Тобто FD-метод є експоненційно збіжним.

Наслідок 2.1. З (2.20) випливають двосторонні явні апріорні оцінки для власних функцій задачі (1.1), (1.2):

$$\begin{aligned}&\overset{m}{u}{}^{\pm}_{2n}(x)-\left[2+\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\|\bar{q}\|_{\infty}}{2\pi m}\right]^{1/2}\frac{(\beta_n)^{m+1}}{1-\beta_n}\frac{(2m-1)!!}{2\cdot(2m+2)!!}\le u^{\pm}_{2n}(x)\le\\ &\le\overset{m}{u}{}^{\pm}_{2n}(x)+\left[2+\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\|\bar{q}\|_{\infty}}{2\pi m}\right]^{1/2}\frac{(\beta_n)^{m+1}}{1-\beta_n}\frac{(2m-1)!!}{2\cdot(2m+2)!!}.\end{aligned}\qquad(2.21)$$

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. К., 1977. 2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М., 1986. 3. Бандырский Б.Й., Макаров В.Л., Уханёв О.Л. Достаточные условия сходимости некласических асимптотических разложений для задачи Штурма-Лиувилля с периодическими условиями // Дифф. уравнения. 1999. Т.35. № 3. С. 267-278. 4. Макаров В.Л. О функционально-дискретном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // ДАН СССР. 1991. Т.320. № 1. С. 34-39. 5. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем. заметки. 1998. Т.64. Вып.4. С. 558-563. 6. Courant R., Gilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York: Intersience, 1953. Vol.1. 7. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

УДК 517.92

Й. Р. Желізняк
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто застосування методу диференціювання за параметром для побудови розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром у правих частинах.

The application of a method of differentiation on parameter for construction of the decision of a task Cauchy for system of the ordinary differential equations with small parameter in the right parts is considered.

Теорема 1.
Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\ldots,y_n,\varepsilon), & (1)\\ y_i(x_0)=y_{i0}, & (2)\end{cases}$$

де функції $f_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon,)$ – визначені в деякій області D: $\{|x-x_0|<a<\infty,$ $|y_i-y_{i0}|<b_i<\infty,\ 0\le\varepsilon\le 1\ \}$, i = 1,2,..., n, мають в D неперервні похідні за своїми аргументами до другого порядку включно, ε – малий параметр. Нехай відомий розв'язок задачі (1)-(2) при ε =0: $y_i=\varphi_{i0}(x)$, де $\varphi_{i0}(x)$ – неперервно – диференційовні функції і нехай в D існують неперервні похідні $\dfrac{dy_i}{d\varepsilon}, i=1,2,\dots,n$. Тоді розв'язок задачі (1)-(2) можна представити у вигляді рівномірно-збіжних рядів

$$y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\dots+\eta_{im}(x,\varepsilon)+\dots,$$

де $\eta_{is}(x,\varepsilon)$, i = 1,2,3, ..., n, s = 0,1,2,...,m, є розв'язки задачі Коші:

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{is}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{1s},\dots,\varphi_{ns},\varepsilon)-\dfrac{d\varphi_{is}}{d\varepsilon},\\ \eta_{is}|_{\varepsilon=0}=0,\end{cases}$$

$$\varphi_{is+1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\dots+\eta_{is}(x,\varepsilon),$$

а $F_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{k=1}^{n}M_{ik}(x,\sigma,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)\times\dfrac{\partial f_k(\sigma,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\sigma$, M_{ik} – елементи матриці Коші [2] задачі (3)-(4).

Доведення.

Диференціюємо (1)-(2) за параметром ε [3,4]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial\varepsilon\,\partial x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial f_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)}{\partial y_k}\cdot\dfrac{\partial y_k}{\partial\varepsilon}+\dfrac{\partial f_i(x,y_1,\dots y_n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}, & (3)\\ \dfrac{\partial y_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{x=x_0}=0,\quad i=1,2,\dots,n. & (4)\end{cases}$$

Міняємо в (3) порядок диференціювання і розв'язуємо лінійну задачу Коші відносно $\dfrac{\partial y_i}{\partial\varepsilon}, i=1,2,...,n$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial\varepsilon}\right)}{\partial x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial f_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)}{\partial y_k}\cdot\dfrac{\partial y_k}{\partial\varepsilon}+\dfrac{\partial f_i(x,y_1,\dots y_n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon},\\ \dfrac{\partial y_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{x=x_0}=0,\quad i=1,2,\dots,n.\end{cases}$$

У результаті одержимо

$$\begin{cases}\dfrac{dy_i}{d\varepsilon}=F_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon), & (5)\\ y_i|_{\varepsilon=0}=\varphi_{i0}(x), & (6)\end{cases}$$

де $F_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)=\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{k=1}^{n}M_{ik}(x,\sigma,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)\cdot\dfrac{\partial f_k(\sigma,y_1,\dots,y_n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\sigma$, M_{ik} – елементи матриці Коші [2] задачі (3)-(4). Представимо розв'язок задачі (5)-(6) у вигляді

$$y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\rho_{i0}(x,\varepsilon), \quad i=1,2,\dots,n, \tag{7}$$

де $\rho_{i0}(x,\varepsilon)$ – деякі залишки. Підставляючи (7) в (5), одержимо

$$\frac{d\varphi_{i0}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i0}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10}+\rho_{10},\dots,\varphi_{n0}+\rho_{n0},\varepsilon),\ i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

Розкладемо праву частину (8) в ряд Тейлора [1] до першого порядку включно. Одержимо

$$\frac{d\rho_{i0}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10}+\theta_1\rho_{10},...,\varphi_{n0}+\theta_n\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k0}(t,\varepsilon)dt,$$

$$0\le\theta_i\le 1,\ i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Представимо залишки $\rho_{i0}(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$\rho_{i0}(x,\varepsilon)=\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\rho_{i1}(x,\varepsilon). \tag{10}$$

Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{i0}}{d\varepsilon}+\frac{d\eta_{i0}}{d\varepsilon}&=F_i(x,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)+\\&+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10}+\theta_1\rho_{10},...,\varphi_{n0}+\theta_n\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k0}(t,\varepsilon)dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Функції $\eta_{i0}(x,\varepsilon)$ вибираємо так, щоб вони були розв'язками задачі

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{i0}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10},\dots,\varphi_{n0},\varepsilon), & (12)\\ \eta_{i0}\big|_{\varepsilon=0}=0. & (13)\end{cases}$$

Для залишків $\rho_{i1}(x,\varepsilon), i=\overline{1,n},$ маємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10}+\theta_1\rho_{10},\dots,\varphi_{n0}+\theta_n\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k0}(t,\varepsilon)dt, & (14)\\ \rho_{i1}\big|_{\varepsilon=0}=0. & (15)\end{cases}$$

Тепер за нове початкове наближення беремо $\varphi_{i1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)$,а новими залишками будуть $\rho_{i1}(x,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}.$ Розв'язок задачі (5)-(6) шукаємо у вигляді $y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i1}(x,\varepsilon)+\rho_{i1}(x,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$, і підставляємо в (5)

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11}+\rho_{11},\dots,\varphi_{n1}+\rho_{n1},\varepsilon),\ i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Розкладаємо праву частину в (16) в ряд Тейлора до першого порядку включно

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11}+\theta_1\rho_{11},...,\varphi_{n1}+\theta_n\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt, \tag{17}$$

$$0\le\theta_i\le 1, i=\overline{1,n}.$$

Представимо залишки $\rho_{i1}(x,\varepsilon)$ у вигляді $\rho_{i1}(x,\varepsilon)=\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\rho_{i2}(x,\varepsilon)$.

Підставляючи $\rho_{i1}(x,\varepsilon)$ в (17), одержимо

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i2}}{d\varepsilon}+\frac{d\eta_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon)+ + \sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11}+\theta_1\rho_{11},...,\varphi_{n1}+\theta_n\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt \quad (18)$$

Функції $\eta_{i1}(x,\varepsilon)$ вибираємо так, щоб вони були розв'язками задачі

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11},\dots,\varphi_{n1},\varepsilon)-\dfrac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon} & (19)\\ \eta_{i1}\big|_{\varepsilon=0}=0. & (20)\end{cases}$$

Для залишків $\rho_{i2}(x,\varepsilon), i=\overline{1,n}$, маємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho_{i2}}{d\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11}+\theta_1\rho_{11},\dots,\varphi_{n1}+\theta_n\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt, & (21)\\ \rho_{i2}\big|_{\varepsilon=0}=0. & (22)\end{cases}$$

Тепер за нове початкове наближення беремо $\varphi_{i2}(x,\varepsilon)=\varphi_{i1}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)$,а новими залишками будуть $\rho_{i2}(x,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$. Розв'язок задачі (5)-(6) шукаємо у вигляді $y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i2}(x,\varepsilon)+\rho_{i2}(x,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, підставляємо в (5) і т.д. У результаті розв'язок задачі буде мати вигляд

$$y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\ldots+\eta_{im}(x,\varepsilon)+\rho_{im+1}(x,\varepsilon), \quad (23)$$

де $\eta_{is}(x,\varepsilon)$, i = 1,2,3, ..., n,s = 0,1,2,...,m, є розв'язки задачі Коші

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{is}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{1s},\dots,\varphi_{ns},\varepsilon)-\dfrac{d\varphi_{is}}{d\varepsilon}, & (24)\\ \eta_{is}\big|_{\varepsilon=0}=0, & (25)\end{cases}$$

де $\varphi_{is+1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\ldots+\eta_{is}(x,\varepsilon)$, s = 0,1,2,..., i = 1,2,..., n.

Для залишків $\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=y_i(x,\varepsilon)-\varphi_{i\,m+1}(x,\varepsilon)$ маємо

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho_{i\,m+1}}{d\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\dfrac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1m}+\theta_1\rho_{1m},\dots,\varphi_{nm}+\theta_n\rho_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{km}(t,\varepsilon)dt,\\ \rho_{i\,m+1}\big|_{\varepsilon=0}=0.\end{cases}$$

Звідси

$$\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1m}+\theta_1\rho_{1m},\dots,\varphi_{nm}+\theta_n\rho_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{km}(t,\varepsilon)dt\,d\varepsilon.$$

Оцінимо залишки $\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=y_i(x,\varepsilon)-\varphi_{i\,m+1}, i=\overline{1,n}$. Так як функції $f_i(x,y_1,\dots,y_n,\varepsilon), i=\overline{1,n}$, мають неперервні похідні в D до другого пор'ядку включно, а $|\rho_{i0}|=|y_i-\varphi_{i0}|\le M$, $M=$ const, то

$$\left|\rho_{i1}\right| \le \int_0^{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} K\cdot M\,dt\,d\varepsilon = \varepsilon(x-x_0)\cdot K\cdot M\ ,$$

$$\left|\rho_{i2}\right| \le \int_0^{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} K\cdot\varepsilon\cdot(t-x_0)\cdot K\cdot M\,dt\,d\varepsilon = \varepsilon^2(x-x_0)^2\cdot K^2\cdot M/2^2\ ,$$

$$\left|\rho_{i3}\right| \le \int_0^{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} K\cdot\varepsilon^2\cdot(t-x_0)^2\cdot K^2\cdot M/2^2\,dt\,d\varepsilon = \varepsilon^3(x-x_0)^3\cdot K^3\cdot M/(3!)^2\ ,$$

і т.д. Внаслідок отримаємо $\left|\rho_{im}\right| \le \dfrac{(\varepsilon\cdot(x-x_0)\cdot K)^m\cdot M}{(m!)^2}\ ,i=\overline{1,n},m=1,2,3,\ldots$

При $m\to\infty:\rho_{im}\to 0$. Отже, послідовність $\varphi_{i0},\varphi_{i1},\varphi_{i2},\ldots,\varphi_{im},\ldots,i=\overline{1,n},$ рівномірно збігається до розв’язку $y_i(x,\varepsilon)$ нашої задачі (1)-(2) в області D, що і треба було довести.

Підвищення гладкості правих частин впливає на швидкість збіжності рядів до розв’язку вихідної задачі.

Теорема 2.

Розглянемо задачу Коші (1)-(2) для системи звичайних диференційних рівнянь, де функції $f_i(x,y_1,\ldots,y_n,\varepsilon,)$ – визначені в деякій області D: $\{\left|x-x_0\right|<a<\infty,\quad \left|y_i-y_{i0}\right|<b_i<\infty,$ $0\le\varepsilon\le 1\ \}$, i=1,2,...,n, мають в D неперервні похідні за своїми аргументами до третього порядку включно, ε – малий параметр. Нехай відомий розв’язок задачі (1)-(2) при ε =0: $y_i=\varphi_{i0}(x)$, де $\varphi_{i0}(x)$ – неперервно – диференційовані функції і нехай в D існують неперервні похідні $\dfrac{dy_i}{d\varepsilon},i=1,2,\ldots,n$. Тоді ряди

$$y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\ldots+\eta_{im}(x,\varepsilon)+\ldots,$$

рівномірно збігаються до розв’язку задачі Коші (1)-(2), де $\eta_{is}(x,\varepsilon)$, i = 1,2,3, ..., n, s = 0,1,2,...,m, є розв’язки задачі Коші

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{is}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{1s},\ldots,\varphi_{ns},\varepsilon)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1s},\ldots,\varphi_{ns},\varepsilon)}{\partial y_k}\eta_{ks}(t,\varepsilon)dt-\frac{d\varphi_{is}}{d\varepsilon}\ ,\\ \eta_{is}\big|_{\varepsilon=0}=0,\quad i=\overline{1,n},\end{cases}$$

де $\varphi_{i\,s+1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\ldots+\eta_{is}(x,\varepsilon,)$, а $F_i(x,\varphi_{1s},\ldots,\varphi_{ns},\varepsilon)$ є розв’язками задачі (3)-(4).

Доведення.

Диференціючи (1)-(2) за параметром ε, і за аналогією з теоремою 1,представивши розв’язок задачі (5)-(6) у вигляді (7), підставимо його в (8). Розкладемо праву частину (8) в ряд Тейлора [1] до другого порядку включно. Одержимо

$$\frac{d\rho_{i0}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k0}(t,\varepsilon)dt+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{k,s=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{10}+\theta_{10}\rho_{10},\ldots,\varphi_{n0}+\theta_{n0}\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{k0}(t,\varepsilon)\rho_{s0}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1 \tag{26}$$

$0 \le \theta_{i0} \le 1, i=\overline{1,n}$. Представимо залишки $\rho_{i0}(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$\rho_{i0}(x,\varepsilon)=\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\rho_{i1}(x,\varepsilon). \qquad (27)$$

Підставляючи (27) в (26), одержимо

$$\frac{d\eta_{i0}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10},...,\varphi_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\eta_{k0}(t,\varepsilon)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10}\ldots,\varphi_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\sum_{k,s=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{10}+\theta_{10}\rho_{10},\ldots,\varphi_{n0}+\theta_{n0}\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{k0}(t,\varepsilon)\cdot\rho_{s0}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1,$$

$$0\le\theta_{i0}\le 1,\ i=\overline{1,n}. \qquad (28)$$

Функції $\eta_{i0}(x,\varepsilon)$ вибираємо так, щоб вони були розв'язками задачі

$$\begin{cases}\dfrac{d\eta_{i0}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{10},\ldots,\varphi_{n0},\varepsilon)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10},\ldots,\varphi_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\eta_{k0}(t,\varepsilon)dt\\ \eta_{i0}\big|_{\varepsilon=0}=0,\quad i=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Для залишків $\rho_{i1}(x,\varepsilon), i=\overline{1,n}$, маємо задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{10}\ldots,\varphi_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt+\\ +\dfrac{1}{2!}\displaystyle\sum_{k,s=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{10}+\theta_{10}\rho_{10},\ldots,\varphi_{n0}+\theta_{n0}\rho_{n0},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{k0}(t,\varepsilon)\rho_{s0}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1,\\ \rho_{i1}\big|_{\varepsilon=0}=0,\quad i=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Тепер за нове початкове наближення беремо $\varphi_{i1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)$,а новими залишками будуть $\rho_{i1}(x,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$. Розв'язок задачі (5)-(6) шукаємо у вигляді $y_i(x,\varepsilon)=\varphi_{i1}(x,\varepsilon)+\rho_{i1}(x,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}$, і підставляємо в (5)-(6). Одержимо

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11}+\rho_{11},\ldots,\varphi_{n1}+\rho_{n1},\varepsilon), i=\overline{1,n}. \qquad (29)$$

Розкладаємо праву частину в (29) в ряд Тейлора до другого порядку включно

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon}+\frac{d\rho_{i1}}{d\varepsilon}=F_i(x,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon)+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k1}(t,\varepsilon)dt+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\sum_{k,s=1}^{n}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{11}+\theta_{11}\rho_{11},\ldots,\varphi_{n1}+\theta_{n1}\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{k1}(t,\varepsilon)\cdot\rho_{s1}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1,$$

$$0 \le \theta_{i1} \le 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{30}$$

Представимо залишки $\rho_{i1}(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$\rho_{i1}(x,\varepsilon) = \eta_{i1}(x,\varepsilon) + \rho_{i2}(x,\varepsilon). \tag{31}$$

Підставляючи (31) в (30), одержимо

$$\frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon} + \frac{d\eta_{i1}}{d\varepsilon} + \frac{d\rho_{i2}}{d\varepsilon} = F_i(x,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11},...,\varphi_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k} \eta_{k1}(t,\varepsilon)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11} \ldots,\varphi_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k} \rho_{k2}(t,\varepsilon)dt +$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \sum_{k,s=1}^{n} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{11} + \theta_{11}\rho_{11},\ldots,\varphi_{n1} + \theta_{n1}\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k \partial y_s} \rho_{k1}(t,\varepsilon) \cdot \rho_{s1}(t_1,\varepsilon)dt\, dt_1,$$

$$0 \le \theta_{i1} \le 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{32}$$

Функції $\eta_{i1}(x,\varepsilon)$ вибираємо так, щоб вони були розв'язками задачі

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_{i1}}{d\varepsilon} = F_i(x,\varphi_{11},\ldots,\varphi_{n1},\varepsilon) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11},\ldots,\varphi_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k} \eta_{k1}(t,\varepsilon)dt - \frac{d\varphi_{i1}}{d\varepsilon} & (33) \\ \eta_{i1}\big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad i = \overline{1,n}. & (34) \end{cases}$$

Для залишків $\rho_{i2}(x,\varepsilon), i = \overline{1,n},$ маємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_{i2}}{d\varepsilon} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{11} \ldots,\varphi_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k} \rho_{k2}(t,\varepsilon)dt + & (35) \\ + \dfrac{1}{2!} \cdot \displaystyle\sum_{k,s=1}^{n} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{11} + \theta_{11}\rho_{11},\ldots,\varphi_{n1} + \theta_{n1}\rho_{n1},\varepsilon)}{\partial y_k \partial y_s} \rho_{k1}(t,\varepsilon) \cdot \rho_{s1}(t_1,\varepsilon)dt\, dt_1, & \\ \rho_{i2}\big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad i = \overline{1,n}. & (36) \end{cases}$$

Тепер за нове початкове наближення беремо $\varphi_{i2}(x,\varepsilon) = \varphi_{i1}(x,\varepsilon) + \eta_{i1}(x,\varepsilon)$,а новими залишками будуть $\rho_{i2}(x,\varepsilon),\ i = \overline{1,n}.$ Розв'язок задачі (5)-(6) шукаємо у вигляді $y_i(x,\varepsilon) = \varphi_{i2}(x,\varepsilon) + \rho_{i2}(x,\varepsilon),\ i = \overline{1,n}$, і підставляємо в (5)-(6) і т.д. . У результаті розв'язок нашої задачі одержимо у вигляді

$$y_i(x,\varepsilon) = \varphi_{i0}(x) + \eta_{i0}(x,\varepsilon) + \eta_{i1}(x,\varepsilon) + \ldots + \eta_{im}(x,\varepsilon) + \rho_{im+1}(x,\varepsilon) \tag{37}$$

де $\eta_{is}(x,\varepsilon)$, i = 1,2,3, ..., n,s = 0,1,2,...,m, є розв'язки задачі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_{is}}{d\varepsilon} = F_i(x,\varphi_{1s},\ldots,\varphi_{ns},\varepsilon) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1s},\ldots,\varphi_{ns},\varepsilon)}{\partial y_k} \eta_{ks}(t,\varepsilon)dt - \frac{d\varphi_{is}}{d\varepsilon} & (38) \\ \eta_{is}\big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad i = \overline{1,n}, & (39) \end{cases}$$

де

$$\varphi_{i\,s+1}(x,\varepsilon)=\varphi_{i0}(x)+\eta_{i0}(x,\varepsilon)+\eta_{i1}(x,\varepsilon)+\ldots+\eta_{is}(x,\varepsilon), \tag{40}$$

$s=0,1,2,\ldots$. Для залишків $\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=y_i(x,\varepsilon)-\varphi_{i\,m+1}(x,\varepsilon)$ маємо

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho_{i\,m+1}}{d\varepsilon}=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1m}\ldots,\varphi_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k\,m+1}(t,\varepsilon)dt+\\ +\dfrac{1}{2!}\sum\limits_{k,s=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{1m}+\theta_{1m}\rho_{1m},\ldots,\varphi_{nm}+\theta_{nm}\rho_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{km}(t,\varepsilon)\cdot\rho_{sm}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1,\\ \rho_{i\,m+1}\big|_{\varepsilon=0}=0,\quad i=\overline{1,n},\ \ m=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Дослідимо залишки $\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon),\ \ i=\overline{1,n},\ \ m=0,1,2,\ldots$. Від останньої задачі перейдемо до системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

$$\rho_{i\,m+1}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial F_i(x,t,\varphi_{1m}\ldots,\varphi_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k}\rho_{k\,m+1}(t,\varepsilon)dt\,d\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{k,s=1}^{n}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 F_i(x,t,t_1,\varphi_{1m}+\theta_{m1}\rho_{1m},\ldots,\varphi_{nm}+\theta_{nm}\rho_{nm},\varepsilon)}{\partial y_k\partial y_s}\rho_{km}(t,\varepsilon)\cdot\rho_{sm}(t_1,\varepsilon)dt\,dt_1\,d\varepsilon.$$

Звідси одержимо

$$\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}R_{ik}(x,\varphi_{1m},\ldots,\varphi_{nm},t,\varepsilon)V_k(t,\varphi_{1m}+\theta_{1m}\rho_{1m},\ldots,\varphi_{nm}+\theta_{nm}\rho_{nm},\varepsilon)dt\,d\varepsilon+$$
$$+V_i(x,\varphi_{1m}+\theta_{1m}\rho_{1m},\ldots,\varphi_{nm}+\theta_{nm}\rho_{nm},\varepsilon), \tag{41}$$

де R_{ik} – елементи резольвенти системи (41), V_i – вільні члени системи. Оцінимо залишки $\rho_{i\,m+1}(x,\varepsilon)=y_i(x,\varepsilon)-\varphi_{i\,m+1},i=\overline{1,n}$. Оскільки функції $f_i(x,y_1,\ldots,y_n,\varepsilon),i=\overline{1,n},$ мають неперервні похідні в D до третього пор'ядку включно, а $|\rho_{i0}|=|y_i-\varphi_{i0}|\le M$, $M=$const, то виходячи з (41), одержимо

$$|\rho_{i1}|\le\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}K_1\cdot M^2dt\,d\varepsilon+\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}K_2\cdot M^2dt\,d\varepsilon\le K\cdot M^2\cdot\varepsilon\cdot(x-x_0),$$

$$|\rho_{i2}|\le\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}K_1\cdot K^2\cdot M^4\cdot\varepsilon^2\cdot(x-x_0)^2dt\,d\varepsilon+\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{x_0}^{x}K_2\cdot K^2M^4\cdot\varepsilon^2\cdot(x-x_0)^2dt\,d\varepsilon\le$$
$$\le K^3\cdot M^4\cdot\varepsilon^3\cdot(x-x_0)^3/(3^2),$$

і т.д. У результаті маємо

$$|\rho_{im}|\le\frac{(K\cdot\varepsilon\cdot(x-x_0)\cdot M)^{2^m}}{4^{2^m}}\cdot\frac{1}{K\cdot\varepsilon\cdot(x-x_0)},$$

де K – константа, яка не залежить від m. Отже, якщо $\dfrac{K\cdot\varepsilon\cdot(x-x_0)\cdot M}{4}<1$, то $\rho_m\to 0$ при $m\to\infty$ і послідовність $\varphi_{i0},\varphi_{i1},\varphi_{i2},\ldots,\varphi_{im},\ldots$ рівномірно збігається до розв'язку $y_i(x,\varepsilon)$,

$i = \overline{1,n}$ нашої задачі (1)-(2) в області D, що і треба було довести.

1. В.Вольтерра. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М., 1982. 2. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М., 1967. 3. А.А. Дородницын. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений. М., 1982. 4. Желизняк И.Р. Построение решения дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром.Вест. Львов. политехн. ин-та, 1986, №202. С.63-64.

УДК 512.64

В.М. Петричкович
Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, відділ алгебри

ПРО НАПІВСКАЛЯРНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Узагальнено для довільних многочленних матриць результат П.С. Казімірського і автора про звідність многочленних матриць повних рангів напівскалярними еквівалентними перетвореннями до трикутних виглядів з інваріантними множниками на головних діагоналях.

P.S. Kazimirsky's and author's result on the reducibility of polynomial matrices of full ranks by semiscalar equivalent transformations to triangular forms with the invariant factor along the principal diagonal for any polynomial matrices is generalized.

Нехай $M(m,n,P[x])$ – множина $m \times n$-матриць над кільцем многочленів $P[x]$ з коефіцієнтами із поля P. Нагадаємо, що матриці $A_1(x)$, $A_2(x) \in M(m,n,P[x])$ називаються *напівскалярно еквівалентними*, якщо $A_1(x) = UA_2(x)V(x)$ для деяких оборотних матриць $U \in GL(m,P)$ і $V(x) \in GL(n,P[x])$. У роботах [1,2] щодо таких перетворень встановлена спеціальна трикутна форма многочленних матриць та їх наборів над різними полями у випадку $m \le n$ і матриці є повних рангів m. У статті ці результати узагальнені для довільних матриць.

Надалі будемо позначати через $d_k^A(x)$ – найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку, $\mu_k^A(x)$ – k-ий інваріантний множник, $D^A(x)$ – канонічну діагональну форму матриці $A(x) \in M(m,n,P[x])$, тобто

$$D^A(x) = U(x)\ A(x)\ V(x) = diag(\mu_1^A(x), \ldots, \mu_r^A(x), 0, \ldots, 0),\ \mu_r^A(x) \ne 0,$$

для деяких матриць $U(x) \in GL(m,P[x])$, $V(x) \in GL(n,P[x])$.

Лема 1. *Нехай* $A(x) \in M(m,n,P[x])$, $rang A(x) = r > 1$. *Якщо* $\deg d_r^A(x) < |P|$, *то існує рядок*

$$u = \| 1 \ \ u_2 \ \ldots \ u_m \|,\ u_j \in P,\ j = 2, \ldots, m,$$