

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ НА ЙОГО ПРОПУСКНУ ЗДАТНІСТЬ

© Горбатий І.В., 2007

Досліджено вплив смуги пропускання та відношення енергії одного біта інформації до енергетичної спектральної густини білого шуму на пропускну здатність каналу зв'язку.

The influence of bandwidth and relations the energy of one information bit to energy spectral density of the white noise on reception capacity of the communication channel was explored.

Вступ. Постійне зростання об'ємів інформації, що передають каналами зв'язку, потребує підвищення ефективності, якості таких каналів, зокрема пропускну здатності. Це завдання можна вирішити шляхом оптимізації низки параметрів каналів на основі прийняття певних компромісів. Для прийняття правильного рішення необхідно знати вплив кожного параметра каналу зв'язку на ефективність та якість каналу. Останнім часом цьому питанню приділяється значна увага, що пов'язано із збільшенням обсягів даних, що передають цифровими каналами зв'язку [1]. Однак, для оцінювання якості цифрових каналів необхідно використовувати критерії, притаманні саме таким каналам, що в літературі [1] висвітлено недостатньо.

Метою роботи є дослідження впливу смуги пропускання та відношення енергії одного біта інформації до енергетичної спектральної густини білого шуму на пропускну здатність каналу зв'язку.

Постановка задачі. Критерієм якості аналогових систем зв'язку часто є відношення $P_c / P_{ш}$, де P_c – середня потужність сигналу, $P_{ш}$ – середня потужність шуму. Для цифрових систем зв'язку критерієм якості є нормована версія цього відношення $E_{б} / N_0$, де $E_{б}$ – енергія одного біта інформації, N_0 – енергетична спектральна густина білого шуму.

Згідно з [1] швидкість передавання двійкової інформації V (біт/с):

$$V = I / T, \quad (1)$$

де I – середня кількість інформації (біт), яка передається за час T (с).

Потужність сигналу в цифровій системі зв'язку дорівнює:

$$P_c = E_{б} V. \quad (2)$$

Потужність шуму становить:

$$P_{ш} = N_0 \Delta F, \quad (3)$$

де ΔF – смуга пропускання системи зв'язку.

Швидкість передавання інформації V обернено пропорційна часу передавання одного біта інформації $T_{б}$

$$V = 1 / T_{б}. \quad (4)$$

З врахуванням (2) та (4) енергія одного біта

$$E_{б} = P_c T_{б}. \quad (5)$$

У такому випадку можна записати:

$$\frac{E_{б}}{N_0} = \frac{P_c T_{б}}{P_{ш} / \Delta F} = \frac{P_c / V}{P_{ш} / \Delta F} = \frac{P_c}{P_{ш}} \left(\frac{\Delta F}{V} \right). \quad (6)$$

Отже, параметр E_b/N_0 прямо пропорційний відношенню середньої потужності сигналу до середньої потужності шуму P_c/P_u , а коефіцієнтом пропорційності є відношення смуги пропускання ΔF системи зв'язку до швидкості передавання інформації V у такій системі. З формули (6) видно, що параметр E_b/N_0 є безрозмірною величиною. Необхідно зауважити, що дужки у виразі (6) вказують на те, що на параметр E_b/N_0 впливає відношення P_c/P_u або відношення $\Delta F/V$, проте неприпустимо вважати, що із зменшенням потужності сигналу P_c удвічі в певному каналі зв'язку можна досягти того самого значення параметра E_b/N_0 збільшенням удвічі смуги пропускання такого каналу. Це впливає з того, що відношення P_c/P_u та $\Delta F/V$ мають нелінійний взаємозв'язок, що буде показано нижче при дослідженні пропускну здатності каналу зв'язку.

Потрібно зазначити, що необхідне для роботи систем зв'язку відношення E_b/N_0 краще характеризує якість таких систем порівняно з параметром P_c/P_u , оскільки в них здійснюють передавання дискретних сигналів, а отже, оцінювати якість передавання треба за енергетичними характеристиками не неперервного (потужністю сигналу P_c), а дискретного сигналу (енергією одного біта інформації E_b).

Дослідження залежності пропускну здатності від параметрів каналу зв'язку. Важливою характеристикою дискретного каналу зв'язку є пропускну здатність C , якою згідно з [1–3] називають максимально можливу швидкість передавання інформації

$$C = \max V = \max \left\{ \frac{I}{T} \right\}, \quad (7)$$

одержану при варіації усіх можливих джерел інформації на вході. Пропускну здатність залежить лише від властивостей телекомунікаційного каналу.

Пропускну здатність дискретного (цифрового) каналу визначається пропускну здатністю неперервного (аналогового) каналу, який входить до складу дискретного і описується відомою формулою Шеннона [4].

Згідно з формулою Шеннона пропускну здатність C аналогового (неперервного) каналу зв'язку з адитивним білим шумом з гауссівським розподілом амплітуд є функцією середньої потужності сигналу на виході каналу P_c , середньої потужності шуму в каналі P_u та ширини смуги пропускання каналу ΔF :

$$C = \Delta F \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_u} \right). \quad (8)$$

Оскільки ΔF вимірюється в Гц, а логарифм у формулі є з основою 2, то пропускну здатність має розмірність біт/с. Теоретично, при використанні складної системи кодування, інформацію по каналу можна передати з довільною швидкістю V ($V \leq C$) з як завгодно малою ймовірністю помилки. Якщо $V > C$, то коду, на основі якого можна добитися як завгодно малої ймовірності виникнення помилки, не існує. У роботі Шеннона показано, що величини P_c , P_u і ΔF встановлюють межі швидкості передавання, а не ймовірності появи помилки. Використовуючи рівняння (8), одержано формули (9), (10), які відображають залежність нормованої пропускну здатності каналу $C/\Delta F$ (біт/с/Гц) та нормованої смуги пропускання каналу $\Delta F/C$ (Гц/біт/с) від відношення середньої потужності сигналу до середньої потужності шуму в каналі P_c/P_u відповідно:

$$\frac{C}{\Delta F} = \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_u} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\Delta F}{C} = 1 / \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_u} \right). \quad (10)$$

Ці залежності відображені на рис. 1 та рис. 2 відповідно.

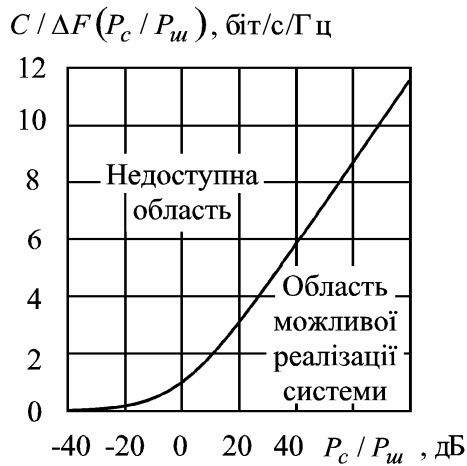


Рис. 1. Залежність нормованої пропускної здатності каналу $C/\Delta F$ від відношення $P_c/P_{ш}$

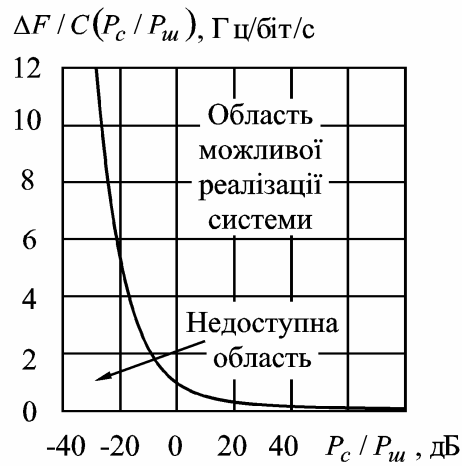


Рис. 2. Залежність нормованої смуги пропускання каналу $\Delta F/C$ від відношення $P_c/P_{ш}$

З рис. 1 видно, що немає нижнього граничного значення відношення потужності сигналу до потужності шуму $P_c/P_{ш}$ при передаванні інформації, тобто передавання можна здійснювати при потужності сигналу, меншій за потужність шуму, за умови, що зменшення відношення $P_c/P_{ш}$ компенсується розширенням смуги пропускання каналу ΔF .

Для одержання залежностей нормованої пропускної здатності каналу та нормованої смуги пропускання каналу від відношення E_{σ}/N_0 здійснимо підстановку виразу (3) до рівняння (8) і отримаємо:

$$\frac{C}{\Delta F} = \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \right). \quad (11)$$

Якщо швидкість передавання інформації дорівнює пропускній здатності каналу ($V = C$), то за допомогою тотожності (6) можна записати наступне:

$$\frac{P_c}{N_0 C} = \frac{E_{\sigma}}{N_0}. \quad (12)$$

Виконаємо перетворення формули (11)

$$\frac{C}{\Delta F} = \log_2 \left(1 + \frac{E_{\sigma}}{N_0} \left(\frac{C}{\Delta F} \right) \right), \quad (13)$$

$$2^{C/\Delta F} = 1 + \frac{E_{\sigma}}{N_0} \left(\frac{C}{\Delta F} \right) \quad (14)$$

та одержимо

$$\frac{E_{\sigma}}{N_0} = \frac{\Delta F}{C} \left(2^{C/\Delta F} - 1 \right). \quad (15)$$

На рис. 3 та 4 наведено графіки залежностей $C/\Delta F$ та $\Delta F/C$ від відношення E_{σ}/N_0 , описаних формулою (15).

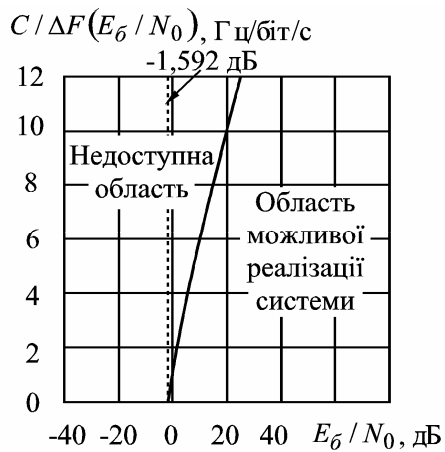


Рис. 3. Залежність нормованої пропускної здатності каналу $C / \Delta F$ від відношення E_b / N_0

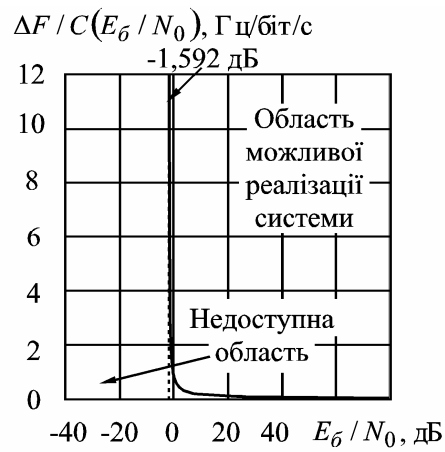


Рис. 4. Залежність нормованої смуги пропускання каналу $\Delta F / C$ від відношення E_b / N_0

З рис. 3 видно, що існує нижнє граничне значення відношення E_b / N_0 , нижче якого за жодної швидкості передавання неможливо безпомилково передавати інформацію (нижче якого пропускна здатність каналу зв'язку $C \rightarrow 0$ біт/с).

Границя Шеннона. Визначимо нижнє граничне значення відношення E_b / N_0 , нижче якого пропускна здатність каналу зв'язку $C \rightarrow 0$ біт/с. Для розрахунку такого значення прийемо, що

$$x = \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{\Delta F} \right),$$

тоді з врахуванням рівності

$$\log_c a = b \log_c a^{1/b}$$

рівняння (13) подамо у вигляді

$$\frac{C}{\Delta F} = x \log_2(1+x)^{1/x}.$$

Після перетворення одержимо

$$1 = \frac{E_b}{N_0} \log_2(1+x)^{1/x}. \quad (16)$$

Визначимо значення E_b / N_0 , нижче якого передавання інформації через канал зв'язку припиниться, тобто відношення пропускної здатності до смуги пропускання каналу прямує до нуля $C / \Delta F \rightarrow 0$ (аналогічно $x \rightarrow 0$). Після використання відомого співвідношення [5]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (17)$$

при $C / \Delta F \rightarrow 0$ з формули (16) отримаємо

$$\frac{E_b}{N_0} \Big|_{C/\Delta F \rightarrow 0} = \frac{1}{\log_2 e} = 0,693 \quad (18)$$

чи, в децибелах,

$$\frac{E_b}{N_0} \Big|_{C/\Delta F \rightarrow 0} = -1,592 \text{ дБ}. \quad (19)$$

Це значення E_b / N_0 називається границею Шеннона.

Якщо зробити відповідні перетворення (12) з врахуванням (18), то можна одержати

$$\frac{P_c}{N_0 C} = \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \cdot \frac{\Delta F}{C} = \frac{P_c}{P_u} \cdot \frac{\Delta F}{C} = \frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e},$$

звідки

$$\frac{C}{\Delta F} \Big|_{P_c/P_u \rightarrow 0} = \frac{P_c}{P_u} \cdot \log_2 e = \frac{P_c}{P_u} \cdot 1,443. \quad (20)$$

За цією формулою можна визначити пропускну здатність каналу зв'язку при $P_c/P_u \rightarrow 0$, тобто за умови, що $C/\Delta F \rightarrow 0$. При використанні формули (20) при інших значеннях P_c/P_u відносна похибка визначення величини $C/\Delta F$ порівняно зі значенням, одержаним з використанням співвідношення (8), за результатами досліджень автора, не перевищує 5% за умови, що $P_c/P_u \leq 0,1$, і зменшується зі зменшенням відношення P_c/P_u . Тобто формула (20) дає змогу наближено визначити відношення $C/\Delta F$ при малих значеннях P_c/P_u .

При великих значеннях P_c/P_u формула (9) вироджується так:

$$\frac{C}{\Delta F} \Big|_{P_c/P_u \rightarrow \infty} = \log_2 \left(\frac{P_c}{P_u} \right). \quad (21)$$

З формули (21) видно, що при $P_c/P_u \geq 10$ відносна похибка визначення величини $C/\Delta F$ порівняно зі значенням, одержаним з використанням співвідношення (8), за результатами досліджень автора, не перевищує 4% і зменшується зі збільшенням відношення P_c/P_u . Формула (21) показує, що при великих значеннях відношення P_c/P_u для збільшення відношення пропускну здатності до смуги пропускання каналу в n разів необхідно збільшити відношення P_c/P_u у 2^n разів. Для підвищення пропускну здатності ефективнішим є збільшення смуги пропускання каналу зв'язку, оскільки зміна смуги пропускання прямопропорційно впливає на зміну пропускну здатності.

Однак, із збільшенням смуги пропускання каналу зв'язку до нескінченності пропускну здатність каналу стає нелінійною функцією смуги пропускання.

Так з врахуванням виведеного співвідношення

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b, \quad (22)$$

одержаного з [5, 6] за умови існування логарифмів ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$), згідно з формулою (11) отримаємо:

$$C = \Delta F \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \right) = \Delta F \log_2 e \cdot \ln \left(1 + \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \right).$$

Границя пропускну здатності C при смугі пропускання $\Delta F \rightarrow \infty$ дорівнює

$$C \Big|_{\Delta F \rightarrow \infty} = \lim_{\Delta F \rightarrow \infty} C = \log_2 e \cdot \lim_{\Delta F \rightarrow \infty} \Delta F \ln \left(1 + \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \right).$$

Оскільки згідно з [4] $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$C \Big|_{\Delta F \rightarrow \infty} = \Delta F \frac{P_c}{N_0 \Delta F} \log_2 e = \frac{P_c}{N_0} \log_2 e. \quad (23)$$

Отже, пропускну здатність каналу зв'язку при смугі пропускання $\Delta F \rightarrow \infty$ залежить лише від відношення потужності сигналу P_c до енергетичної спектральної густини шуму N_0 . Формулу (23) також можна одержати, помноживши ліву і праву частини співвідношення (20) на ΔF .

З формули (23) також випливає, що для передавання інформації через канал зв'язку з шумами відношення $E_b/N_0 = P_c T/N_0$ повинне перевищувати деякий поріг. Так, кількість інформації, яку можна передати по каналу зв'язку з пропускну здатністю C за час T , не може перевищити величини

$$I = CT \leq \frac{P_c T}{N_0} \log_2 e = \frac{E_b}{N_0 \ln 2}.$$

Тому для передавання $I = 1$ біт інформації необхідно, щоб енергія сигналу

$$E_b = P_c T \geq N_0 \ln 2 = 0,693 N_0, \quad (23)$$

що збігається з результатом, одержаним у формулі (18). Отже, границя Шеннона вказує, що для можливості передавання двійкової інформації необхідно, щоб відношення E_b/N_0 було не меншим від $\ln 2$. Із співвідношення (23) видно, що досягти такого відношення E_b/N_0 можливо при як завгодно малій потужності сигналу (навіть при $P_c \ll P_u$) за умови, що час передавання одного біта інформації буде достатньо великим.

Необхідно зауважити, що формула Шеннона визначає пропускну здатність при передаванні саме двійкової інформації. Якщо інформацію передають у m -му вигляді, то i логарифм у співвідношенні (8) повинен бути з основою m , а пропускну здатність у такому випадку буде меншою.

Висновки. У результаті проведених досліджень можна зробити такі висновки:

- немає нижнього граничного значення відношення потужності сигналу до потужності шуму P_c/P_u при передаванні інформації, тобто передавання можна здійснювати при потужності сигналу, меншій за потужність шуму, за умови, що зменшення відношення P_c/P_u компенсується розширенням смуги пропускання каналу;
- існує нижнє граничне значення відношення енергії одного біта інформації до енергетичної спектральної густини білого шуму E_b/N_0 , нижче якого ні за якої швидкості передавання неможливо безпомилково передавати інформацію (нижче якого пропускну здатність каналу зв'язку $C \rightarrow 0$ біт/с);
- для можливості передавання двійкової інформації необхідно, щоб відношення E_b/N_0 було не меншим від $\ln 2$; досягти такого відношення E_b/N_0 можливо при як завгодно малій потужності сигналу (навіть при $P_c \ll P_u$) за умови, що час передавання одного біта інформації буде достатньо великим.

Надалі доцільно дослідити необхідне відношення E_b/N_0 при використанні сучасних видів модуляції сигналу.

1. Горбатий І.В. Математичні моделі та методи дослідження телекомунікаційних каналів: Львів, Сполом, 2006. – 156 с. 2. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория передачи сигналов в задачах: Учеб. пособие для вузов. – М.: Связь, 1978. – 252 с. Теория передачи сигналов: Учеб. для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров, Л.М. Финк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с. 4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИИЛ. – 1963. – 830 с. 5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправ. – М.: Наука, 1986. – 544 с. 6. Сахарников Н.А. Высшая математика. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. – 472 с.