції, що задовольняють умови $\tilde{\psi}_n(-\varepsilon)=-\varphi_0(-\varepsilon)$, $\tilde{\psi}_n\left(-\dfrac{\varepsilon}{n+1}\right)=0$ і $-\left|\varphi_0\left(-\dfrac{\varepsilon}{n+1}\right)\right|-\varphi_0(t)<\tilde{\psi}_n(t)<\left|\varphi_0\left(-\dfrac{\varepsilon}{n+1}\right)\right|-\varphi_0(t)$.

При функціях $\psi_n(t)$, побудованих таким чином для кожного $n\in\mathrm{N}$ матимемо нерівність

$$\sup_{t\in[-\nu,0]}\left|\varphi_0(t)+\psi_n(t)\right|\le\left|\varphi_0\left(-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right|.$$

Користуючись неперервністю модуля і функції $\varphi_0(t)$, отримуємо

$$\sup_{t\in[-\nu,0]}\left|\varphi_0(t)+\psi_n(t)\right|\le\left|\varphi_0\left(-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\varphi_0(0)\right|.$$

Нерівність $|\varphi_0(0)|\le \inf\limits_{\psi\in(D'_+)^0}\sup\limits_{t\in[-\nu,0]}\left|\varphi_0(t)+\psi(t)\right|$ є очевидною. Тому (4), а, отже, і (3) доведено.

Твердження 1. *Простори* D'_+ *і* D_+ *монтелеві.*

Доведення. Для кожного $\nu>0$ простір D'_+ є замкненим в $C^\infty[0,\nu]$. Відомо, що останній є монтелевим, тому D^ν_+ теж монтелів. Оскільки індуктивна границя (2) є регулярною, то твердження щодо D_+ є доведеним.

Простір D'_+ є монтелевим як сильно спряжений до D_+.

Наслідок. Сильна топологія $b(D'_+, D_+)$ простору D'_+ відносно двоїстості $\langle D'_+, D_+\rangle$ еквівалентна топології, що індукується у підпросторі D'_+ сильною топо-логією $b(D', D)$ простору розподілів D' відносно двоїстості $\langle D', D\rangle$.

Доведення. Твердження є наслідком ізоморфізму $D_+\cong D/(D'_+)^0$ та монтелевості простору D_+.

Теорема 2. Нехай для довільного числа $\nu>0$ простір $D^{-\nu}_+$ – спряжений до D^ν_+ із сильною топологією відносно відповідної дуальної пари $\langle D^{-\nu}_+, D^\nu_+\rangle$. Тоді простір D'_+ у своїй сильній топології $b(D'_+, D_+)$ топологічно ізоморфний проективній границі

$$D'_+\cong \lim_{\nu\to\infty} pr\, D^{-\nu}_+ . \tag{5}$$

Проективна границя (5) взята відносно відображень, спряжених до вкладень (1).

Доведення. У доведенні скористаємось відомим співвідношенням двоїстості для проективних та індуктивних границь локально опуклих просторів з їх сильними топологіями, наведеними в [5], які у нашому випадку мають вигляд

$$(D'_+, b(D'_+, D_+))\cong \lim_{n\to\infty} pr\,(D^{-\nu_n}_+,\ b(D^{-\nu_n}_+, D^{\nu_n}_+)),$$

де $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – така довільна послідовність, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\infty$.

Відомо, що простір D'_+ є алгеброю з операцією згортки розподілів замість мно-ження. Операція згортки в алгебрі D'_+, наділена слабкою топологією відносно двоїс-тості $\langle D'_+, D/(D'_+)^0\rangle$, не має властивості неперервності. Проте для сильної топології справедлива

Теорема 3. Згортка в алгебрі D'_+ неперервна у сильній топології $b(D'_+, D_+)$.

Доведення. Відомо, що множення рефлексивної локально опуклої алгебри є неперервне. З твердження 1 випливає, що згорткова алгебра D'_+ є рефлексивною.

Теорема 4. Правильне щільне вкладення $D_+ \subset D'_+$ в сильній топології простору D'_+.

Доведення. Існування вкладення є наслідком ізоморфізму $D_+ \cong D/(D'_+)^0$.

Доведемо щільність. Нехай $f \in D'_+$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Визначимо розподіл $f_\varepsilon \in D'_+$ у такий спосіб: $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f, \varphi(\cdot + \varepsilon) \rangle, \ \forall \varphi \in D_+$.

Нехай $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність основних функцій з простору D, що наближають дельта-функцію Дірака, зосереджену в точці $\varepsilon > 0$. Результат згортки $f * \psi_n$ належить простору D_+ і $\lim\limits_{n\to\infty} f * \psi_n = f * \delta_\varepsilon = f_\varepsilon$ в сильній топології простору D'_+. Відновити розподіл f, маючи узагальнену функцію f_ε, не становить проблем.

1. Sharyn S.V., Lopushansky O.V. Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Пр. Львівського мат. товариства. Математичні студії. 1997. Т.7. № 1. С. 61–72. 2. Шарин С.В. Теорема Пелі – Вінера для розподілів Шварца з носіями на півосі // Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 1997. Т.40. № 4. С. 54–57. 3. Шарин С.В. Про операцію крос-кореляції розподілів Шварца // Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 1998. Т.41. № 4.С. 67–72. 4. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри І. Борнологічні властивості. Львів, 1993. 55 с. / Препринт 4–93.

УДК 517.927.8

Шкіль М.І., Самусенко П.Ф.
Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, Київ

ЗВЕДЕННЯ ПЕВНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО L-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

The method of construction of asymptotical formulas for solutions of the systems of differential equations with identically degenerate matrix near the derivatives in case of multiple roots of characteristic equation is offered in the work.

Пропонується метод побудови асимптотичних формул для розв’язків систем диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних у випадку кратних коренів характеристичного рівняння.