унеможливлення досягнення повної віброізоляції механічної системи в горизонтальному напрямку, а можна говорити лише про часткову.

Залишки вібрації, які передаються через віброізолятори 11 і 13 (рис. 1) і стійку 12 на фундамент, навіть при наявності зсуву фаз між коливними рухами, є малими порівняно з відомими вібраційними машинами об'ємної обробки інших типів і видів. Тому використання вібраційних машин даного типу доцільніше.

1. Повидайло В.А, Шаповалов С.В. Динамика автоматизированных резонансных вибромашин с объемной вибрацие // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении. 1986. Вып. 25. С. 64–70. 2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., 1990. 3. Бауман.В.А Быховский.И.И. Вибрационные машины и процессы в строительстве. М., 1977.

УДК 539.3

О.М. Римар, М.О. Римар
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра нарисної геометрії та інженерної графіки

ЗВ'ЯЗОК МІЖ НОРМАЛЬНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧІ ГЕРЦА

Знайдено формули, що визначають зв'язок між нормальними напруженнями для точного розв'язку задачі Герца на основі системи переміщень, яка задовольняє необхідні умови теорії пружності.

Normal strain has been determined for Hertzian contact problem. The solving of this problem is based on a system displacement that satisfies the elastic theory conditions.

У випадках контактного навантаження деталей машин оптимізація їх параметрів здійснюється на основі моделювання напруженого стану. Постає актуальною задача про визначення нормальних та дотичних напружень в точках елементів деталей з необхідною точністю. Контактна міцність деталей машин істотно залежить і від співвідношення нормальних напружень. Для контактних задач в межах теорії пружності сума нормальних напружень [1] визначається формулою

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2G)\Theta, \qquad (1)$$

де Θ – об'ємне розширення; λ,G – постійні Ламе.

В роботі [2] нами запропоновано точний розв'язок задачі Герца, який забезпечує виконання всіх необхідних умов теорії пружності. Визначимо нормальні напруження, зв'язок між ними та перевіримо виконання умови $\sigma\big|_{z\to\infty} = 0$ для точного розв'язку задачі на основі системи переміщень [2]

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{n_2}{2\pi} z \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{n_1}{2\pi} \int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x} dz, \\ v &= -\frac{n_2}{2\pi} z \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{n_1}{2\pi} \int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial y} dz, \\ w &= -\frac{n_2}{2\pi} z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{n_2}{\pi} V, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

де $n_2 = \frac{1+\nu}{E(1+2\nu)}$, $n_1 = \frac{(1+\nu)(4\nu-1)}{E(1+2\nu)}$,

тут E,ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, V – ньютонів потенціал еліптичного диска змінної густини,

$$V = \frac{3P}{4} \int_t^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}} ds, \tag{3}$$

де P – зусилля стискання, a,b – півосі еліпса площадки контакту, t – найбільший корінь рівняння [7]

$$1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{t} = 0 .$$

Для цієї системи переміщень об’ємне розширення

$$\Theta = \frac{1}{2\pi(2\lambda+G)} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi E(1+2\nu)} \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{4}$$

де

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{3P}{2} z \int_t^\infty \frac{ds}{s\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}}. \tag{5}$$

Для інтегральної функції із формули (5), застосувавши підстановки

$$\left.\begin{aligned} & s = z^2, \;\; ds = 2zdz; \\ & z = btg\psi, \;\; dz = bd\psi / cos^2\psi, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

та використавши табличне значення інтеграла [6], знайдемо розв’язок (z>0)

$$I_1 = z\int_t^\infty \frac{ds}{s\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}} = \frac{2}{ab} \frac{tg\varphi_z}{tg\varphi} \left[\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi} - tg\varphi \cdot \left(E(k) - E(\varphi,k) \right) \right], \tag{7}$$

де

$$\varphi_z = arctg\frac{z}{b}, \varphi = arctg\frac{\sqrt{t}}{b}, \tag{8}$$

тут $E(k)$, $E(\varphi,k)$ – повний і неповний еліптичні інтеграли 2-го роду в нормальній формі Лежандра [5], k – модуль або ексцентриситет еліпса площадки контакту

$$\left.\begin{aligned} k &= \sqrt{1-k'^2}, \\ k' &= b/a. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Рівність (1), враховуючи формулу (4), можна записати у вигляді:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{(1+\nu)}{\pi(1+2\nu)} \frac{\partial V}{\partial z} \tag{10}$$

або, підставивши формули (5), (7), для z>0

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{z>0} = -2\frac{(1+\nu)}{(1+2\nu)} \frac{3P}{2\pi ab} \frac{tg\varphi_z}{tg\varphi}\left[\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi} - tg\varphi \cdot \left(E(k) - E(\varphi, k)\right)\right]$$

Нагадаємо, що для відомого наближеного розв’язку задачі Герца [1] сума

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{(1+\nu)}{\pi} \frac{\partial V}{\partial z}$$

значно, в (1+2ν) рази, перевищує суму нормальних напружень за формулою (10) точного розв’язку. Для значення коефіцієнта ν=0,3, наприклад, таке перевищення становить 1,6 раза.

Знайдемо нормальні напруження із системи (2) точного розв’язку, застосувавши відомі формули теорії пружності [3]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{n_{\sigma 2}}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ \sigma_x &= \frac{n_{\sigma 4}}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{n_{\sigma 2}}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{n_{\sigma 1}}{2\pi}\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz, \\ \sigma_y &= \frac{n_{\sigma 4}}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{n_{\sigma 2}}{2\pi} z \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{n_{\sigma 1}}{2\pi}\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dz, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

де $n_{\sigma 1} = \frac{4\nu - 1}{1+2\nu}$; $n_{\sigma 2} = \frac{1}{1+2\nu}$; $n_{\sigma 4} = \frac{2\nu}{1+2\nu}$.

Підставляючи формули (11) в рівність (10), одержимо:

$$\int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz + \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dz = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{12}$$

де враховано, що потенціал V є гармонійною функцією, тобто лапласіан $\nabla^2 V = 0$.

Відомо [1], що

$$\left.\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz &= \frac{3P}{2} I_4 - \frac{3P}{2} I_2, \\ \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dz &= \frac{3P}{2} I_5 - \frac{3P}{2} I_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Підставляючи інтеграли (13) в рівність (12), одержимо:

$$I_2 + I_3 = I_1 + I_4 + I_5\,, \tag{14}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^{\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{2x^2}{a^2+s} - \dfrac{y^2}{b^2+s}\right)ds}{\sqrt{(a^2+s)^3(b^2+s)}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2+s} - \dfrac{y^2}{b^2+s}}},\\
I_3 &= \int_t^{\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2+s} - \dfrac{2y^2}{b^2+s}\right)ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)^3}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2+s} - \dfrac{y^2}{b^2+s}}},
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

інтеграл I_1 визначається формулою (7), а інтегральні вирази із формул (13), якщо застосувати підстановки (6), мають розв'язки [6]:

$$\left.\begin{aligned}
I_4 &= z\int_t^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)^3(b^2+s)s}} = \frac{2k'^2}{ab} tg\varphi_z \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{cos^2\psi d\psi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\psi)^3}} =\\
&= \frac{2k'^2}{ab} tg\varphi_z \left\{ \frac{\left[K(k) - F(\varphi,k)\right] - \left[E(k) - E(\varphi,k)\right]}{k^2} - \frac{sin\varphi cos\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} \right\},\\
I_5 &= z\int_t^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)^3 s}} = \frac{2}{ab} tg\varphi_z \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{cos^2\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\psi}} =\\
&= \frac{2}{ab} tg\varphi_z \left\{ \frac{\left[E(k) - E(\varphi,k)\right] - k'^2\left[K(k) - F(\varphi,k)\right]}{k^2} \right\},
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

де *K(k), F(φ,k)* – повний і неповний еліптичні інтеграли [5] першого роду в формі Лежандра, а φ і φ_z визначаються формулами (8).

Підставляючи формули (7),(16) у рівність (14), після перетворень одержимо:

$$\left(I_2 + I_3\right)_{z>0} = \frac{2}{ab}\frac{tg\varphi_z}{tg\varphi}\frac{cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}\,. \tag{17}$$

Дослідимо поведінку функцій I_1, I_4, I_5, які для точок на безмежності ($z=\infty$) мають невизначеність $\infty\times 0$. Для таких точок

$$z = \sqrt{t} = \infty,\quad \varphi_z = \varphi = \pi/2,\quad tg\varphi_z = tg\varphi,$$

тому:

– із формули (7) знайдемо, що

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \varphi\to\pi/2}} I_1 = \lim_{\substack{\varphi_я\to\pi/2\\ \varphi\to\pi/2}} \frac{2}{ab}\frac{tg\varphi_z}{tg\varphi}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{\int_{\varphi}^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi}{ctg\varphi}\right] = \tag{18}$$

$$= \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{2}{ab}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1-k^2}\right] = 0;$$

– із формули (16), застосувавши підстановки

$s=z^2$, $ds=2zdz$; $z = a\cdot ctg\beta$, $dz = -ad\beta/\sin^2\beta$,

знайдемо, що

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \beta\to 0}} I_4 = \lim_{\substack{\beta\to 0\\ \varphi_z\to\pi/2\\ \varphi\to\pi/2}} \frac{2k'}{ab}\frac{tg\varphi_z}{tg\varphi}\frac{\int_0^{\beta}\frac{\sin^2\beta\,d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}}{tg\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{2k'}{ab}\frac{\sin^2\beta\cos^2\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = 0, \tag{19}$$

де $z\to\infty ... \beta\to 0$, $\beta = arcctg\frac{\sqrt{t}}{a}$;

– із формули (16), застосувавши підстановку (6), знайдемо, що

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \varphi\to\pi/2}} I_5 = \lim_{\substack{\varphi_z\to\pi/2\\ \varphi\to\pi/2}} \frac{2}{ab}\frac{tg\varphi_z}{tg\varphi}\frac{\int_{\varphi}^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}}{ctg\varphi} = \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{2}{ab}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 0, \tag{20}$$

при цьому розв’язки (18), (19), (20) дійсні в повному інтервалі ексцентриситета $0\le k\le 1$.

Крім того, для точок на безмежності:

– із рівності (17)

$$(I_2 + I_3)_{z=\infty} = 0; \tag{21}$$

– із формул (16), (19), (20)

$$(I_4 + I_5)_{z=\infty} = 0; \tag{22}$$

тому сума нормальних напружень як сума функцій (11)

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{z=\infty} = 0. \tag{23}$$

Знайдемо значення інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 для точок площадки контакту. Для таких точок $t=0$, $z=0$. Інтеграл I_1 має невизначеність, яка розкрита А.Н.Динником [4]:

$$\lim_{z\to 0} I_1 = \lim_{\substack{z\to 0\\ t\to 0}} z\int_t^{\infty}\frac{ds}{s\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}} = \frac{2}{ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \tag{24}$$

Інтеграл I_4 за формулою (16) в інтервалі ексцентриситета $0\le k<1$ для точок площадки контакту визначений, тобто

$$\left(I_4\right)_{\substack{z=0\\0\le k<1}} = 0\,,$$

і не визначений для початкового контакту по лінії $\left(k=1, k'=0, F(k)=\infty, a=\infty\right)$, але із формули (19) для цього випадку ($\beta \to \pi/2$)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \beta\to \pi/2}} I_4 = \lim_{\beta\to\pi/2} \frac{2k'}{ab} \sin^2\beta \cos\beta = 0\,, \tag{25}$$

тому в повному інтервалі ексцентриситета $0 \le k \le 1$

$$\left(I_4\right)_{z=0} = 0\,. \tag{26}$$

Для точок площадки контакту

$$\left(I_5\right)_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = 0\,, \tag{27}$$

що очевидно із теорії еліптичних інтегралів [5] – в формулі (16) для φ=0, t=0

$$\frac{E(k)-k'^2K(k)}{k^2} = B(k) < \infty\,.$$

Із рівності (14), враховуючи формули (24), (26), (27), для точок площадки контакту

$$(I_2+I_3)_{z=0} = \frac{2}{ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{28}$$

Підставляючи в рівність (10) формули (4),(24), після перетворень одержимо для точок площадки контакту:

$$(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)_{z=0} = -2\frac{(1+\nu)}{(1+2\nu)}\,p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,, \tag{29}$$

де p_0 – тиск в центрі площадки контакту,

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi ab}\,. \tag{30}$$

Підставляючи значення похідних [3] у формули (11), одержимо після перетворень:

$$\sigma_z = -n_{\sigma 4}\frac{3P}{4\pi}I_1 - \\ -n_{\sigma 2}\frac{3P}{2\pi}\frac{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}\right)^{3/2}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)}\left[\dfrac{tx^2}{(a^2+t)^2}+\dfrac{ty^2}{(b^2+t)^2}+1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}\right]}, \tag{31}$$

$$\sigma_x = -n_{\sigma 4}\frac{3P}{4\pi}I_1 + (n_{\sigma 2}-n_{\sigma 1})\frac{3P}{4\pi}I_4 - \\ -n_{\sigma 2}\frac{3P}{2\pi}\frac{x^2t\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}}}{\sqrt{(a^2+t)^5(b^2+t)}\left[\dfrac{tx^2}{(a^2+t)^2}+\dfrac{ty^2}{(b^2+t)^2}+1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}\right]} + n_{\sigma 1}\frac{3P}{4\pi}I_2, \tag{32}$$

$$\sigma_y = -n_{\sigma 4}\frac{3P}{4\pi}I_1 + (n_{\sigma 2} - n_{\sigma 1})\frac{3P}{4\pi}I_5 -$$

$$- n_{\sigma 2}\frac{3P}{2\pi}\frac{y^2 t\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t}}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)^5}\left[\frac{tx^2}{(a^2+t)^2} + \frac{ty^2}{(b^2+t)^2} + 1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t}\right]} + n_{\sigma 1}\frac{3P}{4\pi}I_3. \quad (33)$$

Формули (10), (14), (23), (29) служать для перевірки правильності розв'язків інтегралів I_2, I_3, I_4, I_5 і підтверджують правильність знайденої (2) системи переміщень.

Висновки

1. Одержані формули дають змогу визначити напруження в довільній точці та задовольняють всі краєві умови.

2. Знайдений розв'язок задачі, порівняно з відомим, суттєво, вдвічі, уточнює значення та суму нормальних напружень.

1. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности. М., 1957. 2. Римар О.М. Система переміщень точного розв'язку просторової контактної задачі // Зб. наук. пр. Львів: Асоціація "Автобус". 2000. Вип.4. С. 96–100. 3. Римар О.М. Загальний вигляд формул для нормальних напружень наближеного розв'язку задачі Герца – Там само. С. 91–95. 4. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. К., 1952. Т. 1. 5. Янке Е. Эмде Ф. Лёш Ф. Специальные функции Пер. с 6-го перераб. немецк. издания. М., 1977. 6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 7. Римар О.М. Визначення межі інтеграла ньютонового потенціала простого шару // Зб. наук. пр. 2000. Вип.3. Львів: Асоціація "Автобус". С.103–105.

УДК 621.9.048.6

З.А. Стоцько, Б.І. Сокіл, В.Г. Топільницький
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра електронного машинобудування

РЕЗОНАНСНІ РЕЖИМИ РОБОТИ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН ОБ'ЄМНОЇ ОБРОБКИ

На базі математичної моделі досліджено резонансні режими роботи вібромашини об'ємної обробки виробів. Отримані графічні залежності траєкторії руху геометричного центра контейнера вібромашини для головного та проміжних резонансів.

On the basis of mathematical model is researched resonance modes of operations of the vibration computer of processing of articles(workpieces). The graphics dependences of a trajectory of driving of geometrical centre of the container for main and intermediate resonances are obtained.

Конструкції вібраційних машин об'ємної обробки виробів надзвичайно різноманітні. За видом приводу вони поділяються на вібромашини електромагнітного і дебалансного типу,