

### Висновки

Уперше запропоновано ефективну й адекватну математичну модель усталеного режиму електроприймача – асинхронний двигун – відцентрова помпа, – як елемента вузла навантаження ЕПС. Отримані результати показали доцільність подальших досліджень із метою створення узагальненої математичної моделі аналізу усталених режимів електропостачальних систем з урахуванням взаємного впливу статичної характеристики гідравлічної мережі.

1. Костишин В.С. *Модельовання режимів роботи відцентрових насосів на основі електрогідравлічної аналогії*. – Івано-Франківськ, 2000. – 163 с. 2. Костенко М.П., Пиотровський Л.М. *Электрические машины. ч. 2*. – Л., 1973. – 648 с. 3. *Применение аналоговых вычислительных машин в энергетических системах / Под ред. Н.И. Соколова*. – М., 1970. – 400 с. 4. Брускин Д.Э., Зорохович А.Е., Хвостов В.С. *Электрические машины и микромашины*. – М., 1990. – 528 с. 5. Перхач В.С. *Математичні задачі електроенергетики*. – Львів, 1989. – 464 с.

УДК 621.317

**М.М. Дорожовець**

Національний університет “Львівська політехніка”.  
кафедра інформаційно-вимірювальної техніки

## ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ ВАРІАЦІЙ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАТРИЦІ ЯКОБІ ДЛЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ТОМОГРАФІЇ

© Дорожовець М.М., 2003

**Метод розрахунку ґрунтується на використанні електротехнічної теореми про варіації. Показано, що матрицю Якобі можна розрахувати за один розв’язок прямої задачі без методичних похибок, притаманних скінченно-різницеvim методам.**

**Method is based on electrical theorem of variation. The Jacobean matrix can be calculated after single direct problem solution without methodical errors that are inhered for the finite-difference method.**

### Постановка проблеми

Електричну томографію використовують для знаходження просторового розподілу провідності, діелектричної проникності, комплексної провідності, магнітної проникності та інших пов’язаних з ними величин всередині об’єкта за результатами вимірювань зовнішніх електричних величин [1–3]. Суть томографії електричної провідності полягає в тому, що об’єкт у різних просторових ракурсах піддають зовнішньому електричному збудженню (зондуванню) і вимірюють його реакцію на ці збудження, і далі за множиною отриманих результатів вимірювань знаходять просторовий розподіл провідності всередині об’єкта [1–3]. Для збудження і вимірювання використовують електроди, які розміщені на зовнішній поверхні об’єкта.

Задача знаходження просторового розподілу електричної провідності (аналогічно діелектричної проникності, комплексної провідності, магнітної проникності) за результатами вимірювань зовнішніх електричних величин об'єкта, які є його відгуком (реакцією) на зовнішні електричні збудження, за своєю суттю є нелінійною задачею [1–4]. Застосовуючи той чи інший спосіб апроксимації електричних параметрів досліджуваного середовища та електричного поля в ньому, цю задачу можна звести до системи нелінійних рівнянь. Основними методами розв'язування таких систем є методи Ньютонівського типу та оптимізаційні методи [1–4]. В обох випадках – це ітераційні методи і на кожній ітерації для знаходження наступного наближення шуканих величин виникає необхідність обчислення матриць похідних, зокрема, якобіана – у Ньютонівських методах, та градієнтів – в оптимізаційних (градієнтних) методах.

### Аналіз останніх досліджень

Розглянемо детальніше проблеми обчислення Якобіана при використанні першого з методів розв'язування оберненої задачі електричної томографії. У загальному плані  $(i,j)$ -й коефіцієнт якобіана обчислюють за виразом

$$\tilde{J}_{i,j} = \frac{\tilde{U}_i(R_j + \Delta R) - \tilde{U}_i(R_j)}{\Delta R}, \quad (1)$$

де опір  $R_j$   $j$ -го апроксимаційного елемента;  $\Delta R$  – приріст опору цього елемента;  $\tilde{U}_i(R_j)$ ,  $\tilde{U}_i(R_j + \Delta R)$  – значення вихідної (вимірюваної) величини у  $i$ -му ракурсі вимірювання при початковому значенні опору  $R_j$   $j$ -го елемента та при його значенні з приростом  $R_j + \Delta R$ , відповідно. У виразі (1) замість опору може виступати провідність, діелектрична проникність чи інший досліджуваний електричний параметр середовища.

Загалом числове обчислення елементів якобіана може супроводжуватися двома видами похибок [4]. Перша зумовлена скінченно-різницевим способом обчислення похідних, а друга – похибками обчислення функцій  $\tilde{U}_i(R_j)$ ,  $\tilde{U}_i(R_j + \Delta R)$  – розрахунку наближених значень зовнішніх електродних величин. При цьому останні можуть проявлятися двояко: у вигляді звичайних похибок заокруглення при стійких розв'язках, а також у вигляді нестабільності отримуваних розв'язків [4]. Очевидно, що другий фактор є дуже небезпечний, оскільки може призвести до неправильного знаходження Якобіана і, значить, – до неправильного розв'язування оберненої задачі.

Першу складову можна зменшувати, зменшуючи прирости аргументів – приріст опору  $\Delta R$  елементів. При цьому, внаслідок числових похибок розрахунку близьких між собою двох значень функцій  $\tilde{U}_i(R_j)$ ,  $\tilde{U}_i(R_j + \Delta R)$  можуть виникати недопустимо великі похибки розрахунку елементів матриці Якобі. Тому за рекомендацією [4] приріст зміни опору має бути пропорційним до значення опору апроксимаційного елемента і квадратного (і навіть кубічного) кореня з так званого машинного нуля  $m_{eps}$ , який однозначно визначається розрядністю виконуваних операцій у комп'ютері

$$\Delta R = R \cdot \left( \sqrt{m_{eps}} \dots \sqrt[3]{m_{eps}} \right). \quad (2)$$

Зокрема, при 16-розрядному (десятковому) представленні чисел в комп'ютері  $m_{eps} = 10^{-16}$ , і відносна похибка знаходження якобіана орієнтовно становить  $\sqrt[3]{10^{-16}} \approx 10^{-5}$ . Тобто значення якобіана мають у кращому вигляді приблизно п'ять правильних значущих цифр.

Невисока точність знаходження Якобіана стає причиною погіршення точності розв'язування оберненої задачі, а крім того, погіршення її збіжності [4].

Що ж стосується похибок розрахунку значень електродних величин  $\tilde{U}_i(R_j)$ ,  $\tilde{U}_i(R_j + \Delta R)$ , то, як було вже зазначено, найнебезпечнішою є нестабільність розв'язування системи рівнянь, що описує апроксимацію електричного поля всередині об'єкта. За умови поганої зумовленості необхідно або змінити методику розв'язування польової задачі, або застосувати регуляризацію. При цьому останню застосовують як крайній засіб, за умови, що ніякі інші заходи не дають позитивного ефекту.

Важливим також є обсяг обчислювальних затрат для знаходження Якобіана. На практиці кожному апроксимаційному елементу надають приріст і розв'язують пряму задачу для знаходження всіх величин  $\tilde{U}_i(R_j)$ ,  $\tilde{U}_i(R_j + \Delta R)$ , при всіх можливих ракурсах збудження об'єкта. Тобто загалом кількість розв'язувань прямої задачі дорівнює кількості апроксимаційних елементів. Одне розв'язування прямої задачі вимагає кількості операцій, яка пропорційна до куба від кількості невідомих (вузлових потенціалів чи контурних струмів еквівалентної схеми електричної апроксимації). Тому навіть за сучасної швидкодії обчислювальних засобів виникають проблеми реалізації у реальному масштабі часу алгоритмів, особливо при великій кількості апроксимаційних елементів, що є передумовою високої точності вимірювальної томографії.

Потім розглядається спосіб "точного" обчислення Якобіана, який не містить методичної похибки наближеного обчислення похідних і, крім того, реалізується шляхом лише одноразового розв'язування прямої задачі.

### Мета роботи

З огляду на вищенаведене, метою статті є розробка методу підвищення точності і швидкості розрахунку якобіана при апроксимації досліджуваного середовища трикутними скінченними елементами.

### Прямий метод обчислення Якобіана без методичної похибки

Спосіб ґрунтується на використанні теореми варіацій з електротехніки [5]. Природною для задач електричної томографії є апроксимація методом скінченних елементів (МСЕ). Вона полягає у просторовій дискретизації досліджуваного середовища трикутними, чотирикутними чи іншими елементами з відповідною апроксимацією електричного поля та провідності на них. У [6] показано, що кожному такому елементу МСЕ у відповідь можна поставити еквівалентну у всіх відношеннях схему із зосереджених елементів, наприклад, резисторів (рис. 1, а, б), а в складніших випадках – комплексних елементів. Використовуючи такі заступні схеми, кожен апроксимацію МСЕ можна зобразити відповідною сіткою. Завдяки цьому задачу знаходження реакції об'єкта на його зовнішнє електричне збудження можна звести до лінійної задачі теоретичної електротехніки [6, 7].

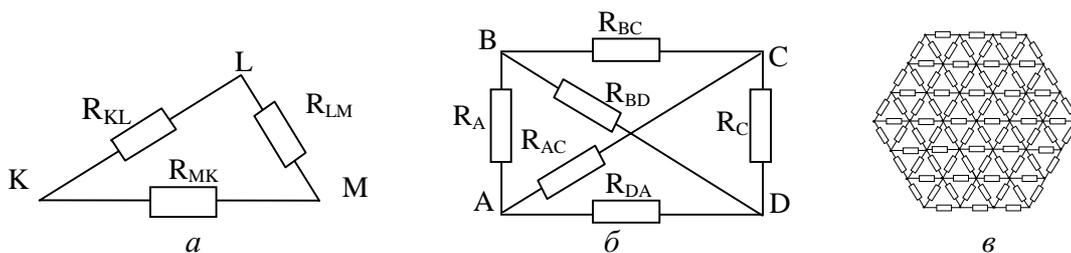


Рис. 1. Заступні електричні схеми апроксимації МСЕ трикутного (а) та прямокутного (б) елементів та регулярної апроксимації зі 54 елементів (в)

У такому випадку задача знаходження одного елемента Якобіана з електротехнічного погляду полягає у тому, що об'єкт в позиції  $k$ -ї зовнішньої вітки (рис. 2) збуджують джерелом струму  $I_0$  і знаходять приріст спаду напруги  $\Delta U_i = R_i \Delta I_i$  на  $i$ -й вітці (для практичних вимірювань вмикають вольтметр) відносно зміни опору  $\Delta R_j$   $j$ -ї вітки

$$J_{ij(k)} = \lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i(I_{0,k})}{\Delta R_j} \quad (3)$$

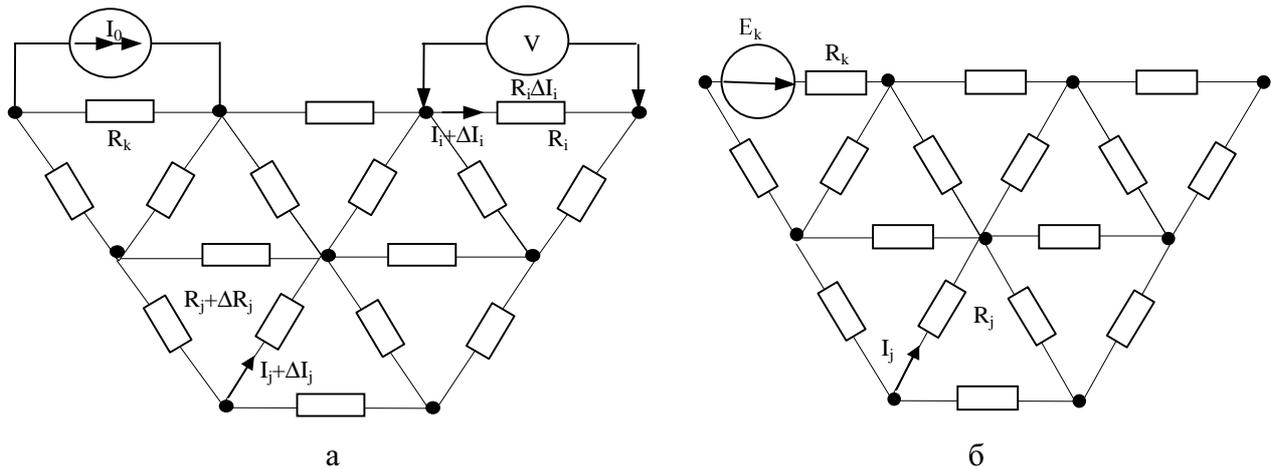


Рис. 2. До визначення коефіцієнта чутливості (а) та взаємної провідності (б)

Згідно з теоремою варіацій [5] при зміні опору  $\Delta R_j$   $j$ -ї вітки (рис. 2, а), у якій протікає струм  $I_j$ , зміни струму  $\Delta I_i$  у  $i$ -й та  $\Delta I_j$  у  $j$ -й вітці можна знайти згідно з виразами

$$\Delta I_i = -\frac{g_{ij} \Delta R_j I_j}{1 + g_{jj} \Delta R_j}; \quad \Delta I_j = -\frac{g_{jj} \Delta R_j I_j}{1 + g_{jj} \Delta R_j} \quad (4)$$

де

$$g_{ij} = \frac{I_i}{E_j} = \frac{I_j}{E_i}; \quad g_{jj} = \frac{I_j}{E_j} \quad (5)$$

– взаємна та власна провідність  $i$ -ї та  $j$ -ї віток [5] (рис. 2, б).

Зміна струму  $\Delta I_i$  у  $i$ -й вітці спричиняє зміну спаду напруги  $\Delta U_i$  на резисторі  $R_i$ , значення якої на основі (4) становить

$$\Delta U_i = \Delta I_i R_i = -\frac{g_{ij} \Delta R_j I_j R_i}{1 + g_{jj} \Delta R_j}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) у (3) і знайшовши границю при  $\Delta R_j \rightarrow 0$ , отримаємо відповідне значення коефіцієнта матриці Якобі

$$J_{ij(k)} = \lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta R_j} = -\lim_{\Delta R_j \rightarrow 0} \frac{g_{ij} \Delta R_j I_j R_i}{(1 + g_{jj} \Delta R_j) \Delta R_j} = -g_{ij} I_j R_i. \quad (7)$$

Використовуючи означення (5) взаємної провідності  $g_{kj}$  між  $k$ -ю та  $j$ -ю вітками, значення струму у  $j$ -й вітці можемо виразити через значення ЕРС.  $E_k$  у  $k$ -й (зовнішній) вітці (рис. 2, б)  $I_j = E_k g_{kj}$ . В електричній томографії для збудження та вимірювань доступна тільки зовнішня частина об'єкта, на якій розміщені зовнішні електроди, з якими своєю чергою зазвичай суміщають вузли електричної апроксимації (апроксимаційної сітки). При

цьому об'єкт переважно зондується від джерела струму  $I_0$ , яке прикладається до  $k$ -ї (зовнішньої) вітки. Тому, здійснюючи заміну джерела ЕРС на джерело струму  $E_k = I_0 R_k$ , отримаємо значення вищевказаного струму у  $j$ -й вітці струму  $I_j = I_0 R_k g_{kj}$ . Після підстановки цього значення у (7) отримаємо вираз для розрахунку елементів матриці Якобі

$$J_{ij(k)} = -I_0 g_{ij} g_{jk} R_k R_i. \quad (8)$$

Аналізуючи вираз (8), бачимо, що при сталому збуджуючому струмі  $I_0$  коефіцієнти матриці Якобі визначаються винятково значеннями параметрів (взаємних провідностей та опорів) апроксимаційної схеми, а значить, лише просторовим розподілом шуканої провідності, що цілком відповідає фізичній суті електричної томографії.

### **Загальне оцінювання ефективності знаходження Якобіана запропонованим способом**

Повертаючись до виразів (7) та (8) бачимо, що, оскільки значення приросту опору  $\Delta R_j$   $j$ -го елемента апроксимаційної схеми не входить у вираз для розрахунку значень елементів  $J_{ij(k)}$  Якобіана, то, використовуючи запропонований спосіб їх можна обчислити без методичної похибки. Тобто у цьому сенсі отримуваний Якобіан є точним.

З іншого боку, оскільки довільні  $k$ -та та  $i$ -та вітки належать лише зовнішньому контуру апроксимаційної схеми, то для знаходження всього Якобіана не потрібно мати значення взаємних провідностей всіх віток, для цього достатньо мати значення взаємних провідностей віток лише зовнішнього контуру зі всіма решта вітками. Завдяки цьому всі необхідні взаємні провідності (між зовнішніми та внутрішніми вітками) можна знайти одноразовим розв'язуванням прямої задачі електричної томографії, враховуючи всі положення джерела зондуючого струму на зовнішньому контурі апроксимаційної схеми.

Оскільки кількість зовнішніх віток апроксимаційної сітки є значно меншою за загальну кількість віток, то отримуємо значну економію в обчислювальних затратах на розрахунок Якобіана.

### **Висновки**

1. Запропонований метод забезпечує розрахунок матриці Якобі задачі електричної томографії без методичних похибок, притаманних скінченно-різницеvim методам.
2. Шукана матриця Якобі обчислюється під час одноразового розв'язування прямої задачі, завдяки чому існує суттєва економія необхідних для цього обчислювальних затрат.

1. Дорожовець М.М. Математичні проблеми реконструкції образів в технічній томографії // *Вимірювальна техніка та метрологія*. – Львів, 1998. – № 53. – С. 3–18.
2. Дорожовець М. Дослідження властивостей нелінійних залежностей, які описують обернену задачу електричної томографії // *Вимірювальна техніка та метрологія*. – Львів, 2001. – № 58. – С. 16–19.
3. Sikora J. Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowadowej. – Warszawa, 2000. – 212 s.
4. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. – М., 1988. – 340 с.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М., 1961. – 792 с.
6. Дорожовець М., Ковальчик А. Характеристична матриця трикутного скінченного елемента при лінійній апроксимації провідності та параболічній апроксимації потенціалу // *Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка"*. – 2001. – № 408. – С. 32–39.
7. Дорожовець М.М. Порівняльний аналіз розв'язування задачі томографії електричної провідності методами вузлових потенціалів та контурних струмів // *Відбір і передача інформації*. – 2002. – № 17. – С. 47–52.