УДК 393.3

В.П. Ревенко
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача

РОЗРАХУНОК ПРУЖНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРІВ

Отримано представлення рівнянь Ламе для осесиметричної задачі у випадку довільних об'ємних сил через взаємно не зв'язані дві функції. Знайдений точний явний розв'язок рівнянь Ламе для лінійного розподілу радіальних навантажень на боковій поверхні. Запропонована методика розрахунку товстостінного циліндра при кусково-лінійних навантаженях на боковій поверхні.

У будівництві часто використовують циліндричні елементи конструкцій як тонкостінні, так і товстостінні під дією різноманітних навантажень. Розрахунок таких конструкцій досить складний, а методики розрахунку у випадку, коли конструкція навантажена складним навантаженням, розроблені недостатньо [1].

У цій роботі розглядається товстостінний циліндр: внутрішній радіус – R_1, зовнішній – R_2, довжина – L. Введемо циліндричну систему координат (r, θ, x), вісь x збігається з центром симетрії циліндра, переміщення позначимо відповідно w, v, u. Початок координат сумістимо з нижньою основою. Циліндр нагружений довільними осесиметричними об'ємними силами та поверхневими навантаженнями, так що переміщення w, u не залежать від кута повороту θ, а переміщення v дорівнює нулю. Розв'язуванню такої осесиметричної задачі теорії пружності присвячена велика кількість досліджень [1, 2, 3]. Рівняння Ламе в переміщеннях у цьому випадку можна представити [1, 2] у вигляді

$$\nabla^2 w + \chi \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w + \frac{V_r}{G} = 0, \quad \nabla^2 u + \chi \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{V_x}{G} = 0, \tag{1}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $e = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + \frac{\partial u}{\partial x}$, $\chi = \frac{1}{1-2\nu}$, G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; V_r, V_x – компоненти об'ємних сил. Введемо функції переміщень $\Phi(x,r)$, $\Psi(x,r)$ так [2]:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2}$$

Підставимо представлення (2) у систему рівнянь (1), після нескладних перетворень отримаємо

$$(\chi + 1)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2(\Phi + \Psi) - 2\chi \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial r} + \frac{V_r}{G} = 0,$$

$$(\chi + 1)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \Phi + (\chi - 1)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \Psi - 2\chi \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{V_x}{G} = 0. \tag{3}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи (3) по змінній x, а друге – по змінній r і віднімимо їх, після спрощень отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial r}\nabla^2\Psi = \frac{1}{2G}\left\{\frac{\partial}{\partial r}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_r\right\};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial r}\nabla^2\Phi = \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^3 \partial r} - \frac{1}{2G}\left\{\frac{\partial}{\partial r}V_x - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}V_r\right\}. \tag{4}$$

Система рівнянь (3), (4) описує пружно-деформований стан (ПДС) циліндричних елементів конструкцій під дією об'ємних сил через дві функції. Використавши співвідношення (2) і вираз деформацій [1, с. 45], отримаємо представлення напружень у вигляді

$$\sigma_r = \lambda e + 2G\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Phi + \Psi); \quad \sigma_x = \lambda e + 2G\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi - \Psi);$$

$$\sigma_\theta = \lambda e + \frac{2G}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\Phi + \Psi); \qquad \tau_{rx} = 2G\frac{\partial^2}{\partial r \partial x}\Phi, \tag{5}$$

де $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $e = \nabla^2(\Phi+\Psi) - 2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi$, E – модуль Юнга. Представлення (4), (5) дають змогу знайти ПДС циліндричних тіл точно в межах тривимірної теорії пружності. Це представлення дало можливість знайти, вперше, точні розв'язки для деяких навантажень. Для прикладу знайдемо ПДС циліндричного резервуару, заповненого рідиною (питома вага γ) на висоту H. Для цього випадку навантаження, граничні умови у напруженнях треба задати у вигляді

$$\textit{при } r = R_1 \quad \tau_{rx} = 0, \quad \sigma_r = \gamma(x - H)\,\textit{коли } x \le H, \sigma_r = 0\,\textit{ коли } x \ge H;$$

$$r = R_2 \quad \sigma_r = 0, \ \tau_{rx} = 0; \quad x = 0, x = L \ - \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{rx} = 0, \tag{6}$$

Це навантаження ми будемо називати $F_H^+(\gamma)$, а коли зовнішнє навантаження дорівнює $\sigma_r = -\gamma(x-H)$ *при* $x \ge H$, $\sigma_r = 0$ *при* $x \le H$, то таке навантаження будемо називати $F_H^-(\gamma)$. Підстановкою можна перевірити, що, якщо вибрати функції переміщення у вигляді

$$\begin{aligned}&\Psi(x,r) = (x-H)\left(\frac{c}{4}r^2 + a\ln r\right) + \frac{\nu}{6(1-\nu)}c(x-H)^3, \textit{коли } 0 \le x \le H\\ &\Psi(x,r) = 0, \textit{коли } H \le x \le L; \quad \Phi(x,r) = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$c = \frac{-2(1-\nu)\gamma R_1^2}{E\left(R_2^2 - R_1^2\right)}, \quad a = \frac{(1+\nu)R_2^2 c}{2(1-\nu)},$$

то задовольнятимуться співвідношення (3), (4), рівняння Ламе (1), а також граничні умови (6). Отже, ми отримали точний розв'язок в межах теорії пружності. Для навантаження $F_H^-(\gamma)$ функції переміщення будуть мати, враховуючи симетричність навантаження, такий вигляд:

$$\begin{aligned}&\Psi(x,r) = -(x-H)\left(\frac{c}{4}r^2 + a\ln r\right) - \frac{\nu}{6(1-\nu)}c(x-H)^3, \textit{коли } H \le x \le L\\ &\Psi(x,r) = 0, \textit{коли } 0 \le x \le H; \quad \Phi(x,r) = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

Знаючи вираз функцій напружень (7), за формулами (2) знаходимо переміщення, а за формулами (5) – напруження. При такому навантажені найбільшими за значеннями будуть тангенціальні напруження σ_θ, які дорівнюють $\sigma_\theta = \left(\frac{c}{2(1-\nu)} + \frac{a}{(1+\nu) r^2} \right) Ex$. Легко побачити, що максимальне значення тангенціальні напруження набувають при $r = R_1$ і дорівнюють

$$\sigma_\theta = \gamma \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} x . \tag{9}$$

Для циліндричної оболонки напруження (9) представимо у вигляді

$$\sigma_\theta = \gamma x \left(\frac{R}{h} - \frac{h}{4R} \right), \tag{10}$$

де $h = R_2 - R_1, \quad R = \frac{R_2 + R_1}{2}$. Формула (10) зручна для розрахунку оболонок.

Розрахунок ПДС товстостінного циліндра під дією внутрішнього тиску наведено в [3], для цього випадку функції переміщення мають вигляд

$$\Psi(x,r) = \frac{b}{2} x^2 + \varphi(r), \quad \Phi(x,r) + \varphi(r) = d \ln(r) + \frac{f}{4} r^2 , \tag{11}$$

де $d = -\frac{p_0 (1+\nu) R_2^2 R_1^2}{E\left(R_2^2 - R_1^2\right)}, \quad f = \frac{2(1-\nu) d}{(1+\nu) R_2^2}, \quad b = \frac{\nu}{1-\nu} f, \quad p_0$ – заданий внутрішній тиск.

Компонуючи функції переміщень (7), (8), (11), можемо розраховувати різноманітні зовнішні навантаження. Наприклад, зовнішнє навантаження у вигляді рівнобедренного трикутника з вершиною посередині циліндра

$$\sigma_r = \gamma (x - L), \quad \frac{L}{2} \le x \le L; \quad \sigma_r = -\gamma x, \quad 0 \le x \le \frac{L}{2} \quad \textit{при} \quad r = R_1 \quad \tau_{rx} = 0 .$$

Таке навантаження задається комбінацією двох функцій $F_L^+(\gamma)$ + $F_{\frac{L}{2}}^+(-2\gamma)$ і відповідно функції переміщень мають вигляд

$$\begin{gathered} \Psi(x,r) = (x-L)\left(\frac{c}{4} r^2 + a \ln r \right) + \frac{\nu}{6(1-\nu)} c (x-L)^3, \textit{коли } \frac{L}{2} \le x \le L \\ \Psi(x,r) = -x\left(\frac{c}{4} r^2 + a \ln r \right) + \frac{\nu}{6(1-\nu)} c\left((x-L)^3 - 2(x - L/2)^3\right), \textit{коли } L/2 \le x \le L \\ \Phi(x,r) = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{gathered} \tag{12}$$

Тут значення коефіцієнтів a, c такі ж, як у формулі (7). Використовуючи формули (12), легко визначити за співвідношеннями (2), (5) переміщення і напруження в будь-якій точці товстостінного циліндра.

1. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндричесмких тел. – М., 1975. – 526 с. 2. LoveA.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. – London, 1944. – 487 p. 3. ТимошенкоС.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975. – 576 с.