

4. Вплив додаткового армування на зміну напруженого стану початково перевантажених елементів і недовантажених після встановлення додаткового армування.

Дослідження згинальних елементів на короткотривалі навантаження проводяться для визначення моментів тріщиноутворення та руйнування, деформацій стиснутої та розтягнутої зон і прогинів при початковому та додатковому армуванні, яке вводиться після дії експлуатаційного рівня навантаження (див. табл. 1, 2).

Проведені дослідження дають змогу перевірити теоретичні принципи оцінки напружено-деформованого стану згинальних залізобетонних елементів, в яких змінено армування та навантаження в процесі експлуатації, а також розробити практичні рекомендації щодо посилення згинальних елементів збільшенням армування при реконструкції будівель та споруд.

1. Яценко Е.А. та ін. *Теорія повзучості залізобетонних конструкцій*. – Дніпропетровськ, 2000. – С. 3–120. 2. Клименко Ф.Є. *Сталобетонні конструкції з зовнішнім полосовим армуванням*. – К., 1984. – С. 3–20.

УДК.539.3:620.012

Й.Й. Лучко, В.Ф. Лазар*

Фізико-механічний інститут ім. Карпенка НАН України,

*Мукачівський технологічний інститут

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ТА ОЦІНКА МІЦНОСТІ І ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ЗАСАДАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

© Лучко Й.Й., Лазар В.Ф., 2002

Розроблено методику оцінки міцності, тріщиностійкості залізобетонних балкових елементів на основі механіки руйнування. Запропоновано модель для розрахунку напружень і одержано формули для визначення нормальних напружень в арматурі і в стиснутих фібрах бетону, які враховують напружені зони в околі вершини тріщини. Встановлені залежності M_{cr} та M_u , які перевірялись експериментально, а також порівнювались за формулами СніП 2.03.01-84.

Актуальність

Виважені та достовірні методи прогнозу й оцінки міцності і надійності сучасних будівельних конструкцій і споруд при нинішньому бурхливому розвитку механіки руйнування немислимі без детального врахування засад цієї науки. Однак інженерна практика на етапі проектування та розробки як самих конструкційних матеріалів, так і конструкцій, виготовлених із них, ще є досить віддаленою від реального застосування навіть давно розроблених вітчизняними та зарубіжними вченими достовірних наукових методів прогнозу надійності довговічності будівельних споруд. Саме це часто стає причиною не тільки фатального їх руйнування, але й призводить до грандіозних катастроф. В той же час завершених дослідницьких робіт у цьому напрямку майже зовсім немає. Тому ця робота значною мірою ліквідує цей пробіл в області дослідження міцності і тріщиностійкості

залізобетонних балкових елементів конструкцій, і тому є актуальною, новою та практично необхідною як для проєктантів, будівельників, так і для вчених та інших спеціалістів цієї галузі науки.

Моделювання напружень у перерізі з тріщиною за наявності арматури

Розглянемо випадок, коли зона передруйнування або кінцева зона тріщини порівняно з висотою перерізу попереду тріщини настільки мала, що нею можна знехтувати, її поширення визначається критерієм лінійної механіки руйнування K_{Ic} , напруження у перерізі, описуються за допомогою виразу (6.1.4) у [1]. У переріз з тріщиною введемо стиснуту і розтягнуту арматуру (рис. 6.3), [1], яку будемо вважати рівномірною до розподілу за шириною перерізу. Складемо рівняння рівноваги відрізної частини балки на одиницю її товщини. У рівняння, крім зовнішніх сил і зусилля у бетоні, ввійдуть зусилля в стиснутій і розтягнутій арматурі.

Нижче розглянемо напружено-деформований стан залізобетонної балки в перерізі з тріщиною і з врахуванням непружних зон у її вершині та в стиснутих волокнах.

Напруження у перерізі з тріщиною за наявності арматури і непружних зон у вершині тріщини та у стиснутих волокнах

При певному рівні навантаження у крихких стиснутих волокнах проявляються непружні деформації і відбувається перерозподіл напружень. Проявляється стиснута непружна зона. Ззовні вона подібна до кінцевої зони тріщини. Вважатимемо, що така зона з'являється при досягненні напруженими балками призмової міцності бетону R_b . У подальшому навантаженні напруження у цій зоні залишаються постійними і не перевищують R_b . Тоді можна відмітити чотири стадії розвитку розподілу напружень (рис. 1):

1) дія перерізу близька до пружної, розподіл напружень описується залежністю, яка наведена в [1], у вершині тріщини існує особливість;

2) при певному рівні навантаження у вершині тріщини розвивається кінцева зона, розкриття тріщини у вершині дорівнює критичному, стиснута зона бетону діє у стадії близькій до пружної;

3) при подальшому збільшенні навантаження максимальне напруження у стиснутій зоні досягає призмової міцності бетону, розвиваються значні непружні деформації, виникає і розвивається непружна зона у стиснутій зоні бетону, відбувається перерозподіл напружень у цій зоні.

4) граничний стан у бетоні перерізу настає тоді, коли непружні розтягнута і стиснута зони зійдуться, несуча здатність перерізу по бетону вичерпалася і починається руйнування стиснутої зони бетону.

Об'єднуючи усі стани, маємо третій випадок розподілу, з якого можна одержати інші три, формально приймаючи той або інший параметр у перерізі такими, що дорівнюють нулю. Тому розглянемо детально третій випадок.

Запишемо рівняння рівноваги відрізаної частини балки

$$\sum X = 0; \quad - \int_0^{d_1} R_b dy - \int_{d_1}^{c-d} \sigma_b(y) dy + \int_{c-d}^c R_0 dy - \sigma_b(a') \frac{E_s A_s'}{E_b b} + \frac{\sigma_s A_s}{b} = 0;$$

$$\sum M = 0; \quad - \int_0^{d_1} R_b y dy - \int_{d_1}^{c-d} \sigma_b(y) y dy + \int_{c-d}^c R_0 dy - \sigma_b(a') \frac{E_s A_s'}{E_b b} + \frac{\sigma_s A_s h_0}{b} = \frac{M}{b}. \quad (1)$$

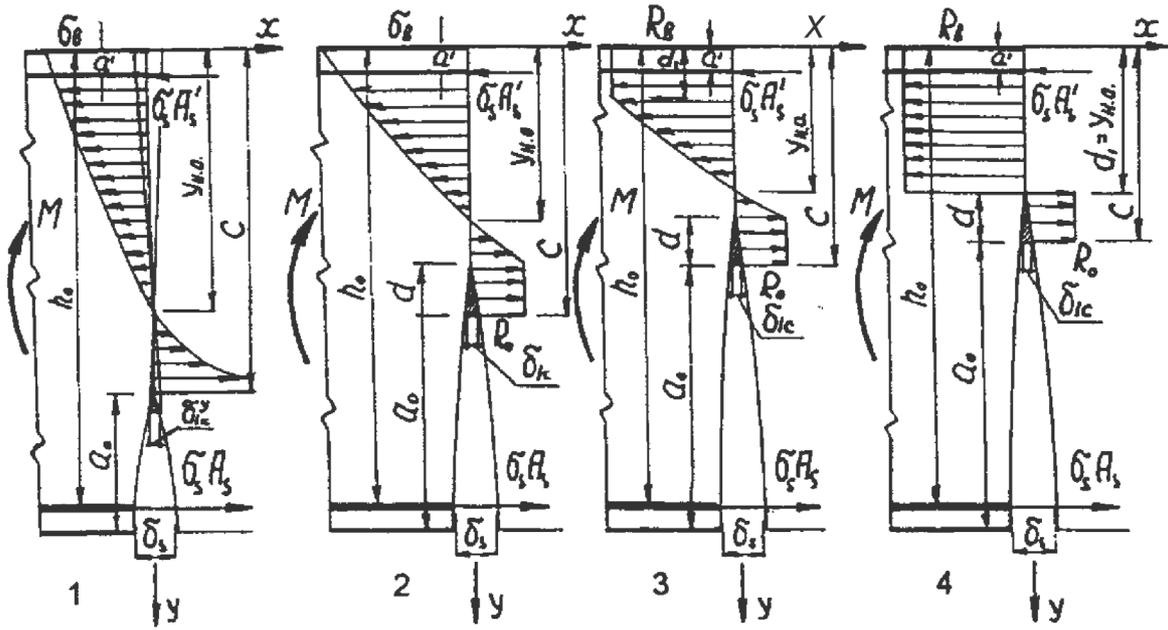


Рис. 1. Стадії зміни розподілу напружень у перерізі з тріщиною елемента, що згинаємо, за наявності арматури

Проінтегрувавши рівняння (1), одержимо систему рівнянь для визначення постійних A і A'

$$\begin{cases} -A\omega - 4A'\Phi = -\frac{\sigma_s A_s}{bc} + R_b n_1 - R_0 n; \\ A\Phi + 4A'\Delta = \frac{M}{bc^2} - \frac{\sigma_s A_s h_0}{bc^2} + R_b \frac{n_1^2}{2} - \frac{1}{2} R_0 (2n - n^2). \end{cases} \quad (2)$$

У (2) прийнято позначення

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{2n - n^2} - \sqrt{1 - n_1^2} - \frac{E_s A_s' a'}{E_b b c \sqrt{c^2 - a'^2}}; \quad n = d/c, n_1 = d_1/c_1; \\ \omega &= \arcsin(1 - n) - \arcsin n_1 + \frac{E_s A_s'}{E_b b \sqrt{c^2 - a'^2}}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [\arcsin(1 - n) - \arcsin n_1 + n_1 \sqrt{1 - n_1^2} - (1 - n) \sqrt{2n - n^2}] + \frac{E_s A_s' a'^2}{E_b c^2 b \sqrt{c^2 - a'^2}}.$$

З (2), підставивши у нього (3), одержимо

$$\begin{aligned} 4A' &= \frac{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) + bc^2 R_b n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) - bc^2 R_0 \left[n\Phi + \frac{1}{2} (2n - n^2) \omega \right]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}; \\ A &= \frac{M\Phi - \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) - bc^2 R_b n_1 \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right) + bc^2 R_0 \left[n\Delta + \frac{1}{2} (2n - n^2) \Phi \right]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Висота стиснутої зони перерізу або положення нульової осі

$$Y_{n.o.} = C \frac{-M\Phi + \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) - bc^2 R_b n_1 \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right) + bc^2 R_0 \left[n\Delta + \frac{1}{2} (2n - n^2) \Phi \right]}{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) + bc^2 R_b n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) - bc^2 R_0 \left[n\Phi + \frac{1}{2} (2n - n^2) \omega \right]}. \quad (5)$$

Щоб знайти глибину зони непружних деформацій як у стиснутій зоні, так і у вершині тріщини, враховують дві умови. На границі непружних деформацій стиснутої зони напруження дорівнюють R_b , на границі непружної розтягнутої зони – R_0 . Тоді отримаємо

$$R_b \sqrt{1 - n^2} = A - 4A'n_1; R_0 \sqrt{2n - n^2} = A - 4A'(1 - n). \quad (6)$$

Підставивши у (6) значення A і A' , одержимо систему

$$\begin{cases} M(\Phi + n_1\omega) - \sigma_s A_s h_0 \left[\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta + n_1 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) \right] + bc^2 R_b \times \left\{ n_1 \left[\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi + n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - n_1^2} (\Delta\omega - \Phi^2) \right\} - bc^2 R_0 \left[n(\Delta + n_1\Phi) + \frac{1}{2} (2n - n^2) (\Phi + n_1\omega) \right] = 0; \\ M[\Phi + (1 - n)\omega] - \sigma_s A_s h_0 \left[\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta + (1 - n) \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) \right] + bc^2 R_b n_1 \times \\ \times \left[\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi + (1 - n) \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) \right] - bc^2 R_0 \times \\ \times \left\{ n[\Delta + (1 - n)\Phi] + \frac{1}{2} (2n - n^2) \left[\Phi + (1 - n)\omega - \sqrt{2n - n^2} (\Delta\omega - \Phi^2) \right] \right\} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Використовуючи зв'язок між K_{1c} і δ_{1c} , згідно з δ_k -моделлю

$$K_{1c} = \sqrt{\pi c} (4A' - A); \delta_{1c}^n = \frac{K_{1c}^2 (1 - \nu^2)}{R_0 E_b}; \delta_k = S \delta_{1c}^n.$$

Критичне розкриття тріщини у вершині визначимо з функції нелінійності S . З виразу критичного розкриття визначимо напруження у розтягнутій зоні арматури.

$$\sigma_s = \frac{M(\omega + \Phi) + bc^2 R_b n_1 \left[\Phi + \Delta + \frac{n_1}{2} (\omega + \Phi) \right]}{A_s h_0 \left[\omega + \Phi + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]} - \frac{bc^2 R_0 \left[n(\Phi + \Delta) + \frac{1}{2} (2n - n^2) (\omega + \Phi) \right]}{A_s h_0 \left[\omega + \Phi + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]} - \frac{\left(\frac{\delta_k R_0 E_b}{S \pi c (1 - \nu^2)} \right)^{1/2} bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}{A_s h_0 \left[\omega + \Phi + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]}. \quad (8)$$

У залежності (6.3.13) [1] підставимо значення величини стиснутої зони із (5), одержимо рівняння

$$\begin{aligned}
 & c^3 \left| \alpha \delta_{1c} \left\{ b R_b n_1 \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right) - b R_0 \left[n \Delta + \frac{1}{2} (2n - n^2) \Phi \right] \right\} - \sigma_s \left\{ b R_b n_1 \left[\Phi + \Delta + \frac{n_1}{2} (\Phi + \omega) \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - b R_0 \left[n (\Delta + \Phi) + \frac{1}{2} (2n - n^2) (\Phi + \omega) \right] \right\} \right| + c^2 \left| \alpha \delta_{1c} \left\{ b h_0 R_b n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) - \sigma_s A_s \Delta - \right. \right. \\
 & \left. \left. - b R_0 \left[n \Phi + \frac{1}{2} (2n - n^2) \omega \right] \right\} + \sigma_s^2 A_s (\Phi + \Delta) \right| + c \left\{ \alpha \delta_{1c} (M \Phi - \sigma_s A_s h_0 \cdot 2 \Phi) - \right. \\
 & \left. - \sigma_s [M (\Phi + \omega) - \sigma_s A_s h_0 (\omega + \Phi)] \right\} + \alpha \delta_{1-} h_0 \omega (M - \sigma_s A_s h_0) = 0.
 \end{aligned} \quad (9)$$

У третє рівняння (7) і (9) входять три невідомих n, n_1, c . Величина σ_s підставляється із (8). Із системи трьох рівнянь можна знайти три невідомих n, n_1, c .

Найбільш вдалим спрощенням цієї задачі є нехтування розтягнутою зоною над тріщиною ($n = 0$). Як одну з умов використаємо критичний коефіцієнт напружень у вершині тріщин (13) [1]. Тоді (4) набуде вигляду

$$\begin{cases} 4A' = \frac{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) + bc^2 R_b n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right)}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}; \\ A = - \frac{M\Phi + \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) - bc^2 R_b n_1 \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right)}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}. \end{cases} \quad (10)$$

Вираз (5) запишеться так:

$$Y_{n.v.} = - \frac{M\Phi + \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) - bc^2 R_b n_1 \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right)}{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) + bc^2 R_b n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right)}. \quad (11)$$

З першої умови (6) одержимо таке рівняння:

$$\begin{aligned}
 & M (\Phi + n_1 \omega) - \sigma_s A_s h_0 \left[\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta + n_1 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) \right] + \\
 & + bc^2 R_b \left\{ n_1 \left[\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi + n_1 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) \right] - \sqrt{1 - n_1^2} (\Delta\omega - \Phi^2) \right\} = 0.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Підставивши у залежність (13) [1] значення A і A' із (10), одержимо після перетворення напруження в розтягнутій арматурі.

$$\sigma_s = \frac{M (\Phi + \omega) + bc^2 R_b n_1 \left[\Phi + \Delta + \frac{n_1}{2} (\Phi + \omega) \right]}{A_s h_0 \left[\Phi + \omega + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]} + \frac{\frac{bc^{3/2}}{\sqrt{\pi}} K_{1c} (\Delta\omega - \Phi^2)}{A_s h_0 \left[\Phi + \omega + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]}. \quad (13)$$

Із (6) одержимо рівняння

$$c^3 b R_b n_1 \left\{ \sigma_s \left[\Phi + \Delta + \frac{n_1}{2} (\omega + \Phi) \right] - \alpha \delta_{1c} \left(\Delta + \frac{n_1}{2} \Phi \right) \right\} - c^2 \left[\sigma_s^2 A_s (\Phi + \Delta) - \sigma_s A_s \alpha \delta_{1c} \Delta + b R_b n_1 \alpha \delta_{1c} h_0 \left(\Phi + \frac{n_1}{2} \omega \right) \right] + \quad (14)$$

$$+ c \{ M [\sigma_s (\Phi + \omega) - \alpha \delta_{1c} \Phi] - \sigma_s^2 A_s h_0 (\Phi + \omega) + \sigma_s A_s \alpha \delta_{1c} 2\Phi \} - \alpha \delta_{1c} h_0 \omega (M - \sigma_s A_s h_0) = 0.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (12) і (14), знаходимо невідомі, які до неї входять.

Виходячи із реального стану роботи перерізу, спочатку необхідно звернути увагу на розвиток непружної зони у розтягнутій зоні балки над тріщиною. У цьому випадку припускаємо, що ($n_1 = 0$) із (10). Одержимо

$$\left\{ \begin{array}{l} 4A' = \frac{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) - bc^2 R_0 n \left[\Phi + \frac{\omega}{2} (2-n) \right]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}; \\ A = \frac{-M\omega + \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) + bc^2 R_0 n \left[\Delta + \frac{\Phi}{2} (2-n) \right]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Висоту стиснутої зони бетону визначимо із (11):

$$Y_{n.v.} = c \frac{-M\Phi + \sigma_s A_s h_0 \left(\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta \right) + bc^2 R_0 n \left[\Delta + \frac{\Phi}{2} (2-n) \right]}{M\omega - \sigma_s A_s h_0 \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) - bc^2 R_0 n \left[\Phi + \frac{\omega}{2} (2-n) \right]}. \quad (16)$$

За умови безперервності напружень на границі непружної зони отримаємо

$$R_0 \sqrt{2n - n^2} = A - 4A'(1-n). \quad (17)$$

Із (15), врахувавши (17), одержимо рівняння

$$M[\Phi + (1-n)\omega] - \sigma_s A_s h_0 \left[\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta + (1-n) \times \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) \right] - bc^2 R_0 n \left[\Delta + (1-n)\Phi + \frac{1}{2} (2-n) \left[\Phi + (1-n)\omega - \sqrt{2n - n^2} (\Delta\omega - \Phi^2) \right] \right] = 0. \quad (18)$$

Напруження у розтягнутій арматурі визначиться за (8):

$$\sigma_s = \frac{M(\Phi + \omega) - bc^2 R_0 n \left[\Phi + \Delta + \frac{1}{2} (2-n)(\Phi + \omega) \right]}{A_s h_0 \left[\Phi + \omega + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]} - \frac{\left[\frac{\delta_{1c} R_0 E_b}{S \pi c (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}{A_s h_0 \left[\Phi + \omega + \frac{c}{h_0} (\Phi + \Delta) \right]}. \quad (19)$$

Із (9) одержимо три рівняння:

$${}^3bR_0n\left\{\alpha\delta_{1c}\left[\Delta + \frac{1}{2}(2-n)\Phi\right] + \sigma_s\left[\Phi + \Delta + \frac{1}{2}(\omega + \Phi)\right]\right\} + \\ + c^2\left\{\sigma_s^2A_s(\Phi + \Delta) - \alpha\delta_{1c}\sigma_sA_s\Delta - \alpha\delta_{1-}bR_0n\left[\Phi + \frac{1}{2}(2-n)\omega\right]\right\} + \quad (20)$$

$$+ c\{\alpha\delta_{1c}\Phi(M - 2\sigma_sA_sh_0) - \sigma_s[M(\Phi + \omega) - \sigma_sA_sh_0(\Phi + \omega)]\} + \alpha\delta_{1-}h_0\omega(M - \sigma_sA_sh_0) = 0.$$

Розв'язуючи одночасно (18) і (20), знаходимо невідомі n і c, σ_s , підставляючи з (19).

Варіант, коли нема ще обох непружних зон ($n_1 = 0$ і $n = 0$), тобто переріз працює пружно, таким же чином, як у (4), (5), (7), (8) і (9), може бути при усіх залежностях, описаних у праці [1].

Розглянемо граничний випадок навантаження, коли дві непружні зони у перерізі над тріщиною стискаються на нульовій осі

$$n + n_1 = 0. \quad (21)$$

Не враховуємо стиснуту арматуру ($A'_s = 0$). Підставляючи (21) в (3), одержимо

$$\Phi = 0; \quad \Delta = 0; \quad \omega = 0. \quad (22)$$

Значення (22) підставимо в (2), щоб мати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\sigma_s A_s}{bc} - R_b n_1 + R_0 n = 0; \\ -\frac{M}{bc^2} + \frac{\sigma_s A_s h_0}{bc^2} - R_b \frac{n_1^2}{2} + \frac{1}{2} R_0 (2n - n^2) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Із першого рівняння з врахуванням (21) визначимо висоту стиснутої зони бетону (висота стиснутої непружної зони, див. рис. 1).

$$Y_{n.v.} = d_1 = \frac{\sigma_s A_s + R_0 bc}{b(R_b + R_0)}. \quad (24)$$

Висоту непружної зони над тріщиною обчислимо також звідси

$$d = \frac{R_b bc - \sigma_s A_s}{b(R_b + R_0)}. \quad (25)$$

Із другого рівняння (23) вираховуємо величину згинального моменту в перерізі

$$M = \sigma_s A_s h_0 + 0,5bd_1^2 R_b - 0,5b(c^2 - d^2)R_0. \quad (26)$$

Якщо знехтувати непружною зоною у вершині тріщини ($n = 0$), вирази (24) і (26) будуть аналогічними до тих, що наведені у СНиП для визначення висоти стиснутої зони прямокутного перерізу в зігнутому залізобетонному елементі і його несучої здатності. Таким чином, використовуючи схему (рис. 1), можна встановити загальні залежності для визначення напруження у бетоні й арматурі, глибину зростаючої тріщини, висоту непружної зони у вершині тріщини і на стиснутих волокнах перерізу. У цьому випадку складніше знайти розв'язок системи трьох трансцендентних рівнянь (7) і (9). Із загального випадку легко одержати розв'язки для всіх (трьох) стадій роботи перерізу (рис. 1). Найпростіша є перша стадія, де задача розв'язується з використанням K_{1C} . Розв'язок для часткових випадків ($n = 0$ або $n_1 = 0$) можна отримати з системи двох трансцендентних рівнянь.

Експериментальна перевірка результатів

Досліди проводилися на залізобетонних балках прямокутного перерізу $b'_f = b_f = b, h'_f = h_f = 0$. Стиснута арматура ставилася конструктивно. Нею знехтувано $A'_s = 0$, відсутнє попереднє напруження $N_0 = 0, M_0 = 0$, в стиснутій зоні перерізу бетон працює пружно $n_1 = 0$, балки випробовувалися на згин $F = (0, l) = 0$.

$$\Phi = 1, \quad \omega = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta = \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Постійні A і A' з (5.1.9) [1] будуть

$$\begin{cases} A = \frac{4,28}{bc^2} [M - \sigma_s A_s (h_0 - 0,785c)]; \\ 4A' = \frac{6,72}{bc^2} [M - \sigma_s A_s (h_0 - 0,637c)]. \end{cases} \quad (28)$$

Напруження у бетоні перерізу

$$\sigma_x = \frac{4,28}{bc^2} \frac{M - (c - 1,57y) - \sigma_s A_s [c(h_0 - 0,785c) - y(1,57h_0 - c)]}{\sqrt{c^2 - y^2}}. \quad (28a)$$

Положення нейтральної осі

$$y_{н.о.} = \frac{2}{\pi} \frac{M - \sigma_s A_s (h_0 - 0,785c)}{M - \sigma_s A_s (h_0 - 0,637c)}. \quad (29)$$

Напруження в арматурі

$$\sigma_s = \frac{M - 0,231bc^{3/2} K_{1c}}{A_s (h_0 - 0,376c)}. \quad (30)$$

Напруження в арматурі з врахуванням масштабного чинника [1]

$$\sigma_s = \frac{Mc_0^{0,4} - 0,231bc^{1,9} K_{1c}}{c_0^{0,4} A_s (h_0 - 0,376c)}. \quad (31)$$

З рівняння (5.1.13) [1] одержимо квадратне рівняння для визначення глибини тріщини

$$\begin{aligned} c^2 \sigma_s A_s (0,137 \sigma_s + 0,5 \alpha \delta_{1c}) + c [0,637 \alpha \delta_{1c} (M - 2 \sigma_s A_s h_0) + \\ + 0,363 \sigma_s (M - \sigma_s A_s h_0) - \alpha \delta_{1c} h_0 (M - \sigma_s A_s h_0)] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

При врахуванні нейтральної зони спереду тріщини при всіх попередньо прийнятих обмеженнях, сталі A і A' будуть

$$\begin{cases} A = \frac{M\omega - \sigma_s A_s h_0 (\omega + c/h_0 \Phi) - bc^2 R_0 n [\Phi + 0,5\omega(2-n)]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}; \\ 4A' = \frac{-M\Phi + \sigma_s A_s h_0 (\Phi + c/h_0 \Delta) + bc^2 R_0 n [\Delta + 0,5\Phi(2-n)]}{bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}. \end{cases} \quad (33)$$

Напруження в бетоні перерізу

$$\sigma_s = \frac{M(c\Phi + y\omega) - \sigma_s A_s h_0 (\Phi + c/h_0 \Delta) + y(\omega + c/h_0 \Phi)}{\sqrt{c^2 - y^2 bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}} - \frac{bc^2 R_0 n \left\{ - \left[\Delta + \frac{\Phi}{2} (2-n) \right] + y \left[\Phi + \frac{\omega}{2} (2-n) \right] \right\}}{\sqrt{c^2 - y^2 bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}}. \quad (34)$$

Напруження в арматурі

$$\sigma_s = \frac{M(\Phi + \omega) - bc^2 R_{bt} n [\Phi + \Delta + 0,5(2-n)(\Phi + \omega)]}{A_s h_0 [\Phi + \omega + c/h_0 (\Phi + \Delta)]} - \frac{\left[\frac{\delta_1 - R_{bt} E_b}{S\pi c(1-v^2)} \right]^{1/2} bc^2 (\Delta\omega - \Phi^2)}{A_s h_0 [\Phi + \omega + c/h_0 (\Phi + \Delta)]}. \quad (35)$$

З рівняння (5.1.13) [1] одержимо рівняння для обчислення глибини зони передруйнування

$$M[\Phi + (1-n)\omega] - \sigma_s A_s h_0 \left[\Phi + \frac{c}{h_0} \Delta + (1-n) \left(\omega + \frac{c}{h_0} \Phi \right) \right] - bc^2 R_{bt} n \times \left\{ \Delta + (1-n)\Phi + 0,5(2-n) \times [\Phi + (1-n)\omega - \sqrt{2n-n^2} (\Delta\omega - \Phi^2)] \right\} = 0. \quad (36)$$

З (5.2.2) [1] знайдемо рівняння для визначення висоти перерізу над тріщиною c або глибини тріщини $a = h - c$

$$c^3 b R_{bt} n \{ \alpha \delta_{1c} [\Delta + 0,5(2-n)\Phi] + \sigma_s [\Delta + 0,5(2-n)(\Phi + \omega)] \} + c^2 \{ \sigma_s^2 A_s (\Phi + \Delta) - \alpha \delta_{1c} b R_{bt} n [\Phi + 0,5(2-n)\omega] \} + c \{ \alpha \delta_{1c} \Phi (M - 2\sigma_s A_s h_0) - \sigma_s [M(\Phi + \omega) - \sigma_s A_s h_0 (\omega + \Phi)] \} + \alpha \delta_{1c} h_0 \omega (M - \sigma_s A_s h_0) = 0. \quad (37)$$

Одержані залежності для визначення напружень у бетоні і арматурі, положення нейтральної осі або висоти стиснутої зони перерізу, глибини зростаючої тріщини, ширини її розкриття перевірялися експериментально на залізобетонних балках серії БХІ і БХІІ, які випробовувалися на три- і чотириточковий згин. Методика експериментальних досліджень, конструкція балок, їх армування та об'єм експерименту наведено в [1].

Вимірювання деформацій в арматурі внутрішніми тензодавачами показало лінійну їх залежність від навантаження, напруження в арматурі діаметром 10 мм наближалися до границі текучості. Зіставлення дослідних напружень у стрижнях арматури, одержаних за тарифними деформаціями, розкриття тріщини на рівні арматури вказали на їх лінійну залежність з високим ступенем кореляції (рис. 2 і 3). Зміна діаметра арматури з 10 до 28 мм і способу армування (один, два яруси) помітно не вплинула на таку залежність. Результати порівняння розкриття тріщини на рівні арматури, визначених за СНиП 2.03.01-84 та дослідних даних показали задовільну збіжність. Дослідами також встановлено, що величина кутового коефіцієнта нахилу прямої залежності σ_s від δ_s можна вважати величиною сталою, розсіювання його значень відносно невелике.

Враховуючи важливість і стабільність параметра $\alpha = \sigma_s / \delta_s$ і $\sigma_s = 2\delta_{1c}$, доцільно вважати його механічною характеристикою залізобетону, яка насамперед залежить від механічних властивостей бетону і сталі. Цю характеристику потрібно визначити експериментально і вважати її модулем розкриття тріщини. У межах пружної роботи розтягнутої арматури характеристика

буде сталою, якщо на неї не впливає порушення зчеплення бетону з арматурою в зоні тріщини, але це вже питання спеціальних досліджень. Вважається, що певному класу бетону повинен відповідати певний клас арматури, мають бути обмеження міцності бетону знизу для конкретної міцності арматури. Загальні вимоги щодо цього вже сформульовані.

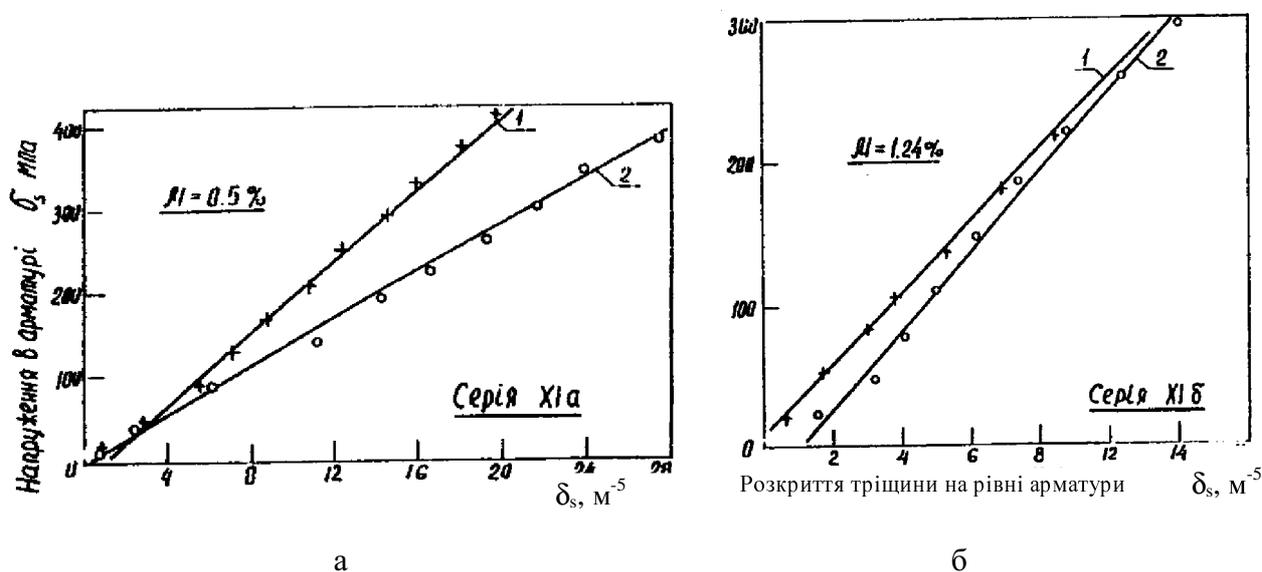


Рис. 2. Залежність дослідних напружень від розкриття тріщин

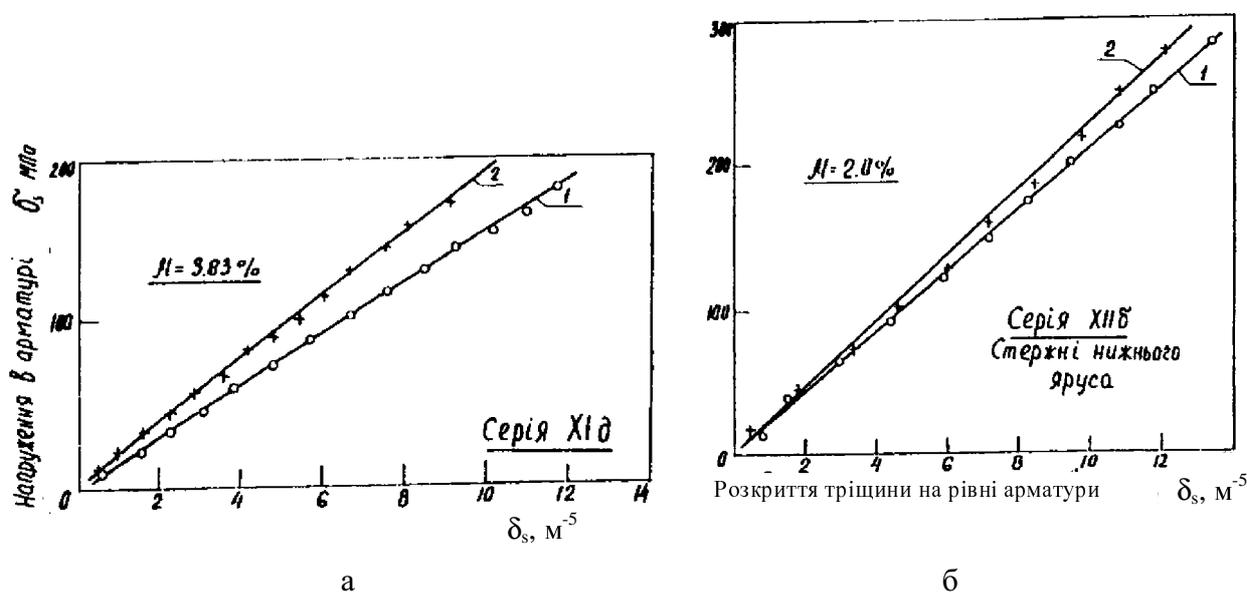


Рис. 3. Залежність дослідних напружень від розкриття тріщин

Якщо зважити на те, що тріщина починає поширюватися і її розкриття у вершині досягає критичної межі, що відбувається на рівні арматури, то в ній виникають напруження, які відповідають появі тріщини в балці $\sigma_s = \alpha \delta_{1c}$. Прийнято, що присутність арматури не збільшує граничного розтягнення бетону. За даними багатьох дослідників і за нашими експериментами орієнтовно $\delta_{1c} = 20 \cdot 10^{-6}$ м. Тоді напруження в арматурі при появі на її рівні тріщини будуть становити 30–40 МПа.

Порівняння дослідних і розрахункових напружень у бетоні σ_b і розтягнутій арматурі σ_s визначені для трикутної епюри напружень у стиснутій зоні балки за формулами

$$\sigma_b = Mx/I_n; \quad \sigma_s = M(h_0 - x)/I_n.$$

Кращий збіг цих напружень дають залежності (32) і (35) (на 2–3 %). Розподіл поздовжніх деформацій в перетині з тріщиною балок з різним відсотком армування, дослідні (суцільні лінії) і розрахункові (пунктирні лінії), знайдені за розрахунковими напруженнями і законом Гука з поправкою на не лінійність, відтворено схематично (рис. 4).

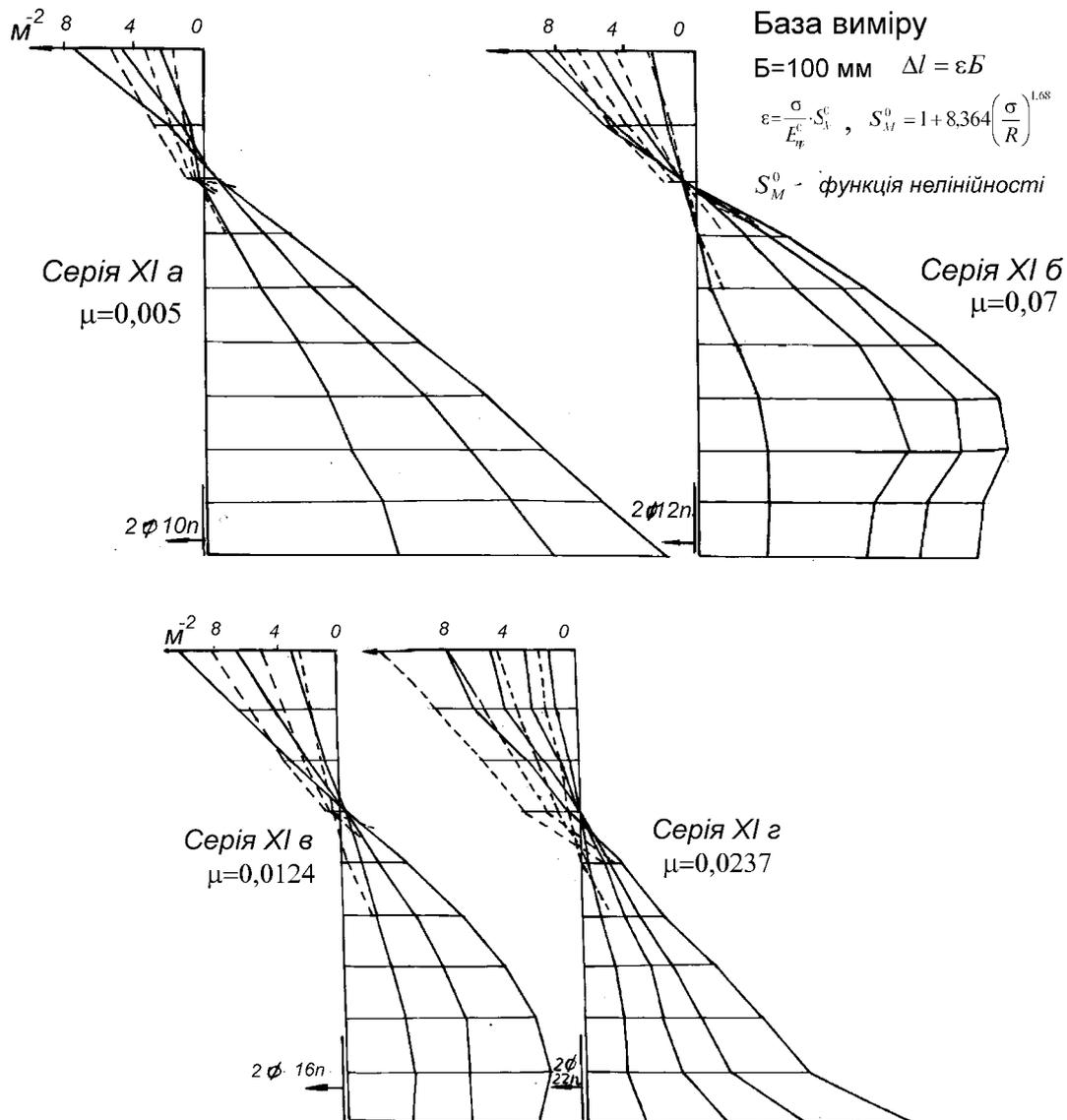
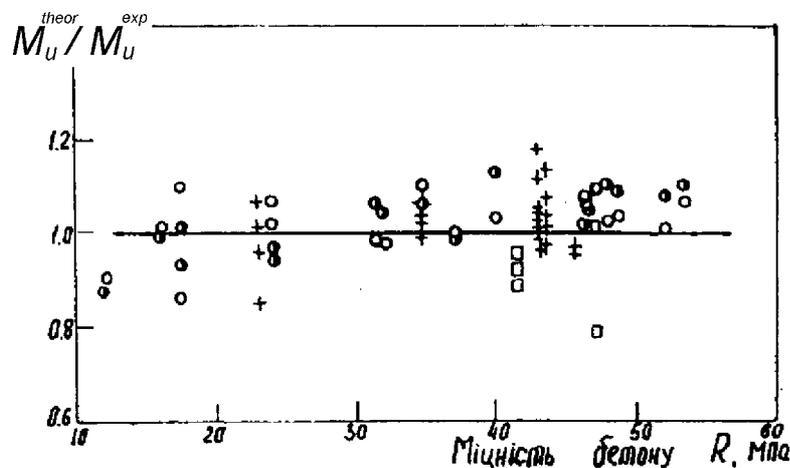


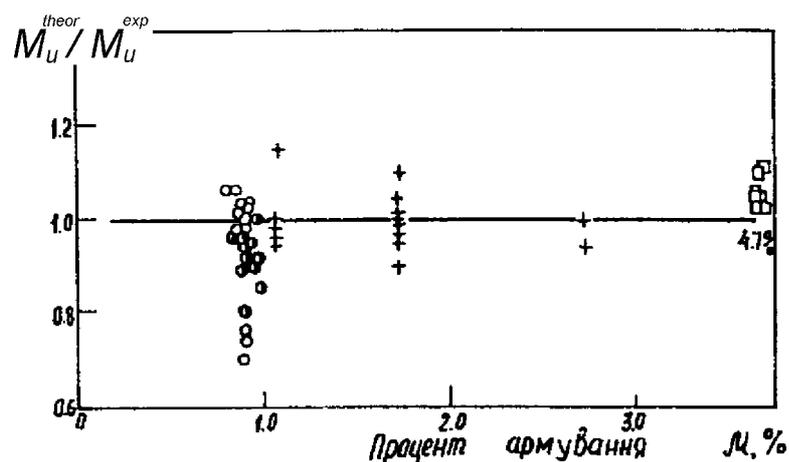
Рис. 4. Порівняння дослідних і розрахункових деформацій у стиснутій зоні перерізу з тріщиною

Необхідно зазначити, що розраховані напруження в бетоні і арматурі, висота стиснутої зони (при заданій глибині тріщини), а також глибина зростаючої тріщини та її розкриття, визначені з використанням критеріїв механіки руйнування K_{1c} і δ_{1c} , значно краще збігаються з дослідними значеннями.

Поправку знайдено за допомогою тарування призм на стиск. Як видно з рис. 5, непоганий збіг одержано для середнього і підвищеного армування. Для слабкого армування різниця істотна (зміщення у бік збільшення деформацій). Із підвищенням відсотка армування збільшується різниця у висоті зони перерізу. Результати порівняння дослідних руйнуючих моментів, обчислені за цією методикою та методикою інших авторів [2, 4], показані на рис. 5.



а



б

Рис. 5. Порівняння розрахованих руйнівних моментів з дослідними. Досліди:

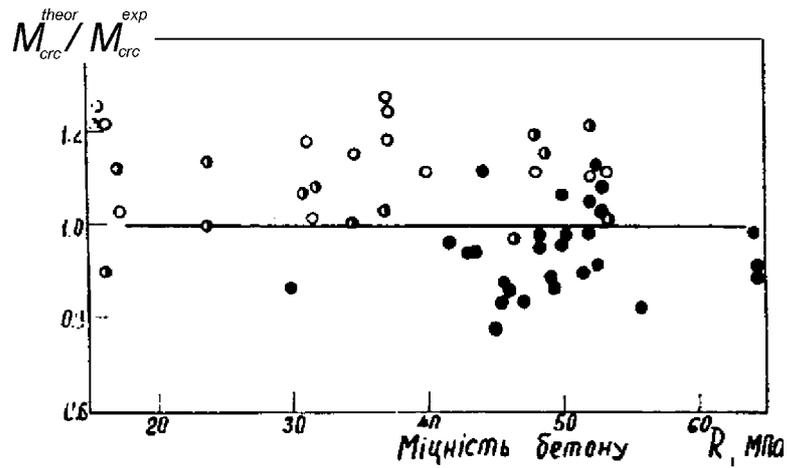
- – С.А. Дмитрієва та ін. [2], ○ – те саме, попередньо напружені балки,
- + – Й.Й. Лучко [3], □ – В.Н. Папу [4]

[2], Й.Й. Лучка [3], В.І. Папу [4] показали, що відхилення становлять для переважної більшості балок 10–15 %. Що стосується тріщиностійкості балок, визначених за (7.6.31) [1], то їх порівняння, показані на рис. 6, а, розраховані за (5.6.31) [1] і за СНиП 2.03.01-84 – на рис. 7, з яких видно, що розкид даних знаходиться в межах 15–18 %. Подібним є збіг і для тріщиностійкості колон, яка визначається за (5.6.32) [1]. Таким чином, експериментальні дослідження підтвердили, що цю методику можна рекомендувати для оцінки міцності і тріщиностійкості залізобетонних балкових елементів.

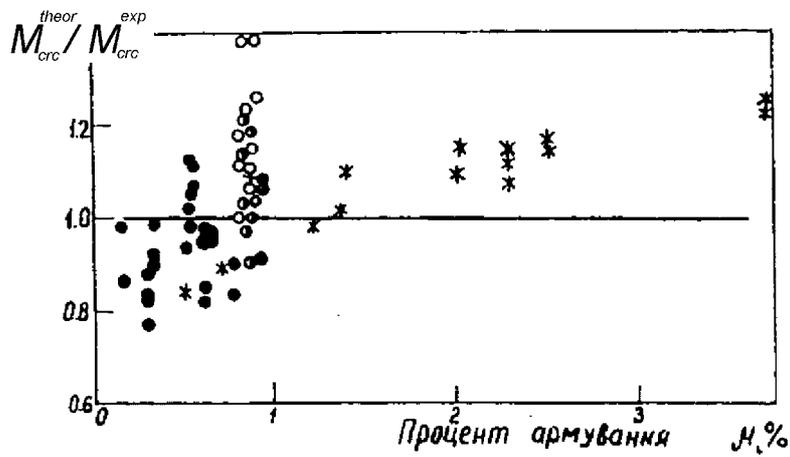
Розрахунок на міцність і тріщиностійкість за наведеною методикою проводився методом послідовних наближень. Якщо у праці не наводиться показник міцності бетону на розтяг $R_{bt,r}$, то його визначали з R_b за формулою Фере. K_{1c} визначався за R_{bt} і коефіцієнтом пропорційності, встановленим у наших дослідках

$$K_{1c} = 2,66R_{bt,r} \quad (41)$$

Порівняння розрахованих за (7.6.16) [1] руйнівних моментів в залізобетонних звичайних і попередньо напружених балках у дослідках С.А. Дмитрієва та ін.

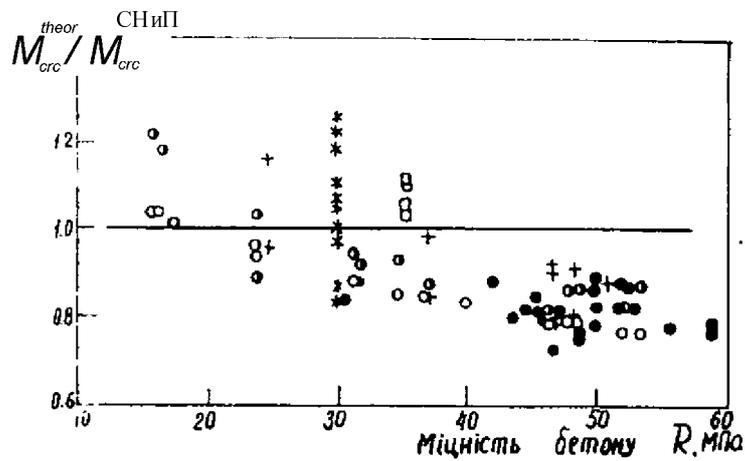


а



б

Рис. 6. Порівняння розрахованих за (5.7.16) моментів утворення тріщини з дослідними. Досліди: див. рис. 7. ● – К.В Михайлова [5], * – В.М. Чубрикова, В.Ф.Лазара [1]



а

Рис. 7. Порівняння розрахованих за (5.7.16) [1] моментів утворення тріщини з визначеними за СНиП 2.03.01-84

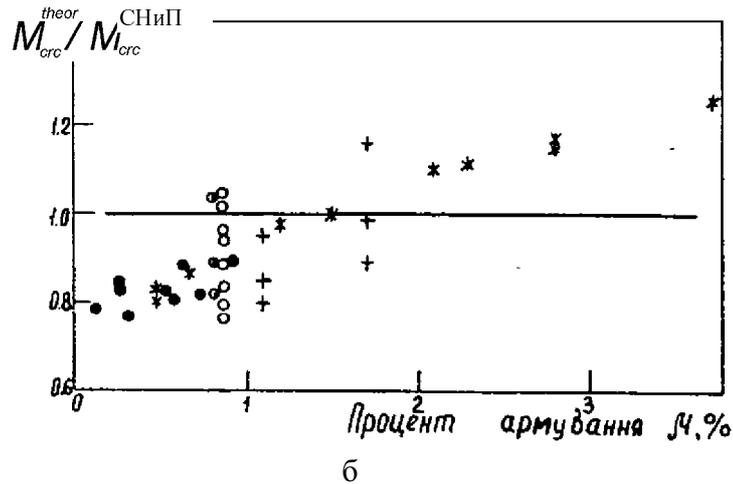


Рис. 7. Порівняння розрахованих за (5.7.16) [1] моментів утворення тріщини з визначеними за СНиП 2.03.01-84 (продовження)

Висновки

1. Використовуючи δ_k -модель поширення тріщини, побудовано залежності для визначення напружень у перерізі з тріщиною, а також оцінки тріщиностійкості і міцності згинального бетонного елемента за локальною міцністю бетону при розтягу з врахуванням кінцевої зони тріщини (17) і (18). Локальну міцність бетону при розтягу пропонується визначати за (6.2.10) [1], використовуючи критерії нелінійної механіки руйнування, які визначаються експериментально.

2. Проведеними дослідями встановлено, що одержані розв'язки з використанням критеріїв лінійної і нелінійної механіки руйнування можна використовувати для оцінки тріщиностійкості залізобетонних елементів.

3. Найбільш загальним випадком для задачі згину елемента з тріщиною, яка зростає залежно від навантаження, розмір перерізу, критерії руйнування матеріалу в нелінійній механіці руйнування з наявністю непружної зони попереду тріщини, з використанням розтягнутої і стиснутої арматури.

4. Приймаючи, що у цій задачі в залізобетонному елементі не враховано даних щодо арматури, для цього достатньо формально покласти $A_s = 0$, підставивши це в усі залежності, одержимо формули для розв'язання задач, що стосуються згину бетонної балки з тріщиною і непружною кінцевою зоною [1].

5. Припустивши, що непружна зона відсутня ($n = 0$) або настільки мала порівняно з розміром перерізу попереду тріщини, що нею можна знехтувати, задачу переводимо в розряд лінійної механіки руйнування. Додатково до цього приєднується умова для K_{1c} із (8) або (9) [1], якщо в тій самій задачі показники арматури $A_s = 0$, $A'_s = 0$, і підставивши її значення у відповідні вирази, отримаємо пружну задачу для бетонної балки з тріщиною [1].

6. Розрахункова схема для конструкції, яка згинається, прийнята у СНиП 2.03.01-84 для розрахунку моменту тріщиноутворення M_{crc} , з погляду теорії пружності не відповідає граничним умовам задачі.

7. Момент M_{crc} можна з достатньою точністю визначити, користуючись запропонованою методикою за формулою (29) на підставі моделі ідеально пружного тіла. Однак ця

формула позбавлена зайвих коефіцієнтів і зручніша в користуванні, а запропонована розрахункова схема відповідає граничним умовам задачі.

1. Лучко Й.Й., Чубріков В.М., Лазар В.Ф. Міцність, тріщиностійкість і довговічність бетонних та залізобетонних конструкцій на засадах механіки руйнування / НАН України Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка. – Львів, 1999. – 348 с. 2. Дмитриев С.А., Мулин Н.М., Артемьев В.П. Исследование прочности, трещиностойкости и жесткости балок с арматурой из стали 30ХГ2С // Исследование по теории железобетона. – М., 1960. – Вып. 17. – С. 32–67. 3. Лучко И.И. Несущая способность, трещиностойкость и деформативность изгибаемых железобетонных элементов из мелкозернистых бетонов // Несущая способность и деформативность железобетонных конструкций. – К., 1978. – С. 42–51. 4. Папу В.Н. Исследование прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов из бетонополимера // Новые исследования по технологии, расчёту и конструированию железобетонных конструкций. – М., 1980. – С. 118–122. 5. Михайлов К.В., Цай Шао-Хуай. Исследование семипроволочных прядей как арматуры предвательно напряженных железобетонных конструкций // Исследование по теории железа. – М., 1960. – Вып. 17. – С. 81–118.

УДК 517.947

Т.Л. Мартинович, Б.Т. Мартинович, О.В. Лобова
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра БМ

ГАРМОНІЙНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПРЯМОЛІНІЙНО-ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ, ЗАТИСНУТОЇ ПО ВСЬОМУ ПЕРИМЕТРУ

© Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т., Лобова О.В., 2002

Побудовано повний однозначний розв’язок однорідного рівняння амплітуд в прямокутній області $a \times b$ для некратних коренів відповідних характеристичних рівнянь. Докладно розглянуто власні коливання ортотропної прямокутної пластини, затиснутої по усьому контуру. Отримано формулу циклічної частоти і трансцендентні рівняння власних частот коливання пластини в напрямках координатних осей для випадку симетричних і косиметричних головних форм.

Диференціальні рівняння коливань пластин і відповідні їм рівняння амплітуд (форм коливань)

Розглянемо прямокутну прямолінійно-ортотропну пластину, головні напрямки пружності якої паралельні сторонам a і b і яка затиснута по усьому периметру $L \equiv 2(a + b)$ та віднесена до головної центральної системи координат xOy (див. рисунок).

Розв’язок динамічного рівняння гармонійного коливання ортотропної пластини

$$\sum_{j=0,2,\dots}^4 a_j \frac{\partial^4 W^{(2)}(x, y; t)}{\partial x^{4-j} \partial y^j} + m \frac{\partial^2 W^{(2)}(x, y; t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$