

формула позбавлена зайвих коефіцієнтів і зручніша в користуванні, а запропонована розрахункова схема відповідає граничним умовам задачі.

1. Лучко Й.Й., Чубріков В.М., Лазар В.Ф. Міцність, тріщиностійкість і довговічність бетонних та залізобетонних конструкцій на засадах механіки руйнування / НАН України Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка. – Львів, 1999. – 348 с. 2. Дмитриев С.А., Мулин Н.М., Артемьев В.П. Исследование прочности, трещиностойкости и жесткости балок с арматурой из стали 30ХГ2С // Исследование по теории железобетона. – М., 1960. – Вып. 17. – С. 32–67. 3. Лучко И.И. Несущая способность, трещиностойкость и деформативность изгибаемых железобетонных элементов из мелкозернистых бетонов // Несущая способность и деформативность железобетонных конструкций. – К., 1978. – С. 42–51. 4. Папу В.Н. Исследование прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов из бетонополимера // Новые исследования по технологии, расчёту и конструированию железобетонных конструкций. – М., 1980. – С. 118–122. 5. Михайлов К.В., Цай Шао-Хуай. Исследование семипроволочных прядей как арматуры предвательно напряженных железобетонных конструкций // Исследование по теории железа. – М., 1960. – Вып. 17. – С. 81–118.

УДК 517.947

Т.Л. Мартинович, Б.Т. Мартинович, О.В. Лобова  
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра БМ

## ГАРМОНІЙНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПРЯМОЛІНІЙНО-ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ, ЗАТИСНУТОЇ ПО ВСЬОМУ ПЕРИМЕТРУ

© Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т., Лобова О.В., 2002

**Побудовано повний однозначний розв’язок однорідного рівняння амплітуд в прямокутній області  $a \times b$  для некратних коренів відповідних характеристичних рівнянь. Докладно розглянуто власні коливання ортотропної прямокутної пластини, затиснутої по усьому контуру. Отримано формулу циклічної частоти і трансцендентні рівняння власних частот коливання пластини в напрямках координатних осей для випадку симетричних і косиметричних головних форм.**

### Диференціальні рівняння коливань пластин і відповідні їм рівняння амплітуд (форм коливань)

Розглянемо прямокутну прямолінійно-ортотропну пластину, головні напрямки пружності якої паралельні сторонам  $a$  і  $b$  і яка затиснута по усьому периметру  $L \equiv 2(a + b)$  та віднесена до головної центральної системи координат  $xOy$  (див. рисунок).

Розв’язок динамічного рівняння гармонійного коливання ортотропної пластини

$$\sum_{j=0,2,\dots}^4 a_j \frac{\partial^4 W^{(2)}(x, y; t)}{\partial x^{4-j} \partial y^j} + m \frac{\partial^2 W^{(2)}(x, y; t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

пропонується шукати у формі добутку двох функцій [1–3]:

$$W_{mn}^{(2)}(x, y; t) = W_{mn}^{(2)}(x, y) \cdot T_{mn}(t), \quad (1.2)$$

де

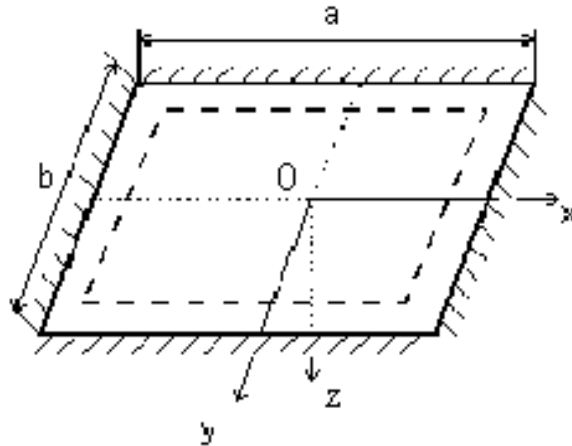
$$T_{mn}(t) = a_{mn} \sin(P_{mn} t + \varphi_{mn}); \quad (1.3)$$

амплітуда  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  функції  $W_{mn}^{(2)}(x, y; t)$  виразу (1.2) є розв'язком статичного рівняння:

$$\sum_{j=0,2,\dots}^4 a_j \frac{\partial^4 W_{mn}^{(2)}(x, y)}{\partial x^{4-j} \partial y^j} - P_{mn}^2 \bar{m} W_{mn}^{(2)}(x, y) = 0; \quad (1.4)$$

$$(x, y \in a \times b, \quad a_j = \text{const}, \quad \bar{m} = \text{const});$$

де  $\bar{m} = \gamma h / g$  – питома маса пластини;  $P_{mn}$  – циклічна (колова) частота власних коливань;  $m, n$  – натуральні числа.



Прямокутна прямолінійно-ортотропна пластинка

Однозначні часткові розв'язки (амплітуди)  $W_{mn}^{*(2)}(x, y)$  і  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  однорідного рівняння (1.4) повинні задовольняти вздовж периметра  $L \equiv 2(a + b)$  пластини однорідні крайові умови (див. рисунок):

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a/2: \quad & W_{mn}^{*(2)}(x, y) = 0, \quad \partial W_{mn}^{*(2)} / \partial x = 0, \\ \text{при } y = \pm b/2: \quad & W_{mn}^{*(2)}(x, y) = 0, \quad \partial W_{mn}^{*(2)} / \partial y = 0; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a/2: \quad & W_{mn}^{(2)}(x, y) = 0, \quad \partial W_{mn}^{(2)} / \partial x = 0, \\ \text{при } y = \pm b/2: \quad & W_{mn}^{(2)}(x, y) = 0, \quad \partial W_{mn}^{(2)} / \partial y = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

### Симетричні форми власних коливань пластини в напрямках, паралельних координатним осям $x$ і $y$

Парні складові амплітуд  $W_{mn}^{*(2)}(x, y)$  і  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  однорідного рівняння (1.4) зображаються виразами [2, 3]:

$$W_{(II)mn}^{*(2)}(x, y) = \text{ch}(s_{mn}^* y) \cdot \left[ A_{mn}^* \text{ch}(s_{mn} x) + C_{mn}^* \cos(s_{mn} r_{mn} x) \right], \quad (2.1)$$

$$W_{(II)mn}^{(2)}(x, y) = \text{ch}(s_{mn} x) \cdot \left[ A_{mn} \text{ch}(s_{mn}^* y) + C_{mn} \cos(s_{mn}^* r_{mn}^* y) \right]. \quad (2.2)$$

де

$$r_{mn} = \sqrt{1 + \delta_{mn}^2 a_{2/0}}, \quad r_{mn}^* = \sqrt{1 + \delta_{mn}^{*2} a_{2/4}}, \quad \delta_{mn} \delta_{mn}^* = 1; \quad (2.3)$$

$$\delta_{mn}^2 = (s_{mn}^* / s_{mn})^2, \quad \delta_{mn}^{*2} = (s_{mn} / s_{mn}^*)^2, \quad a_{2/0} = a_2 / a_0, \quad a_{2/4} = a_2 / a_4.$$

Якщо підставити вирази (2.1), (2.2) у крайові умови (1.5), (1.6), то після належних перетворень отримаємо трансцендентні рівняння власних частот коливання пластини у напрямках координатних осей  $x$  і  $y$  в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(s_{mn} a / 2) \cdot \cos \lambda_m \cdot \left[ r_{mn} \cdot \operatorname{tg} \lambda_m + \operatorname{th}(s_{mn} a / 2) \right] &= 0, \\ \operatorname{ch}(s_{mn}^* b / 2) \cdot \cos \lambda_n^* \cdot \left[ r_{mn}^* \cdot \operatorname{tg} \lambda_n^* + \operatorname{th}(s_{mn}^* b / 2) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

де

$$\lambda_m = s_{mn} r_{mn} a / 2, \quad \lambda_n^* = s_{mn}^* r_{mn}^* b / 2. \quad (2.5)$$

При  $\cos \lambda_m \neq 0$ ,  $\cos \lambda_n^* \neq 0$  рівняння власних частот (2.4) коливання пластини, затиснутої по усьому прямокутному периметру, набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} r_{mn} \cdot \operatorname{tg} \lambda_m + \operatorname{th}(s_{mn} a / 2) &= 0, \\ r_{mn}^* \cdot \operatorname{tg} \lambda_n^* + \operatorname{th}(s_{mn}^* b / 2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Якщо множники у квадратних дужках в (2.4) відмінні від нуля, то дістанемо рівняння власних частот коливання пластини, опертої по усьому контуру:

$$\cos \lambda_m = 0, \quad \cos \lambda_n^* = 0. \quad (2.7)$$

Циклічна частота  $P_{mn}$  ортотропної прямокутної пластини обчислюється за формулою [2, 3]

$$P_{mn} = s_{mn} s_{mn}^* \cdot \sqrt{a_{0/2} \delta_{mn}^{*2} + 1 + a_{4/2} \delta_{mn}^2} \cdot \sqrt{a_2 / m}. \quad (2.8)$$

З виразів (2.3) випливають рівності:

$$\begin{aligned} s_{mn}^2 r_{mn}^2 &= s_{mn}^2 + s_{mn}^{*2} a_{2/0}, \\ s_{mn}^{*2} r_{mn}^{*2} &= s_{mn}^2 + s_{mn}^2 a_{2/4}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.9), одержимо

$$s_{mn} = \pm \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a_{2/0} \lambda_n^{*2} - \alpha^2 \lambda_m^2}{\alpha^2 (a_{2/4} a_{2/0} - 1)}} > 0, \quad s_{mn}^* = \pm \frac{2}{b} \sqrt{\frac{a_{2/4} \alpha^2 \lambda_m^2 - \lambda_n^{*2}}{(a_{2/4} a_{2/0} - 1)}} > 0. \quad (2.10)$$

де  $\alpha = b/a$ ,  $b = \alpha a$ ,  $a_{2/4} a_{2/0} - 1 > 0$ .

Скориставшись формулами (2.10), дістанемо

$$\delta_{mn}^2 = \frac{a_{2/4} \alpha^2 \lambda_m^2 - \lambda_n^{*2}}{a_{2/0} \lambda_n^{*2} - \alpha^2 \lambda_m^2} > 0, \quad \delta_{mn}^{*2} = \frac{a_{2/0} \lambda_n^{*2} - \alpha^2 \lambda_m^2}{a_{2/4} \alpha^2 \lambda_m^2 - \lambda_n^{*2}} > 0. \quad (2.11)$$

Внесемо величини  $\delta_{mn}^2$  і  $\delta_{mn}^{*2}$  (2.11) у формули (2.3), і знайдемо:

$$r_{mn} = \lambda_m \sqrt{\frac{\alpha^2 (a_{2/4} a_{2/0} - 1)}{a_{2/0} \lambda_n^{*2} - \alpha^2 \lambda_m^2}} > 0, \quad r_{mn}^* = \lambda_n^* \sqrt{\frac{a_{2/4} a_{2/0} - 1}{a_{2/4} \alpha^2 \lambda_m^2 - \lambda_n^{*2}}} > 0. \quad (2.12)$$

Формула для циклічної частоти (2.8) з врахуванням виразів (2.10), (2.11) набуде такого вигляду:

$$P_{mn} = \frac{4}{\alpha ab(a_{2/4}a_{2/0} - 1)} \sqrt{a_{4/2}\lambda_n^{*4} + (a_{2/4}a_{2/0} - 3)\alpha^2\lambda_m^2\lambda_n^{*2} + a_{0/2}\alpha^4\lambda_m^4} \sqrt{a_{2/m}}, \quad (2.13)$$

де  $\alpha = b/a$ ,  $a_{2/4}a_{2/0} - 1 > 0$ ;  $m, n$  – натуральні числа.

Тут  $\lambda_m$  і  $\lambda_n^*$  позначають нулі (корені) трансцендентних рівнянь власних частот (2.6).

З виразів (2.5) знаходимо:

$$s_{mn}r_{mn} = 2/a\lambda_m, \quad s_{mn}^*r_{mn}^* = 2/b\lambda_n^*. \quad (2.14)$$

Якщо внести вирази (2.14) у формули (2.1) і (2.2), дістанемо зображення симетричних форм (амплітуд) головних коливань прямокутної пластини у напрямках координатних осей  $x$  і  $y$  (див. рисунок):

$$\begin{aligned} W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x, y) &= \text{ch}(s_{mn}^*y) \cdot \left[ A_{mn}^* \text{ch}(s_{mn}x) + C_{mn}^* \cos(\lambda_m 2x/a) \right], \\ W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x, y) &= \text{ch}(s_{mn}x) \cdot \left[ A_{mn} \text{ch}(s_{mn}^*y) + C_{mn} \cos(\lambda_n^* \cdot 2y/b) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

де  $s_{mn}$  і  $s_{mn}^*$  позначають вирази (2.10).

Беручи до уваги, що для пластини, затиснутої по усьому периметру, маємо такі залежності:

$$A_{mn}^* = -C_{mn}^* \frac{\cos \lambda_m}{\text{ch}(s_{mn}a/2)}, \quad A_{mn} = -C_{mn} \frac{\cos \lambda_n^*}{\text{ch}(s_{mn}^*b/2)}, \quad (2.16)$$

а вирази амплітуд (2.15) з врахуванням умови  $W_{(\Pi)mn}^{(2)}(0,0) = W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(0,0)$  зведуться до вигляду:

$$\begin{aligned} W_{(\Pi)}^{*(2)}(x, y) &= C_{mn}^* \text{ch}(s_{mn}^*y) \cdot \left[ \cos(\lambda_m 2x/a) - \frac{\cos \lambda_m}{\text{ch}(s_{mn}a/2)} \text{ch}(s_{mn}x) \right], \\ W_{(\Pi)}^{(2)}(x, y) &= C_{mn}^* g_{mn} \text{ch}(s_{mn}x) \cdot \left[ \cos(\lambda_n^* 2y/b) - \frac{\cos \lambda_n^*}{\text{ch}(s_{mn}^*b/2)} \text{ch}(s_{mn}^*y) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

причому

$$C_{mn} = g_{mn} C_{mn}^*; \quad g_{mn} = \frac{\text{ch}(s_{mn}^*b/2) \cdot (\text{ch}(s_{mn}a/2) - \cos \lambda_m)}{\text{ch}(s_{mn}a/2) \cdot (\text{ch}(s_{mn}^*b/2) - \cos \lambda_n^*)}. \quad (2.18)$$

Поверхня амплітуд  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  над планом прямокутної області  $a \times b$  зображається сумою амплітуд (2.17) в напрямках, паралельних координатним осям  $x$  і  $y$ :

$$\begin{aligned} W_{(\Pi)}^{(2)}(x, y) &= C_{mn}^* \left[ \text{ch}(s_{mn}^*y) \cdot \left( \cos(\lambda_m 2x/a) - \frac{\cos \lambda_m}{\text{ch}(s_{mn}a/2)} \text{ch}(s_{mn}x) \right) + \right. \\ &\quad \left. + g_{mn} \text{ch}(s_{mn}x) \cdot \left( \cos(\lambda_n^* 2y/b) - \frac{\cos \lambda_n^*}{\text{ch}(s_{mn}^*b/2)} \text{ch}(s_{mn}^*y) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

де  $\lambda_m$  і  $\lambda_n^*$  позначають нулі (корені) рівняння частот (2.6).

Амплітуди (2.19) в точках прямокутного периметра  $L \equiv 2(a + b)$  дорівнюють нулю:

$$W_{(II)mn}^{(2)}(\pm a/2; \pm b/2) = 0. \quad (2.20)$$

### Кососиметричні форми власних коливань пластини в напрямках, паралельних координатним осям $x$ і $y$

Непарні складові амплітуд  $W_{mn}^{*(2)}(x, y)$  і  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  однорідного рівняння (1.4) подаються виразами [2]:

$$W_{(H)mn}^{*(2)}(x, y) = \text{sh}(s_{mn}^* y) \cdot [B_{mn}^* \text{sh}(s_{mn} x) + D_{mn}^* \sin(s_{mn} r_{mn} x)], \quad (3.1)$$

$$W_{(H)mn}^{(2)}(x, y) = \text{sh}(s_{mn} x) \cdot [B_{mn} \text{sh}(s_{mn}^* y) + D_{mn} \sin(s_{mn}^* r_{mn}^* y)], \quad (3.2)$$

де  $r_{mn}$ ,  $r_{mn}^*$ ,  $\delta_{mn}^2$ ,  $\delta_{mn}^{*2}$ ,  $s_{mn}$ ,  $s_{mn}^*$  позначають величини (2.3) і (2.10).

Якщо внести вирази (3.1), (3.2) в однорідні крайові умови (1.5) і (1.6) та виконати належні перетворення, одержимо трансцендентні рівняння власних частот коливання пластини у напрямках координатних осей  $x$  і  $y$  в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \text{sh}(s_{mn} a/2) \cdot \sin \lambda_m \cdot [r_{mn} \cdot \text{ctg} \lambda_m - \text{cth}(s_{mn} a/2)] &= 0, \\ \text{sh}(s_{mn}^* b/2) \cdot \sin \lambda_n^* \cdot [r_{mn}^* \cdot \text{ctg} \lambda_n^* - \text{cth}(s_{mn}^* b/2)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $\lambda_m$  і  $\lambda_n^*$  – безрозмірні вирази (2.5), а  $r_{mn}$ ,  $r_{mn}^*$  – вирази (2.12). При  $\sin \lambda_m \neq 0$ ,  $\sin \lambda_n^* \neq 0$  рівняння власних частот (3.3) коливання пластини, затиснутої по усьому прямокутному контуру, набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} r_{mn} \cdot \text{ctg} \lambda_m - \text{cth}(s_{mn} a/2) &= 0, \\ r_{mn}^* \cdot \text{ctg} \lambda_n^* - \text{cth}(s_{mn}^* b/2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Якщо множники у квадратних дужках (3.3) не дорівнюють нулю, отримаємо рівняння власних частот коливання пластини, опертої по усьому контуру:

$$\sin \lambda_m = 0, \quad \sin \lambda_n^* = 0. \quad (3.5)$$

Циклічна частота ортотропної пластини  $P_{mn}$  обчислюється за формулою (2.13), в якій літери  $\lambda_m$  і  $\lambda_n^*$  позначають нулі (корені) трансцендентних рівнянь власних частот (3.4).

Якщо внести вирази (2.14) у формули (3.1) і (3.2), отримаємо зображення кососиметричних форм (амплітуд) головних коливань прямокутної пластини у напрямках координатних осей  $x$  і  $y$  (див. рисунок):

$$\begin{aligned} W_{(H)mn}^{*(2)}(x, y) &= \text{sh}(s_{mn}^* y) \cdot [B_{mn}^* \text{sh}(s_{mn} x) + D_{mn}^* \sin(\lambda_m \cdot 2x/a)], \\ W_{(H)mn}^{(2)}(x, y) &= \text{sh}(s_{mn} x) \cdot [B_{mn} \text{sh}(s_{mn}^* y) + D_{mn} \sin(\lambda_n^* \cdot 2y/b)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

де  $s_{mn}$ ,  $s_{mn}^*$  позначають вирази (2.10).

Для пластини, затиснутої по усьому периметру, мають місце залежності:

$$B_{mn}^* = -D_{mn}^* \frac{\sin \lambda_m}{\text{sh}(s_{mn} a/2)}, \quad B_{mn} = -D_{mn} \frac{\sin \lambda_n^*}{\text{sh}(s_{mn}^* b/2)}. \quad (3.7)$$

Якщо внести значення коефіцієнтів  $B_{mn}^*$  і  $B_{mn}$  (3.7) у рівняння амплітуд (3.6), дістанемо:

$$\begin{aligned} W_{(H)mn}^{*(2)}(x, y) &= D_{mn}^* \operatorname{sh}(s_{mn}^* y) \cdot \left[ \sin(\lambda_m 2x/a) - \frac{\sin \lambda_m}{\operatorname{sh}(s_{mn}^* a/2)} \operatorname{sh}(s_{mn}^* x) \right], \\ W_{(H)mn}^{(2)}(x, y) &= D_{mn} \operatorname{sh}(s_{mn} x) \cdot \left[ \sin(\lambda_m^* 2y/b) - \frac{\sin \lambda_m^*}{\operatorname{sh}(s_{mn}^* b/2)} \operatorname{sh}(s_{mn}^* y) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

причому  $D_{mn} = D_{mn}^*$ .

Поверхня амплітуд  $W_{mn}^{(2)}(x, y)$  над планом прямокутної області  $a \times b$  зображається сумою амплітуд (3.8) в напрямках, паралельних координатним осям  $x$  і  $y$ :

$$\begin{aligned} W_{(H)mn}^{(2)}(x, y) &= D_{mn} \left[ \operatorname{sh}(s_{mn}^* y) \cdot \left( \sin(\lambda_m 2x/a) - \frac{\sin \lambda_m}{\operatorname{sh}(s_{mn}^* a/2)} \operatorname{sh}(s_{mn}^* x) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh}(s_{mn} x) \cdot \left( \sin(\lambda_m^* 2y/b) - \frac{\sin \lambda_m^*}{\operatorname{sh}(s_{mn}^* b/2)} \operatorname{sh}(s_{mn}^* y) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

де  $\lambda_m$  і  $\lambda_m^*$  позначають нулі (корені) рівняння частот (3.4).

Амплітуди (3.9) у точках прямокутного периметра  $L \equiv 2(a+b)$  дорівнюють нулю:

$$W_{mn}^{(2)}(\pm a/2; \pm b/2) = 0.$$

Коефіцієнти  $a_k$  ( $k = 0, 2, 4$ ) рівнянь (1.1), (1.4) позначають жорсткості  $D_{ij}$  прямо-лінійно-ортотропної пластини [1]:

$$a_0 \equiv D_{11}, \quad a_2 \equiv D_{33}, \quad a_4 \equiv D_{22}, \quad (3.10)$$

де  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  – жорсткості згину пластини довкола осей  $x$  і  $y$ ,  $D_{33} = D_{11} \nu_2 + 2D_k$ ,  $D_k = Gh^3/12$ .

Для ортотропної пластини побічні жорсткості  $a_1 \equiv 4D_{16}$ ,  $a_3 \equiv 4D_{26}$  дорівнюють нулю.

1. Лехницький С.Г. *Анизотропные пластинки*. – М., 1957. – 460 с. 2. Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т. Побудова аналітичного розв'язку рівняння амплітуд типу Гельмгольца у прямокутній області. – Львів, 1999. – 10 с. Укр. – Деп. в ДНТБ України 13.12.99, № 335 – Ук99. 3. Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т., Лобова О.В. Динамічне рівняння гармонійних коливань: алгоритм побудови розв'язку рівняння амплітуд в прямокутній області // Вісн. Львівського національного університету ім. І. Франка. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2000. – Вип.3. – С. 42–43.