Теорема 3. Згортка в алгебрі D'_+ неперервна у сильній топології $b(D'_+, D_+)$.

Доведення. Відомо, що множення рефлексивної локально опуклої алгебри є неперервне. З твердження 1 випливає, що згорткова алгебра D'_+ є рефлексивною.

Теорема 4. Правильне щільне вкладення $D_+ \subset D'_+$ в сильній топології простору D'_+.

Доведення. Існування вкладення є наслідком ізоморфізму $D_+ \cong D/(D'_+)^0$.

Доведемо щільність. Нехай $f \in D'_+$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Визначимо розподіл $f_\varepsilon \in D'_+$ у такий спосіб: $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f, \varphi(\cdot + \varepsilon) \rangle, \ \forall \varphi \in D_+$.

Нехай $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність основних функцій з простору D, що наближають дельта-функцію Дірака, зосереджену в точці $\varepsilon > 0$. Результат згортки $f * \psi_n$ належить простору D_+ і $\lim\limits_{n\to\infty} f * \psi_n = f * \delta_\varepsilon = f_\varepsilon$ в сильній топології простору D'_+. Відновити розподіл f, маючи узагальнену функцію f_ε, не становить проблем.

1. Sharyn S.V., Lopushansky O.V. Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Пр. Львівського мат. товариства. Математичні студії. 1997. Т.7. № 1. С. 61–72. 2. Шарин С.В. Теорема Пелі – Вінера для розподілів Шварца з носіями на півосі // Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 1997. Т.40. № 4. С. 54–57. 3. Шарин С.В. Про операцію крос-кореляції розподілів Шварца // Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 1998. Т.41. № 4.С. 67–72. 4. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри І. Борнологічні властивості. Львів, 1993. 55 с. / Препринт 4–93.

УДК 517.927.8

Шкіль М.І., Самусенко П.Ф.
Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, Київ

ЗВЕДЕННЯ ПЕВНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО L-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

The method of construction of asymptotical formulas for solutions of the systems of differential equations with identically degenerate matrix near the derivatives in case of multiple roots of characteristic equation is offered in the work.

Пропонується метод побудови асимптотичних формул для розв’язків систем диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних у випадку кратних коренів характеристичного рівняння.

У роботі досліджуються асимптотичні властивості розв’язків лінійних систем диференціальних рівнянь

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, t \ge t_0 \qquad (1)$$

у випадку, коли $\det B(t) \equiv 0$ або $\det B(t) \ne 0$ для всіх $t \ge t_0$.

Асимптотичні властивості розв'язків системи (1) за умови $\det B(t) \ne 0$ при $t \ge t_0$ найповніше були досліджені в роботах І.М.Рапопорта [1], М.І.Шкіля [2] та їх учнів [3, 5]. При цьому систему

$$\frac{dx}{dt} = B^{-1}(t)A(t)x$$

залежно від кратності коренів відповідного характеристичного рівняння зводили до L-діагональної системи

$$\frac{dx}{dt} = \left(\Lambda(t) + C(t)\right)x\ , \qquad (2)$$

де

$$\Lambda(t) = diag\left\{w_1(t),..., w_n(t)\right\},$$

або ж до узагальнено L-діагональної системи диференціальних рівнянь, тобто до сис-теми

$$\frac{dx}{dt} = \left(\Lambda(t) + C(t)\right)x\ , \qquad (3)$$

де

$$\Lambda(t) = diag\left\{W_1(t),..., W_m(t)\right\},$$

$$W_k(t) = \| w_{ij}(t) \|_1^{n_k}, w_{ii}(t) = w_i(t), w_{ii+1}(t) = 1, w_{ij}(t) = 0 (i \ne j, j \ne i+1)\ .$$

У роботі [5] розглядалась система (1) у випадку $\det B(t) \equiv 0, t \ge t_0$. Асимптотичні формули для розв’язків цієї системи були отримані за допомогою зведення її до L-діагональної системи меншого порядку. При такому зведенні системи (1) використовували результати асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x\ ,$$

де

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \tau \in [0; L], \tau = \varepsilon t,$$

а ε – малий параметр. Виявилось, що асимптотичне інтегрування системи (3) набагато складніше, аніж системи (2). В цій роботі пропонується метод побудови лінійних підстановок, за допомогою яких система (1) у випадку кратних власних значень пучка $A(t) - \lambda B(t)$ може бути зведена до L–діагональної системи (2).

Надалі припускатимемо, що:

1. $\det B(t) \equiv 0, t \ge t_0$;
2. Пучок матриць $A(t) - \lambda B(t)$ регулярний для всіх $t \in [t_0; \infty)$;

3. Корені $\lambda_i(t), i = 1,2,...,\nu,$ характеристичного рівняння

$$\det(A(t) - \lambda B(t)) = 0$$

та відповідні їм елементарні дільники пучка зберігають постійну кратність на проміжку $t \in [t_0;\infty)$.

Тоді існують неособливі матриці $P(t)$ та $Q(t)$ [4,5] такі, що система (1) зводиться до системи вигляду

$$H\frac{dy}{dt} = \left(\Omega(t) - HQ^{-1}(t)Q'(t)\right)y, \tag{4}$$

де $H = P(t)B(t)Q(t),$ а $\Omega(t) = P(t)B(t)Q(t)$. Припустимо, що:

4. Довільні елементи матриць $P(t)$ та $Q(t)$ можна вибрати так, щоб власні значення пучка $\Omega(t) - HQ^{-1}(t)Q'(t) - \lambda H$ були простими для всіх $t \ge t_0$.

Введемо позачення

$$D(t) = \Omega(t) - HQ^{-1}(t)Q'(t)$$

і замість системи (4) будемо розглядати систему

$$\varepsilon H\frac{dy}{dt} = D(t)y\,, \tag{5}$$

ε – дійсний параметр (система (5) при $\varepsilon = 1$ збігається з системою (4)). Покладемо

$$y = U_m(t,\varepsilon)z, U_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t),$$

де $z - r$ – вимірний вектор, а $U_s(t)$ – прямокутні $n \times r$ – матриці, r – кількість коренів характеристичного рівняння

$$\det(D(t) - \lambda H) = 0\,.$$

Дістанемо

$$\varepsilon HU_m(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = \left(D(t)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon HU'_m(t,\varepsilon)\right)z\,. \tag{6}$$

Матриці $U_s(t)(s = 0,1,...,m)$ будемо визначати так, щоб виконувалася матрична рівність

$$D(t)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon HU'_m(t,\varepsilon) = HU_m(t,\varepsilon)\left(\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right), \tag{7}$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)$ – діагональна матриця вигляду

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s \Lambda_s(t)\,,$$

а $C_m(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця r-го порядку, яка теж підлягає визначенню.

Матриці $U_m(t,\varepsilon), \Lambda_m(t,\varepsilon)$ визначатимемо з тотожності (7), прирівнюючи в ній коефіцієнти при однакових степенях ε. Отже, приходимо до системи матричних рівнянь

$$D(t)U_0(t) - HU_0(t)\Lambda_0(t) = 0\,, \tag{8}$$

$$D(t)U_0(t) - HU_0(t)\Lambda_0(t) = HU'_{s-1}(t) + H\sum_{j=1}^{s}U_{s-j}(t)\Lambda_j(t)\,. \tag{9}$$

Запишемо матричне рівняння (8) у векторній формі. Для цього стовпці матриці $U_0(t)$ позначимо $u_{0i}(t)(i=1,2,...,r)$ і покладемо

$$\Lambda_0(t)=diag\{\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_r(t)\},$$

де $\lambda_i(t)(i=1,2,...r)$ – власні значення матриці $D(t)$ відносно матриці H. Тоді, матимемо

$$\left(D(t)-\lambda_i(t)H\right)u_{0i}(t)=0\,. \tag{10}$$

Отже, якщо $\mu_i(t)(i=1,2,...,r)$-власні вектори матриці $D(t)$ відносно матриці H, то мож-на покласти

$$u_{0i}(t)=\mu_i(t)\,.$$

З [4] випливає, що вектори $\mu_i(t)(i=1,2,...,r)$ можна побудувати так, щоб

$$\left(H\mu_i(t),\phi_j(t)\right)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j, i, j=\overline{1,r}\end{cases}$$

де $\phi_j(t)(j=1,2,...,r)$ – нуль-вектори матриці $\left(D(t)-\lambda_i(t)H\right)^*$.

Розглянемо матричну систему рівнянь (9) при $s=1$, записавши її у векторній формі

$$\left(D(t)-\lambda_i(t)H\right)u_{1i}(t)=g_{1i}(t), i=1,2,...,r, \tag{11}$$

тут $u_{1i}(t)$ – стовпці матриці $U_1(t)$, а вектор $g_{1i}(t)$ дорівнює

$$g_{1i}(t)=Hu'_{0i}(t)+Hu_{0i}(t)\lambda_{1i}(t) \tag{12}$$

Рівняння (11) розв'язне відносно вектора $u_{1i}(t)$ тоді й тільки тоді, коли вектор $g_{1i}(t)(i=1,2,...,r)$ ортогональний до будь-якого нетривіального розв'язку союзної однорідної системи рівнянь. Таким чином, щоб система (11) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб для всіх $t\geq t_0$ виконувалася рівність

$$\left(g_{1i}(t),\phi_i(t)\right)=0, i=1,2,...,r\,.$$

Підставляючи в останню рівність значення вектора $g_{1i}(t)$, знаходимо функції $\lambda_{1i}(t)$

$$\lambda_{1i}(t)=-\left(H\mu'_i(t),\phi_i(t)\right), i=1,2,...,r\,. \tag{13}$$

Тому можна покласти

$$\Lambda_1(t)=diag\{\lambda_{11}(t),\lambda_{12}(t),...,\lambda_{1r}(t)\}.$$

Отже, якщо функції $\lambda_{1i}(t)$ визначатимуться за формулами (13), то система (11) відносно вектора $u_{1i}(t)$ матиме розв'язок. Цей розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u_{1i}(t)=\sum_{s=1}^{r}c_{si}^{(1)}(t)\mu_s(t), i=1,2,...r, \tag{14}$$

де $c_{si}^{(1)}(t)$ – функції, які повинні бути визначені так, щоб вектор (14) задовольняв систему (11). Підставимо вираз (14) у систему (11) і знайдений результат помножимо скалярно на вектор $\phi_j(t),(j=1,2,...,r)$. Матимемо

$$c_{ji}^{(1)}(t)\left(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)\right)=\left(g_{1i}(t),\phi_j(t)\right), j=1,2,...,r\,.$$

При $i=j$ отримаємо тотожність

$$c_{jj}^{(1)}(t)\cdot 0\equiv 0\,.$$

Тому функція $c_{jj}^{(1)}(t)$ залишається довільною. Нехай, наприклад,

$$c_{jj}^{(1)}(t) \equiv 0, t \geq t_0 .$$

При $i \neq j$ знаходимо

$$c_{ji}^{(1)}(t) = \frac{\left(g_{1i}(t), \phi_j(t)\right)}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)} .$$

Таким чином,

$$u_{1i}(t) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{r} \frac{\left(g_{1i}(t), \phi_s(t)\right)}{\lambda_s(t) - \lambda_i(t)} \mu_s(t) .$$

Отже, ми визначили матриці $U_1(t)$ та $\Lambda_1(t)$.

Використовуючи метод математичної індукції, можна показати, що рівняння (9) розв'язне відносно матриць $U_s(t)$ та $\Lambda_s(t)(s = 2,3,...,r)$.

Перейдемо до знаходження матриці $C_m(t,\varepsilon)$. Якщо:

5. $rang(HU_m(t,1)) = rang(HU_m(t,1), f_i(t)), i = 1,2,...,r, t \geq t_0$,

де $f_i(t)$ – стовпці матриці $F(t)$, а

$$F(t) = -HU'_m(t) - H\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=k}^{m} U_j(t)\Lambda_{m+k-j}(t) ,$$

то з системи (7) при $\varepsilon = 1$ дістанемо [4, 5]

$$C_m(t,1) = (HU_m(t,1))^{-} F(t) ,$$

де $(HU_m(t,1))^{-}$ – напівобернена матриця відносно матриці $HU_m(t,1)$.

Таким чином, система (4) зводиться до L-діагональної системи

$$\frac{dz}{dt} = \left(\Lambda_m(t,1) + C_m(t,1)\right)z . \tag{15}$$

Надалі припускатимемо, що:

а) жодна з різниць

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t,1) - \operatorname{Re}\lambda_j(t,1) \tag{16}$$

не змінює знак для $t \geq t_1 \geq t_0$, де $\lambda_i(t,1)(i = 1,2,...,r)$ -діагональні елементи матриці $\Lambda_m(t,1)$;

б)

$$\int_{t_0}^{\infty} \| C_m(t,1) \| \, dt < \infty , \tag{17}$$

тоді вектор $x_s(t)$, який є розв'язком системи (1), матиме вигляд

$$x_s(t) = \mu_{sj}(t) e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_j(t,1)dt} , s = 1,2,...,r, \; j = 1,2...,n, \tag{18}$$

де $\mu_{sj}(t)$ – функції, неперервні на проміжку $[t_0;\infty)$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Нехай матриця $D(t)$ системи (4) на проміжку $[t_0;\infty)$ має прості власні значення відносно матриці H та виконуються умови 1-3, 5, (16), (17), тоді для r розв'язків системи (1) мають місце формули (18).

Зауваження. Якщо $\det B(t) \neq 0$ формули, аналогічні формулам (18), можна отримати, покладаючи у відповідних алгебраїчних системах $D(t) = W(t) - T^{-1}(t)T'(t)$ та $H = E$, де $W(t) = diag\{w_1(t),...,w_n(t)\}$ а $T(t)$ –матриця перетворення подібності.

1. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. К., 1954. 2. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. К.,1971. 3. Старун И.И. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1969. С.186. 4. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. К., 1991. 5. Самусенко П.Ф. Побудова асимптотичних формул для розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній: Дис. ...канд. фіз.-мат. наук. К., 1997. С.142.