структуры и математическая экономика. М., 1972. 4. Вінчерський М., Сявавко М. Економіко-математичний аналіз міжгалузевого балансу на основі апроксимант Паде // Регіональна економіка. 1998. №1. С.89-102. 5. Негойцэ К.В. Применение теории систем к проблемам управления. М., 1981.

УДК 517.958:536.24:539.18

Є.Г. Грицько, О.М. Вовк
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ МІЖ ТРИМАЧЕМ ТА КОРПУСОМ ФОТОЕЛЕКТРОННОГО ПРИЛАДУ

Розв'язано задачу променево-кондуктивного теплообміну між елементами фотоелектронного приладу з використанням непрямого методу граничних елементів та восьмивузлової апроксимації.

The problem of radial heat exchange between of fotoelektronic device with use of indirect method of boundary elements and eight-knot approximation is solved.

Вступ

Значна частина фотоелектронних приладів працює в умовах різких перепадів температур. Навіть захисним кожухам корпусів цих приладів не вдається знизити перепад температур до потрібного значення. Тому одним з основних завдань під час конструювання та використання вакуумних фотоелектронних приладів є правильний вибір режимів охолодження. Важливими складовими, які необхідно враховувати під час розрахунку системи охолодження, є променевий та кондуктивний теплообмін. У деяких роботах, зокрема в [1,3,5], ці процеси розглянуті відокремлено. Метою цієї роботи є побудувати точнішу модель для опису променево-кондуктивного теплообміну між тримачем і корпусом фотоелектронного приладу, що своєю чергою забезпечить вищий ступінь ізотермічності на всій робочій поверхні активного фотоелектронного елемента.

Формулювання задачі

Розглянемо променево-кондуктивний теплообмін між тримачем Y^f та корпусом Y^g, які є циліндричними оболонками з паралельними осями.

Позначимо через Ω^g – внутрішню поверхню Y^g, а Ω^f – зовнішню поверхню Y^f. Вважаючи, що температурне поле на Ω^g, описується відомою функцією $T^g(x)$, а $T^f(x)$ – невідоме, розглянемо кондуктивний теплообмін в Ω^f та променевий між поверхнями Ω^f, Ω^g.

Для зручності дискретизацію та теплопровідності будемо розглядати в локальних циліндричних системах координат r^f, φ^f, z^f та r^g, φ^g, z^g, а променевий теплообмін – в глобальній декартовій системі координат x_1, x_2, x_3. Введемо позначення: $\hat{x}_f = (\hat{x}_{f1}, \hat{x}_{f2})$, де $\hat{x}_{f1} = r_0\varphi^f, \hat{x}_{f1} = z^f$, r_0 - радіус циліндричної оболонки Y^f, а r_0, φ^f, z^f – локальні циліндричні координати точки на бічній поверхні тримача. Вважаючи, що по товщині циліндричної оболонки тримача температурне поле не змінюється ($\partial T^f / \partial r \approx 0$) та припускаючи, що бічні поверхні Ω^f, Ω^g сірі з постійними коефіцієнтами поглинання A^f, A^g та відбиття R^f, R^g, запишемо систему рівнянь та граничних умов, що описують процес

$$\partial^2 T^f \Big/ \partial \hat{x}_{f1}^2 + \partial^2 T^f \Big/ \partial \hat{x}_{f2}^2 = -(\delta^f)^{-1}(\lambda^f)^{-1} q_r^f,\ \hat{x}_f = (\hat{x}_{f1}, \hat{x}_{f2}) \in \Omega^f, \tag{1}$$

$$q_r^f = A^f (E^{\Pi f} - E^{Vf}), \tag{2}$$

$$E^{\Pi g}(x) - R^g \int\limits_{\Omega^g} E^{\Pi g}(x) G^{gg}(x,\xi) d\Omega^g - R^f \int\limits_{\Omega^f} E^{\Pi f}(x) G^{gf}(x,\xi) d\Omega^f =$$

$$= A^g \int\limits_{\Omega^g} E^{Vg}(x) G^{gg}(x,\xi) d\Omega^g + A^f \int\limits_{\Omega^f} E^{Vf}(x) G^{gf}(x,\xi) d\Omega^f; \tag{3}$$

$$E^{\Pi f}(x) - R^g \int\limits_{\Omega^g} E^{\Pi g}(x) G^{fg}(x,\xi) d\Omega^g = A^g \int\limits_{\Omega^g} E^{Vg}(x) G^{fg}(x,\xi) d\Omega^g; \tag{4}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$T^f(\hat{x}_{f1}, z^-) = T^-,\ 0 < \hat{x}_{f1} < 2\pi r_0,\ \hat{x}_{f2} = z^-; \tag{5}$$

$$\partial T^f(\hat{x}_{f1}, z^+) \Big/ \partial \hat{x}_{f2} = q_0,\ 0 < \hat{x}_{f1} < 2\pi r_0,\ \hat{x}_{f2} = z^+; \tag{6}$$

$$T^f(0, \hat{x}_{f2}) = T^f(2\pi r_0^f, \hat{x}_{f2}),\ \hat{x}_{f1} = 0, \tag{7}$$

$$\partial T^f(0, \hat{x}_{f2}) \Big/ \partial \hat{x}_{f2} = \partial T^f(2\pi r_0^f, \hat{x}_{f2}) \Big/ \partial \hat{x}_{f2},\ \hat{x}_{f1} = 2\pi r_0,\ z^- < \hat{x}_{f2} < z^+; \tag{8}$$

де T^f – температурне поле Ω^f; λ^f – коефіцієнт теплопровідності тримача; δ^f – товщина тримача; q_r^f – тепловий потік через бічну поверхню $\partial\Omega^f$; $E^{\Pi g}(x), E^{\Pi f}(x)$ – густини падаючих променевих енергій на відповідно Ω^g та Ω^f; $E^{Vg} = \sigma(T^g)^4$; $E^{Vf} = \sigma(T^f)^4$; σ – стала Больцмана; $G_\varsigma^\mu(x,\xi) = C_\varsigma^\mu(x,\xi) C_\mu^\varsigma(\xi,x) \Big/ (\pi(r_\varsigma^\mu(x,\xi))^2)$; $C_\varsigma^\mu(x,\xi) = \cos(\psi_\varsigma^\mu(x,\xi))\chi_\varsigma^{\mu*}$, $\chi_\varsigma^{\mu*} = 1$, якщо $\bar{r}_\varsigma^\mu(x,\xi) \cap \Omega^f = \varnothing$ або $\chi_\varsigma^{\mu*} = 0$, якщо $\bar{r}_\varsigma^\mu(x,\xi) \cap \Omega^f \neq \varnothing$; $r_\varsigma^\mu(x,\xi)$ – радіус-вектор, що з'єднує точки на Ω^μ і Ω^ς; $\bar{r}_\varsigma^\mu(x,\xi) =]x^\mu, \xi^\varsigma[$; $\psi_\varsigma^\mu(x,\xi)$ – кут між нормаллю до Ω^μ і радіус-вектором між точками x^μ, ξ^ς, $\mu,\varsigma = \{f, g\}$. У рівняннях (3),(4) для зручності використані координати ξ_i, які повністю збігаються з координатами x_i; $z^+ - z^-$ – довжина тримача.

Методика розв'язування

Дискретизуємо області Ω^g, Ω^f чотирикутними елементами Ω_{nl}^g, $n = \overline{1, L^g}$, $l = \overline{1, I_n^g}$, $\Omega_{m\alpha}^f, m = \overline{1, L^f + 1}$, $\alpha = \overline{1, I_m^f}$, де L^g, L^f - кількість елементів розбиття по осьовій координаті, I_n^g, I_m^f – кількість елементів розбиття в азимутальних напрямках. Введемо систему вузлів x_{iwv}^ζ, $i = \overline{1,8}$, де x_{iwv}^ζ, $i = \overline{1,4}$ – вершини Ω_{wv}^ζ, а x_{iwv}^ζ, $i = \overline{5,8}$ – середини сторін Ω_{wv}^ζ, $\zeta = \{f, g\}$.

У роботі [5] показано, що для опису поверхневого елемента циліндричної оболонки достатньо використовувати три вузли: перший,пятий та восьмий,а також як з (3),(4) отримати систему лінійних рівнянь для визначення густин падаючих променевих енергій у вузлах при відомих T^f, T^g.

Легко бачити, що за відсутності опромінення, температурне поле на тримачі змінюватиметься за лінійним законом

$$T^{0f} = q_0 \hat{x}_{f2} + T^- - q_0 z^- \tag{9}$$

Вираз (9) використаємо як початкове наближення для знаходження спочатку густин падаючих променевих енергій ,а потім температурного поля T^f в задачі променево-кондуктивного теплообміну (1)-(8). Обчислимо значення T^f у вузлах дискретизації, використовуючи (9). Отримані T_{wv1}^{0f} , T_{wv5}^{0f} , T_{wv8}^{0f} підставимо в систему рівнянь для визначення густин падаючих променевих енергій у вузлах, отриману в [5] . У результаті одержимо $E_{wv1}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv5}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv8}^{0\Pi\zeta}$, $\zeta = \{g, f\}$.

Запишемо вираз для густини падаючої променевої енергії на елементі $\Omega_{m\alpha}^f$, використовуючи отримані значення і рівності, що встановлюють відповідність між густинами падаючих променевих енергій у вузлах сусідніх елементів [5]

$$E_{m\alpha}^{0\Pi f}(x) = E_{m\alpha 1}^{0\Pi f}\phi_{1m\alpha}^f(x) + E_{m(\alpha+1)1}^{0\Pi f}\phi_{2m\alpha}^f(x) + E_{(m+1)(\alpha+1)1}^{0\Pi f}\phi_{3m\alpha}^f(x) + E_{(m+1)\alpha 1}^{0\Pi f}\phi_{4m\alpha}^f(x) +$$
$$+ E_{m\alpha 5}^{0\Pi f}\phi_{5m\alpha}^f(x) + E_{m(\alpha+1)8}^{0\Pi f}\phi_{6m\alpha}^f(x) + E_{(m+1)\alpha 5}^{0\Pi f}\phi_{7m\alpha}^f(x) + E_{m\alpha 8}^{0\Pi f}\phi_{8m\alpha}^f(x).$$

Тоді $E^{0\Pi f} = \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} E_{m\alpha}^{0\Pi f}(x)\chi_{m\alpha}(x)$, де $\chi_{m\alpha}(x) = 1$, якщо $x \in \Omega_{m\alpha}^f$ або $\chi_{m\alpha}(x) = 0$, якщо $x \notin \Omega_{m\alpha}^f$. Підставимо вираз для густини падаючої променевої енергії $E^{0\Pi f}$ в (2). Внаслідок цього маємо задачу

$$\partial^2 T^{f*} \big/ \partial \hat{x}_{f1}^2 + \partial^2 T^{f*} \big/ \partial \hat{x}_{f2}^2 = -\omega^f, \quad (\hat{x}_{f1}, \hat{x}_{f2}) \in \Omega^f; \tag{10}$$

з граничними умовами (5)-(8), де $\omega^f = \left(\delta^f\right)^{-1} (\lambda^f)^{-1} A^f (E^{0\Pi f} - E^{Vf})$.

Для розв’язку задачі (10), (5)-(8) використаємо непрямий метод граничних елементів[6]. Введемо «фіктивні» джерела тепла з невідомою інтенсивністю $g^f(\xi)$ в розрахунку на одиницю довжини $\partial\Omega^f$. Тоді для T^{f*} отримаємо

$$T^{f*}(\hat{x}_f) = \int_{\partial\Omega^f} \widetilde{E}(\hat{x}_f, \xi_f) g^f(\xi_f) d\partial\Omega^f(\xi_f) + \int_{\Omega^f} \widetilde{E}(\hat{x}_f, \xi_f)\omega^f(\xi_f) d\Omega^f(\xi_f) + C^f; \tag{11}$$

де $$\widetilde{E}(\hat{x}_f, \xi_f) = -\frac{1}{2\pi\lambda^f} \ln\left| ((\hat{x}_{f1} - \xi_{f1})^2 + (\hat{x}_{f2} - \xi_{f2})^2)^{1/2} \big/ r_0 \right|, \tag{12}$$

а константа $\hat{r}_0$ використовується для покращання обчислень. Значення постійної C^f в (11) виберемо так, щоб сумарний тепловий потік через бесконечно віддалену границю дорівнював нулю, що своєю чергою буде гарантувати єдиність нашого розв’язку[6]. Це призводить до умови

$$\int_{\partial\Omega^f} g^f(\xi_f)d\partial\Omega^f(\xi_f) + \int_{\Omega^f} \omega^f d\Omega^f = 0. \quad (13)$$

Підставивши (11) в граничні умови (5)-(8), отримаємо систему інтегральних рівняннь на невідому функцію $g^f(\xi)$.

Розглянемо наближену методику розв'язування цієї системи рівнянь. Дискретизуємо $\partial\Omega^f$ (тобто відрізки $0 < \hat{x}_{f1} < 2\pi r_0$, $\hat{x}_{f2} = z^-$; $\hat{x}_{f1} = 0$, $z^- < \hat{x}_{f2} < z^+$; $0 < \hat{x}_{f1} < 2\pi r_0$, $\hat{x}_{f2} = z^+$; $\hat{x}_{f1} = 2\pi r_0$, $z^- < \hat{x}_{f2} < z^+$) $4N$ граничними елементами $\Delta_q\partial\Omega^f, q = \overline{1,4N}$. Введемо точки спостереження $x_{0fq} \in \Delta_q\partial\Omega^f$. Будемо вважати, що вздовж кожного елемента $\Delta_q\partial\Omega^f$ інтенсивність фіктивних джерел постійна і дорівнює g_q^f. У результаті можна записати такі дискретні аналоги граничних умов:

$$T^- = \sum_{q=1}^{4N} g_q^f(\xi_f) \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} \tilde{E}(x_{0fp}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_f) + \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega_{m\alpha}^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} \tilde{E}(x_{0fp}, \xi_f) d\Omega^f + C^f, \quad (14)$$

$$p = \overline{1, N};$$

$$q_0 = -0.5 g_p^f + \sum_{q=1}^{4N} g_q^f \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} F(x_{0fp}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_{fq}) + \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega_{m\alpha}^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} F(x_{0fp}, \xi_f) d\Omega^f, \quad (15)$$

$$p = \overline{2N+1, 3N};$$

$$\sum_{q=1}^{4N} g_q^f \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} \tilde{E}(x_{0f(N+p)}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_{fq}) + \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} \tilde{E}(x_{0f(N+p)}, \xi_f) d\Omega^f =$$

$$= \sum_{q=1}^{4N} g_q^f \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} \tilde{E}(x_{0f(4N-p+1)}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_{fq}) + \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} E(x_{0f(4N-p+1)}, \xi_{fm\alpha}) d\Omega^f, \quad (16)$$

$$p = \overline{1, N},$$

$$-0.5 g_{N+p}^f + \sum_{q=1}^{4N} g_q^f \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} F(x_{0f(N+p)}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_{fq}) + \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega_{m\alpha}^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} F(x_{0f(N+p)}, \xi_{fm\alpha}) d\Omega^f =$$

$$= -0.5 g_{4N-p+1}^{f2} + \sum_{q=1}^{4N} g_q^f \int_{\Delta_q\partial\Omega^f} F(x_{0f(4N-p+1)}, \xi_{fq}) d\partial\Omega^f(\xi_{fq}) +$$

$$+ \sum_{m,\alpha=1}^{L^f, I^f} \omega_{m\alpha}^f \int_{\Omega_{m\alpha}^f} F(x_{0f(4N-p+1)}, \xi_{fm\alpha}) d\Omega^f, \qquad p = \overline{1, N}, \quad (17)$$

де $F(\hat{x}_{0fp}, \xi_{fp}) = 1/(2\pi r_0)((\hat{x}_{0fp1} - \xi_{fp1})n_1(\hat{x}_{0fp1}) + (\hat{x}_{0fp2} - \xi_{fp2})n_2(\hat{x}_{0fp2}))$.

Розв'яжемо лінійну систему рівнянь (13)-(17) відносно C_f, g_p^f. при $p = \overline{1,4N}$. Підставивши отримані значення у (11), одержимо вираз для температурного поля T^{f*}.

Отже, ми отримали алгоритм для розв’язування задачі променево-кондуктивного теплообміну між тримачем та корпусом фотоелектронного приладу, який описується такими кроками:

1. Присвоюємо температурному полю T^{if*} початкове значення T^{0f*} з (9) (задача теплопровідності за відсутності опромінення).

2. Підставляємо T^{if*} в систему рівнянь для густин падаючих променевих енергій у вузлах і розв’язуємо її відносно $E_{wv1}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv5}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv8}^{0\Pi\zeta}$, $\zeta = \{g, f\}$.

3. Отримані значення $E_{wv1}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv5}^{0\Pi\zeta}$, $E_{wv8}^{0\Pi\zeta}$ підставляємо в систему рівнянь (13)-(17) і розв’язуємо її відносно C_f, g_p^f, $p = \overline{1,4N}$.

4. Значення C_f, g_p^f знайдені в пункті 3 підставляємо в (11). Внаслідок отримаємо $T^{(i+1)f}$.

5. Робимо перевірку :

$$T^{(i+1)f} - T^{if} < \varepsilon \tag{18}$$

6. Якщо нерівність (18) не виконується, то переприсвоюємо $T^{if} = T^{(i+1)f}$ і переходимо до пункту 2.

Висновок

Проведені дослідження показали, що модель, яка базується на врахуванні складного нелінійного взаємозв'язку явищ кондуктивного та променевого теплообміну, дає змогу точніше описати перенос теплової енергії в фотоелектронних пристроях, ніж моделі, що враховують тільки променевий або тільки кондуктивний теплообмін. Це дає можливість досконаліше вибрати режими охолодження для активних елементів та збільшити ступінь ізотермічності підкладки приймального фотоелектронного елемента, що зменшує рівень спотворень у прийнятті зображень.

1. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. М., 1981. 2. Сперроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л. 1971. 3. Белоногов Е. К. Постановка и методû решения обратнûх задач радиационного теплообмена. // ИФЖ. Минск, 1989. Т 56. №3. С. 491-498. 4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 5. Грицько Є.Г., Вовк О.М., Шуміліна Н.В. Моделювання променевого теплообміну між тримачем та корпусом фотоелектронного приладу // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”, 1999. №382. С.17-22. 6. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984.