УДК 621.3.01

С.Й. Рендзіняк
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра теоретичної та загальної електротехніки

УДОСКОНАЛЕНИЙ МЕТОД ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ СТАНУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Запропоновано удосконалений метод формування системи рівнянь стану електричних кіл з лінійними і нелінійними компонентами, що базується на згортанні лінійних опорів і провідностей та лінійно керованих джерел енергії з застосуванням властивостей блокових матричних операцій.

The improved method of creating of state equation system of electric circuits with linear and nonlinear components, which founded on reduction of linear resistances and conductances and linearly controllable power sources with usage of properties of block matrix operations, is proposed.

Постановка проблеми

Необхідність формування системи рівнянь стану виникає для деяких теоретичних і практичних задач, однак, у переважній кількості програм схемотехнічного проектування застосовуються дискретні резистивні моделі реактивних елементів.

Удосконалення методу формування систем рівнянь стану полягає в ефективному застосуванні блокових матричних операцій з урахуванням типу даних (цілі числа чи числа з плаваючою комою), обертанні матриць найменшого розміру, виділенні незалежних рядів матричних операцій, які виконуються в одній частині оперативної пам’яті ЕОМ. Ці заходи уможливлюють формування системи рівнянь стану значно більших за розміром електричних кіл без збільшення при цьому об’єму оперативної пам’яті чи без застосування складних спеціальних програмних засобів, наприклад, процедур управління сторінками оперативної пам’яті ЕОМ.

Аналіз останніх досліджень

Основний недолік методів формування системи рівнянь стану полягає в наявності складних блокових матричних операцій, що призводить до суттєвого обмеження розміру схем [1]. Пов’язано це насамперед з необхідністю знаходити обернену матрицю, розміри якої визначаються числом лінійних елементів. До них на сучасному рівні розвитку моделей елементів електротехнічних, електромеханічних і радіоелектронних схем тощо, входять джерела ЕРС, струму, лінійні електричні опори (провідності) і лінійно керовані джерела енергії. З решта нелінійних елементів формують вектор нелінійних функцій, розрахунок яких проводиться в інтегруючому програмному блоці.

Задачі досліджень

Математичну модель електричної схеми, яка розглядається також як підсхема чи багатополюсник, визначаємо векторними рівняннями

$$\begin{cases} Y = \mathbf{A} \cdot Z + \mathbf{A}_n \cdot Y_n; \\ Y_n = f(X_n); \\ X_n = \mathbf{AX} \cdot Z + \mathbf{AX}_n \cdot Y_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Під час формування системи (1) не має сенсу виділяти реактивні елементи окремо, достатньо тільки упорядкувати параметри, щоби надалі можна було б знайти необхідні підвектори і підблоки матриць. Отже, вектор вихідних параметрів Y складається зі струмів конденсаторів, напруг котушок індуктивностей, струмів джерел ЕРС і напруг джерел струмів (в тому числі й вихідних змінних підсхеми чи багатополюсника)

$$Y = \left(i_C, u_L, i_E, u_J\right)^T .$$

Вектор Z складається зі змінних стану, незалежних параметрів внутрішніх джерел енергії та вихідних змінних підсхеми

$$Z = \left(u_C, i_L, E, J\right)^T .$$

Відповідно X_n. Y_n – вхідний і вихідний вектори нелінійних елементів. Матриця $\mathbf{AX}_n$ дорівнює нулю, якщо нелінійні елементи топологічно зв'язані з реактивними елементами, наприклад, нелінійне джерело струму чи провідність керуються напругою конденсатора, з яким вони сполучені паралельно. Тоді й матриця $\mathbf{AX}$ складається тільки з нулів і одиниць.

Виклад основного матеріалу

Вважаємо, що вихідні топологічні рівняння сформовані на попередніх етапах програмного комплексу, а саме вузлові рівняння

$$I_{tr} + \mathbf{N} \cdot I_{ch} = 0 , \tag{2}$$

контурні рівняння

$$-\mathbf{N}^T \cdot U_{tr} + U_{ch} = 0 , \tag{3}$$

де

$$I_{tr} = \left(Y_u, i_{Eu}, i_{Ei}, i_R\right)^T ,\ Y_u = \left(i_{FE}, i_E, i_C\right)^T ,\ I_{ch} = \left(i_G, J_u, J_i, X_i, J_n\right)^T ,\ X_i = \left(i_L, J, FJ\right)^T ,$$

$$U_{tr} = \left(X_u, E_u, E_i, u_R\right)^T ,\ X_u = \left(FE, E, u_C\right)^T ,\ U_{ch} = \left(u_G, u_{Ju}, u_{Ji}, Y_i, u_{Jn}\right)^T ,\ Y_i = \left(u_L, u_J, u_{FJ}\right)^T ,$$

де

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{XuG} & \mathbf{N}_{XuJu} & \mathbf{N}_{XuJi} & \mathbf{N}_{XuXi} & \mathbf{N}_{XuJn} \\ \mathbf{N}_{EuG} & \mathbf{N}_{EuJu} & \mathbf{N}_{EuJi} & \mathbf{N}_{EuXi} & \mathbf{N}_{EuJn} \\ \mathbf{N}_{EiG} & \mathbf{N}_{EiJu} & \mathbf{N}_{EiJi} & \mathbf{N}_{EiXi} & \mathbf{N}_{EiJn} \\ \mathbf{N}_{RG} & \mathbf{N}_{RJu} & \mathbf{N}_{RJi} & \mathbf{N}_{RXi} & \mathbf{N}_{RJn} \end{pmatrix} \text{ – матриця головних перетинів;}$$

рівняння віток

$$\begin{gathered} u_R = \mathbf{R} i_R ,\ i_G = \mathbf{G} u_G , \\ E_u = \mathbf{B}_u U_{tr} ,\ \mathbf{B}_u = \left(\mathbf{B}_{XuEu}^T, \mathbf{0}, \mathbf{B}_{EiEu}^T, \mathbf{B}_{REu}^T\right), \\ E_i = \mathbf{B}_i I_{ch} ,\ \mathbf{B}_i = \left(\mathbf{B}_{GEi}^T, \mathbf{B}_{JuEi}^T, \mathbf{B}_{JiEi}^T, \mathbf{B}_{XiEi}^T, \mathbf{B}_{JnEi}^T\right), \\ J_u = \mathbf{A}_u U_{tr} ,\ \mathbf{A}_u = \left(\mathbf{A}_{XuJu}^T, \mathbf{A}_{EuJu}^T, \mathbf{A}_{EiJu}^T, \mathbf{A}_{RJu}^T\right), \\ J_i = \mathbf{A}_i I_{ch} ,\ \mathbf{A}_i = \left(\mathbf{A}_{GJi}^T, \mathbf{A}_{JuJi}^T, \mathbf{0}, \mathbf{A}_{XiJi}^T, \mathbf{A}_{JnJi}^T\right). \end{gathered} \tag{4}$$

З систем (2) і (3) виділяємо змінні стану разом з зовнішніми параметрами джерел енергії

$$\begin{pmatrix} Y_u \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{XuXi} & -\mathbf{N}_{XuJn} \\ \mathbf{N}^T_{XuXi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_i \\ J_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{XuG} & -\mathbf{N}_{XuJu} & -\mathbf{N}_{XuJi} \\ \mathbf{N}^T_{EuXi} & \mathbf{N}^T_{EiXi} & \mathbf{N}^T_{RXi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} E_u \\ E_i \\ u_R \\ \hline i_G \\ J_u \\ J_i \end{array} \right)$$

Вектор $\left(E_u \quad E_i \quad u_R \mid i_G \quad J_u \quad J_i\right)^T$ знаходимо також з топологічних рівнянь (2) і (3) та рівнянь віток (4)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -\mathbf{B}^T_{EiEu} & -\mathbf{B}^T_{REu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}^T_{GEi} & -\mathbf{B}^T_{JuEi} & -\mathbf{B}^T_{JiEi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{N}_{RG} & \mathbf{N}_{RJu} & \mathbf{N}_{RJi} \\ \hline -\mathbf{N}^T_{EuG} & -\mathbf{N}^T_{EiG} & -\mathbf{N}^T_{RG} & \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T_{EuJu} & -\mathbf{A}^T_{EiJu} & -\mathbf{A}^T_{RJu} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T_{GJi} & -\mathbf{A}^T_{JuJi} & \mathbf{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} E_u \\ E_i \\ u_R \\ \hline i_G \\ J_u \\ J_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^T_{XuEu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T_{XiEi} & \mathbf{B}^T_{JnEi} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{RXi} & -\mathbf{N}_{RJn} \\ \hline \mathbf{N}^T_{XuG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T_{XuJu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T_{XiJi} & \mathbf{A}^T_{JnJi} \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_u \\ X_i \\ J_n \end{pmatrix}.$$

Компонування найймовірніше великих груп елементів переставлянням підматриць призводить до системи

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}^T_{GEi} & -\mathbf{B}^T_{JuEi} & -\mathbf{B}^T_{JiEi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{N}_{RG} & \mathbf{N}_{RJu} & \mathbf{N}_{RJi} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{N}^T_{EiG} & -\mathbf{N}^T_{RG} & \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^T_{EuG} \\ -\mathbf{A}^T_{EiJu} & -\mathbf{A}^T_{RJu} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T_{EuJu} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T_{GJi} & -\mathbf{A}^T_{JuJi} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T_{EiEu} & -\mathbf{B}^T_{REu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} E_i \\ u_R \\ \hline i_G \\ J_u \\ \hline J_i \\ E_u \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{B}^T_{XiEi} & \mathbf{B}^T_{JnEi} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{RXi} & -\mathbf{N}_{RJn} \\ \hline \mathbf{N}^T_{XuG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T_{XuJu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}^T_{XiJi} & \mathbf{A}^T_{JnJi} \\ \mathbf{B}^T_{XuEu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_u \\ X_i \\ J_n \end{pmatrix},$$

у якій необхідно обернути ліву матрицю з чітко виділеними діагональними підматрицями.

Програмування блокових матричних операцій значно спрощується, якщо необхідний блок матриці виділяється з повної матриці без переставляння елементів в оперативній пам'яті ЕОМ. Тобто звертання до підблока полягає тільки у визначенні його початкової адреси. Аналіз всіх матричних операцій, необхідних під час формування системи рівнянь стану і подальшого числового інтегрування з урахуванням того, що мовою програмування ФОРТРАН, якою написані програмні модулі, елементи матриці в оперативній пам'яті розміщуються по стовпчиках, підтвердив зручність і вигідність формування транспонованої системи (1). Тому всі подальші матричні операції наведені в транспонованому вигляді так, як вони реалізовані в програмному модулі.

Передусім пронормуємо діагональні блоки

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{EiG} & -\mathbf{A}_{EiJu} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{EiEu} \\
\mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1} & -\mathbf{N}_{RG} & -\mathbf{A}_{RJu} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{REu} \\ \hline
-\mathbf{B}_{GEi} & \mathbf{N}_{RG}^{T} & \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{GJi} & \mathbf{0} \\
-\mathbf{B}_{JuEi} & \mathbf{N}_{RJu}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}_{JuJi} & \mathbf{0} \\ \hline
-\mathbf{B}_{JiEi} & \mathbf{N}_{RJi}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{EuG} & -\mathbf{A}_{EuJu} & \mathbf{0} & \mathbf{1}
\end{array}\right)^{-1} =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|cc|cc}
\mathbf{1} & & & & & \\
 & \mathbf{R} & & & & \\ \hline
 & & \mathbf{G} & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \\ \hline
 & & & & \mathbf{1} & \\
 & & & & & \mathbf{1}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{1}} & -\mathbf{N}_{EiRG}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{EiRJu} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{EiREu} \\ \hline
-\mathbf{B}_{GJuEi} & \mathbf{N}_{RGJu}^{T}\mathbf{R} & \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{1}} & -\mathbf{A}_{GJuJi} & \mathbf{0} \\ \hline
-\mathbf{B}_{JiEi} & \mathbf{N}_{RJi}^{T}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{EuG}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{EuJu} & &
\end{array}\right)^{-1} =
$$

$$
= (\ddots)\left(\begin{array}{c|c|cc}
\mathbf{1} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{13}' \\ \hline
\mathbf{S}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_{23}' & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{S}_{31}' & \mathbf{0} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{S}_{32}' & &
\end{array}\right)^{-1}
= (\ddots)\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\
\mathbf{S}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_{23} \\
\mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}
\end{pmatrix}^{-1} \qquad (5)
$$

Далі застосуємо відомі блокові матричні операції [2], які реалізують метод Ґаусса щодо підматриць до матриці (5) з врахуванням таких важливих матричних властивостей.

Властивість 1. Добуток підматриць $\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31}$ дорівнює нулю.

Доведення. Підставимо значення цих підматриць з виразу (5)

$$
\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{EiREu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{B}_{JiEi} & \mathbf{N}_{RJi}^{T}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.
$$

Властивість 2. Значення оберненої матриці $(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})^{-1}$ дорівнює $\mathbf{1}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}$.

Доведення. Визначимо добуток $(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})(\mathbf{1}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}) = \mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13} = \mathbf{1}$. Звідки отримуємо вираз $(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})^{-1} = \mathbf{1}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}$.

З цих властивостей випливають важливі матричні вирази

$$
\mathbf{S}_{13}(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})^{-1} = \mathbf{S}_{13}(\mathbf{1}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}) = \mathbf{S}_{13}+\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13} = \mathbf{S}_{13};
$$

$$
(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})^{-1}\mathbf{S}_{31} = (\mathbf{1}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13})\mathbf{S}_{31} = \mathbf{S}_{31}+\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31} = \mathbf{S}_{31}.
$$

Аналогічні властивості притаманні й матрицям $\mathbf{S}_{23}, \mathbf{S}_{32}$:

$$
\mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{32} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{GJuJi} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}_{EuG}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{EuJu} \end{pmatrix} = \mathbf{0};
$$

$$
(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23})^{-1} = \mathbf{1}+\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23};
$$

$$\mathbf{S}_{23}\left(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\right)^{-1}=\mathbf{S}_{23}\left(\mathbf{1}+\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\right)=\mathbf{S}_{23}+\mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}=\mathbf{S}_{23};$$

$$\left(\mathbf{1}-\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\right)^{-1}\mathbf{S}_{32}=\left(\mathbf{1}+\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\right)\mathbf{S}_{32}=\mathbf{S}_{32}+\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{32}=\mathbf{S}_{32}.$$

Покажемо процедуру обертання матриці (5) на прикладі розв’язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Можливі три варіанти виключення векторів змінних

$$1)\ \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{23}-\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{32}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{12} & \mathbf{1}-\mathbf{S}_{31}\mathbf{S}_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ -\mathbf{S}_{21}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ -\mathbf{S}_{31}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

$$2)\ \begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{13}-\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{S}_{31}-\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\mathbf{S}_{32}\mathbf{S}_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-\mathbf{S}_{12}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&-\mathbf{S}_{32}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

$$3)\ \begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{12}-\mathbf{S}_{13}\mathbf{S}_{32} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_{21}-\mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{31} & \mathbf{1}-\mathbf{S}_{23}\mathbf{S}_{32} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&-\mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&-\mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Найцікавішим є останній варіант, у якому діагональні підматриці стають одиничними

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{S}'_{12} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}'_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&-\mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&-\mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

де

$$\mathbf{S}'_{12}=\mathbf{S}_{12}-\mathbf{S}'_{13}\mathbf{S}'_{32}=\left(-\mathbf{N}_{EiRG}\mathbf{G}-\mathbf{B}_{EiREu}\mathbf{N}_{EuG}\mathbf{G}\ \vdots\ -\mathbf{A}_{EiRJu}-\mathbf{B}_{EiREu}\mathbf{A}_{EuJu}\right);$$

$$\mathbf{S}'_{21}=\mathbf{S}_{21}-\mathbf{S}'_{23}\mathbf{S}'_{31}=\left(-\mathbf{B}_{GJuEi}-\mathbf{A}_{GJuJi}\mathbf{B}_{JiEi}\ \vdots\ \mathbf{N}^T_{RGJu}\mathbf{R}+\mathbf{A}_{GJuJi}\mathbf{N}^T_{RJi}\mathbf{R}\right).$$

Подальша реалізація процедури виключення векторів змінних

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{S}'_{12}\mathbf{S}'_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\mathbf{S}'_{21}\mathbf{S}'_{12} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-\mathbf{S}'_{12}&\mathbf{0}\\ -\mathbf{S}'_{21}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&-\mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&-\mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

призводить до заміни обертання матриці (5) на добуток ряду мариць

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{1}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ -\mathbf{S}_{31}&-\mathbf{S}_{32}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_{11}^{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{S}_{22}^{-1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-\mathbf{S}'_{12}&\mathbf{0}\\ -\mathbf{S}'_{21}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&-\mathbf{S}_{13}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&-\mathbf{S}_{23}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix},$$

де $\mathbf{S}_{11}=\mathbf{1}-\mathbf{S}'_{12}\mathbf{S}'_{21}$; $\mathbf{S}_{22}=\mathbf{1}-\mathbf{S}'_{21}\mathbf{S}'_{12}$. Як бачимо, обертання великої матриці (5) звелося до обертання значно менших за розміром матриць $\mathbf{S}_{11}$ і $\mathbf{S}_{22}$, між якими встановлений зв’язок

$$\mathbf{S}_{11}^{-1}\equiv\mathbf{1}+\mathbf{S}'_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}'_{21};\ \mathbf{S}_{22}^{-1}\equiv\mathbf{1}+\mathbf{S}'_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}'_{12}$$

уможливлює обертання тільки найменшої з цих матриць.

Остаточно система рівнянь стану набуває вигляду

$$
\left(Y_u \mid Y_i \right) = \left(X_u \mid X_i \mid J_n \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{XuXu} & \mathbf{S}_{XuXi} \\ \hline \mathbf{S}_{XiXu} & \mathbf{S}_{XiXi} \\ \hline \mathbf{S}_{JnXu} & S_{JnXi} \end{array} \right) =
$$

$$
= \left(X_u \mid X_i \mid J_n \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{Xu2}\mathbf{S}_{22}^{-1}\left(\mathbf{S}'_{23}\mathbf{N}_{XuJi}^{T} - \mathbf{N}_{XuGJu}^{T}\right) & \mathbf{S}_{Xu2}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}'_{21}\left(\mathbf{S}'_{13}\mathbf{N}_{EuXi} - \mathbf{N}_{EiRXi}\right) + \mathbf{S}_{XuEu}\mathbf{N}_{EuXi} + \mathbf{N}_{XuXi} \\ \hline -\mathbf{S}_{Xi1}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}'_{12}\left(\mathbf{S}'_{23}\mathbf{N}_{XuJi}^{T} - \mathbf{N}_{XuGJu}^{T}\right) - \mathbf{S}_{XiJi}\mathbf{N}_{XuJi}^{T} - \mathbf{N}_{XuXi}^{T} & -\mathbf{S}_{Xi1}\mathbf{S}_{11}^{-1}\left(\mathbf{S}'_{13}\mathbf{N}_{EuXi} - \mathbf{N}_{EiRXi}\right) \\ \hline -\mathbf{S}_{Jn1}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}'_{12}\left(\mathbf{S}'_{23}\mathbf{N}_{XuJi}^{T} - \mathbf{N}_{XuGJu}^{T}\right) - \mathbf{S}_{JnJi}\mathbf{N}_{XuJi}^{T} - \mathbf{N}_{XuJn}^{T} & -\mathbf{S}_{Jn1}\mathbf{S}_{11}^{-1}\left(\mathbf{S}'_{13}\mathbf{N}_{EuXi} - \mathbf{N}_{EiRXi}\right) \end{array} \right). \tag{6}
$$

За тим самим алгоритмом знаходять необхідні вихідні параметри підсхем чи багатополюсника.

Елементами матриць типу **S** є дійсні числа, матриць типу **N** – цілі числа. Окрім цього в системі рівнянь (6) виділяються однакові матричні операції. Врахування цих факторів під час створення алгоритму дає змогу ефективно використати оперативну пам’ять ЕОМ шляхом проведення незалежних груп матричних операцій в одній її частині.

Висновки

Відомо, що під час обертання матриць виникають найбільші похибки, пов’язані з обмеженням розрядної сітки ЕОМ. Тому методи і алгоритми, у яких зведено до мінімуму операції обертання матриць і окремих чисел є найточнішими. Передусім це стосується великих за розміром електричних схем, які дуже чутливі до таких похибок. Запропонований метод формування системи рівнянь стану реалізовано в програмному комплексі аналізу динамічних режимів електричних кіл і його ефективно використовують для розв’язання низки теоретичних і практичних задач.

1. Стахив П.Г. Анализ динамических режимов в электронных схемах с многополюсниками. – Львов, 1988. – 154 с. 2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М., 1984. – 320 с.