УДК 621.34 – 501.72

В.І. Мороз
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра електропривода і автоматизації промислових установок

ЗАСТОСУВАННЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ

Розглянуті способи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь, які описують моделі електроприводів, за допомогою рекурентних формул, що отримані із застосуванням Z-перетворення.

The approach for the solving of the ordinary differential equations that modeling the electric drives based on Z-transformer is described.

Постановка проблеми

Традиційний у моделюванні електроприводів підхід до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з використанням відомих числових методів і записом диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші не завжди призводить до отримання задовільних результатів, особливо у випадку складних електромеханічних систем зі сталими часу, що різняться на декілька порядків (жорсткі системи диференціальних рівнянь). Використання звичайних числових методів (типу Рунґе-Кутта чи Адамса) у таких випадках виявляється часто неефективним, а спеціалізовані методи (наприклад, формули Ґіра (*Gear*) чи, як їх ще називають, ФДН – формули диференціювання назад) також поводяться не найкраще [2–4]. Так, зокрема, автор і його колеги були свідками, коли в середовищі математичного пакета MATLAB (*який, до речі, вирізняється досконалим проробленням всіх застосованих числових методів*) зміна типу числового методу (*з автоматичним вибором кроку інтегрування*!) призводила до зміни результату моделювання. Більше того, в додатковій документації до цього пакета міститься стаття, в якій наведено аналогічний приклад.

Аналіз останніх досліджень

Використання Z-перетворення дозволяє отримати аналітично строгий розв’язок у випадку відомого вхідного сигналу для будь-якого кроку розв’язку [1, 6]. Відомі підходи справедливі не лише для лінійних, але й для досить широкого класу нелінійних систем [5]. У той же час у відомій літературі не зустрічаються готові для практичного використання моделюючі рівняння (за винятком [5], де наведено моделюючі рівняння з використанням фіксатора нульового порядку) і не проаналізовано точність отриманих за допомогою Z-перетворення моделюючих рекурентних рівнянь.

Задачі досліджень

Темою пропонованої статті є отримання та дослідження простих рекурентних рівнянь, що дозволяють описувати лінійні системи чи такі, які можна на даному кроці вважати лінійними (лінеаризовані системи).

Основний матеріал статті

Використання Z-перетворення для моделювання електромеханічних систем автоматичного керування, зокрема, електроприводів, дозволяє використати його суттєві переваги:

- стійкий розв’язок для будь-якого кроку;

• для відомого вхідного сигналу отримуємо аналітично точний розв’язок;

• у лінійних системах для довільного вхідного сигналу (який не описано аналітично) точність розв’язку визначається точністю апроксимації вхідного сигналу.

Важливим моментом у виведенні моделюючого рекурентного рівняння є наявність інформації про вхідний сигнал (мається на увазі його аналітичний опис). Якщо такої інформації нема, виконується його дискретна апроксимація, яка здійснюється фіксатором [1, 5, 6] (рис. 1). Залежно від виду і складності апроксимації розрізняють різні типи фіксаторів: нульового, першого і вищих порядків, хоча у відомій літературі [1, 5, 6] зустрічаються описи фіксаторів не вище першого порядку. Звичайно, введення фіксатора призводить до втрати інформації, але відповідним вибором типу апроксимації та кроку розв'язку можна звести ці втрати до допустимого рівня.

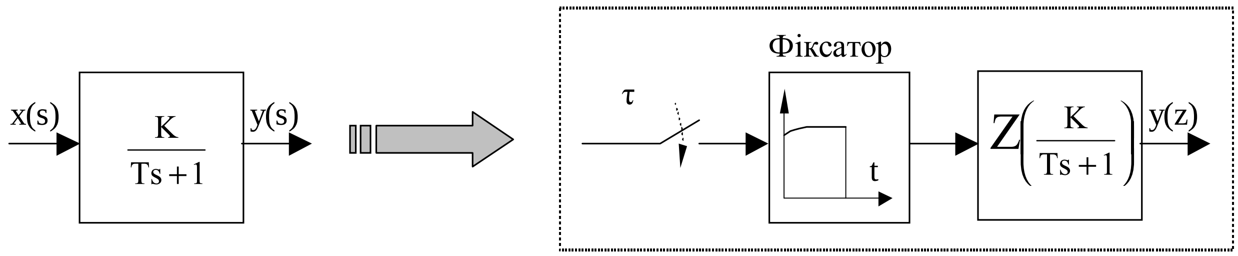

Рис. 1. Побудова дискретної моделі

Найчастіше для моделювання використовують два види апроксимації вхідного сигналу:

1) за допомогою полінома нульового порядку (*апроксимація прямокутниками*) – цій апроксимації відповідає фіксатор нульового порядку (рис. 2, *а*), який має передавальну функцію $\frac{1-e^{-hs}}{s}$;

2) за допомогою полінома першого порядку (*апроксимація трапеціями*) – цій апроксимації відповідає фіксатор першого порядку (рис. 2, *б*), який має передавальну функцію $\frac{\left(1-e^{-hs}\right)^2 e^{hs}}{hs^2}$.

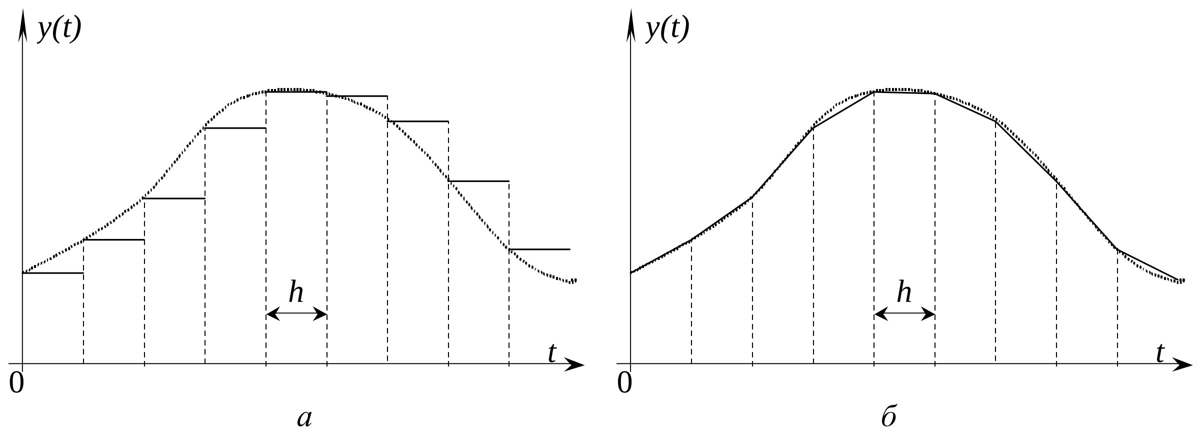

Рис. 2. Види апроксимації вхідного сигналу:
а – прямокутниками; б – трапеціями

Слід відмітити, що апроксимація вхідного сигналу трапеціями є точнішою, тому в моделюванні застосовується частіше, хоч у реальних системах керування фізично реалізувати можна тільки апроксимацію прямокутниками.

Дослідити особливості поведінки різних способів апроксимації вхідного сигналу досить зручно на найпростішій моделі – аперіодичній ланці, що широко використовується у моделях електроприводів і для якої просто знаходяться аналітичні вирази для вихідних координат, тому результати перевірки нескладно порівняти з точним розв’язком. Такій ланці відповідає диференціальне рівняння $Ty' + y = x$, де y – вихідна координата, T – стала часу, x – вхідний сигнал. Отримані за допомогою Z-перетворення рекурентні рівняння утворюють її цифрову модель, властивості якої можна порівняти з еталоном – власне аперіодичною ланкою, що має передатну функцію $\dfrac{1}{Ts+1}$.

Нижче показано приклади синтезу рекурентних рівнянь для моделювання аперіодичної ланки першого порядку (*аналог звичайного диференціального рівняння першого порядку*) за допомогою двох видів апроксимації вхідного сигналу.

Фіксатор нульового порядку

За таблицями [1, 6] виконаємо Z-перетворення для фіксатора нульового порядку і аперіодичної ланки

$$Z\left(\left(\frac{1-e^{-s\tau}}{s}\right)\cdot\left(\frac{K}{Ts+1}\right)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(1-e^{-\frac{\tau}{T}}\right)K}{z-e^{-\frac{\tau}{T}}},$$

звідси за дискретною передавальною функцією отримуємо рекурентне рівняння для моделювання:

$$y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \left(1-e^{-\frac{\tau}{T}}\right)\cdot K \cdot x_i .$$

Фіксатор нульового порядку з півперіодним випередженням

Використання для отримання моделюючого рівняння фіксатора нульового порядку крім простоти має недолік – півперіодне запізнення сигналу в прямому каналі, яке необхідно компенсувати для підвищення точності. За таблицями [1, 6] виконаємо модифіковане Z-перетворення для фіксатора нульового порядку і аперіодичної ланки (для компенсації фазного зсуву на півперіоду задаємо зміщення m = 0,5):

$$Z\left(\left(\frac{1-e^{-s\tau}}{s}\right)\cdot\left(\frac{K}{Ts+1}\right), m\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(1-e^{-\frac{\tau}{2T}}\right)\cdot\left(z+e^{-\frac{\tau}{2T}}\right)K}{z-e^{-\frac{\tau}{T}}},$$

звідси за дискретною передавальною функцією отримуємо рекурентне рівняння для моделювання

$$y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{\tau}{2T}}\right) \cdot K \cdot \left(x_{i+1} + x_i \cdot e^{-\frac{\tau}{2T}}\right).$$

Фіксатор першого порядку

За таблицями [1, 6] виконаємо Z-перетворення для фіксатора першого порядку і аперіодичної ланки:

$$Z\left(\left(\frac{\left(1 - e^{-s\tau}\right)^2 e^{s\tau}}{\tau s^2}\right) \cdot \left(\frac{K}{Ts + 1}\right)\right) \Rightarrow \qquad \frac{z - e^{-\frac{\tau}{T}} - \frac{T}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right)(z - 1)}{z - e^{-\frac{\tau}{T}}} K,$$

звідси за дискретною передавальною функцією отримуємо рекурентне рівняння для моделювання:

$$y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + K \cdot \left(x_{i+1} - x_i \cdot e^{-\frac{\tau}{T}}\right) - K \cdot \frac{T}{\tau} \cdot \left(x_{i+1} - x_i\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right).$$

Дослідження поведінки отриманих рекурентних формул для спрощення аналізу проведено для аперіодичної ланки зі сталою часу *T*=1 с. У статті подано результати досліджень реакції пропонованих цифрових моделей аперіодичної ланки на два типові вхідні сигнали: синусоїдний з кутовою частотою π $с^{-1}$ та прямокутний з періодом 5 с. Такі тестові вхідні сигнали дозволяють отримати досить точну інформацію про поведінку цифрової моделі. Отримані результати тестів показано на рис. 3 (реакція на одиничний прямокутний вхідний сигнал для двох значень кроку – 0,2 і 0,5 с) і на рис. 4 (реакція на одиничний синусоїдний вхідний сигнал для двох значень кроку – 0,2 і 0,5 с).

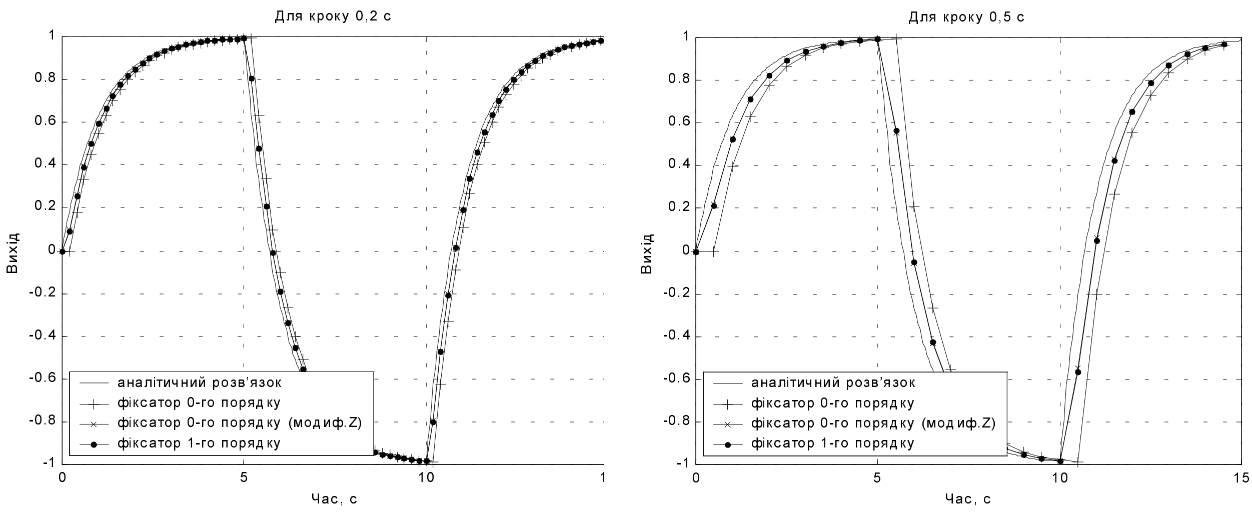

Рис. 3. Реакція на прямокутний вхідний сигнал

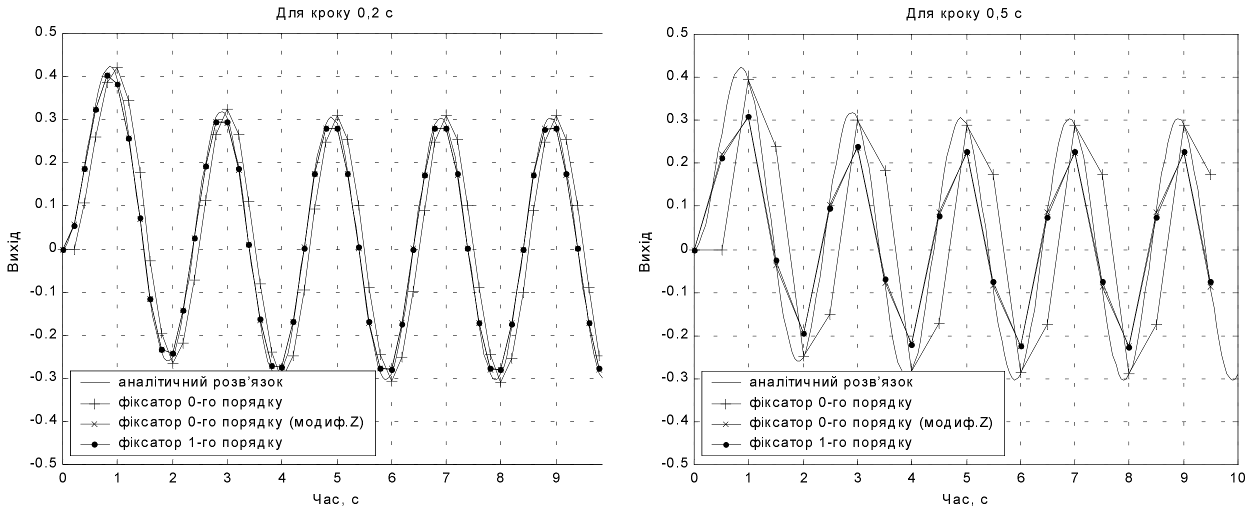

Рис. 4. Реакція на синусоїдний вхідний сигнал

Висновки

• Використання Z-перетворення дозволяє отримати порівняно прості моделюючі рекурентні рівняння, що просто реалізуються у всіх середовищах програмування та математичних пакетах.

• Отримані моделюючі рекурентні рівняння **є стійкими для будь-якого кроку** розв'язування.

• Вищу точність можна отримати за допомогою фіксатора нульового порядку з півперіодним випередженням і фіксатора першого порядку; порівняльний аналіз показав, що отримана точність розв'язку не нижча, ніж з використанням формул ФДН третього – четвертого порядків.

• Для практичного використання можна рекомендувати фіксатор нульового порядку з півперіодним випередженням як простіший у використанні.

1. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. – М., 1963. – 456 с. 2. Мороз В.І. Аналіз частотних характеристик чисельних методів розв'язку звичайних диеренійних рівнянь // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 1995. – № 288. – С. 58–66. 3. Мороз В.І. Аналіз чисельних методів для аналізу керованих електромеханічних систем // Тез. Доп. 3-ї Міжнар. наук.-техн. конф. "Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці", 25–30 жовтня 1999 р., Львів, 1999. – С. 24-28. 4. В. Мороз Аналіз числових методів для моделювання керованих електромеханічних систем // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 2000. – № 403. – С. 111–113. 5. Смит Дж. М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей: Пер. с англ. – М., 1980. 6. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М., 1964.