УДК 51.001.57

А.В. Чабан*, С.А. Дубецький**
Національний університет “Львівська політехніка”,
*кафедра електричних станцій,
**кафедра вищої математики

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСЬКОГО З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАЦІЇ ДЛЯ ОДЕРЖАННЯ РІВНЯННЯ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНОГО ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Запропоновано метод одержання рівняння поперечних коливань пружного лінійного ізотропного середовища на підставі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Для одержання згаданого рівняння було застосовано неконсервативний енергетичний лагранжіан.

The method of receipt of equalization of transversal vibrations of resilient linear light-like environment is offered on the basis of the integral variation principle of Hamilton–Ostrogradsky. Thus during the receipt of the mentioned equalization the unconservative power was applied lagrangian

Вступ. Принцип Гамільтона-Остроградського є одним з найосновніших принципів сучасної прикладної фізики. На його підставі можна одержати переважну більшість фундаментальних законів; але у разі неконсервативних систем цей принцип, своєю чергою, потребує модифікації лаґранжіана, зокрема для дисипативних систем.

У цій роботі пропонується поширити інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського з консервативних систем, які характеризують поперечні коливання лінійного ізотропного середовища, що рухаються під дією потенціальних сил, на неконсервативні системи, що рухаються під дією і потенціальних сил, і сил внутрішньої дисипації. Таке припущення запотребувало модифікувати відому функцію Лаґранжа шляхом уведення в неї внутрішньої дисипації механічної енергії. Модифікація консервативного лагранжіана здійснена на підставі відомої праці американських вчених Вайта і Вудсона [5].

Мета роботи. На підставі запропонованої ідеї модифікації функції Лагранжа (неконсервативний лагранжіан), що входить до інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, одержати диференціальне рівняння поперечних коливань пружного однорідного ізотропного середовища, яке враховує енергію внутрішньої дисипації в системі.

Аналіз результатів останніх досліджень. Існуючі методи одержання рівняння поперечних коливань однорідної пластини й балки з урахуванням дисипації ґрунтуються на механіці Ньютона-Даламбера [4]. Вони вимагають глибокого знання законів теоретичної механіки. Тоді як запропонований у цій роботі підхід до вирішення проблеми уможливлює розв’язання задачі формально, враховуючи функціонал дії для неконсервативної системи. Щодо варіаційних принципів, то одержання рівняння поперечних коливань лінійного ізотропного середовища здійснюється для консервативних систем, що, безперечно, не завжди відповідає реальним постановкам задачі. Адже для практичної більшості прикладних задач очевидна дія узагальнених сил внутрішньої дисипації. Інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського досить широко застосовують для аналізу коливань пружних середовищ без урахування дисипації, наприклад, в працях [1, 2].

Теоретичні засади. Запишемо функціонал дії за Гамільтоном для голономних систем із зосередженими параметрами [3]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L^* dt, \quad L^* = T^* - P^*, \tag{1}$$

де S – дія за Гамільтоном; L^* – функція Лагранжа; T^*, P^* – відповідно кінетична та потенціальна енергії системи.

Запишемо модифіковану функцію Лагранжа [7]:

$$L^* = T^* - P^* + \Phi^* - D^*; \quad \Phi^* = \int_0^t \Phi_p^*\Big|_{t=\tau} d\tau, \tag{2}$$

де Φ^* – функція дисипації енергії; Φ_p^* – дисипативна функція (квадратична форма часових та просторово-часових похідних від функції узагальнених координат); D^* – енергія активних та пасивних сил непотенціального характеру, що діють на систему ззовні; τ – додаткова змінна інтегрування.

Запишемо функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським для систем з розподіленими параметрами, а також умову його стаціонарного значення [3, 7]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V L dV dt; \quad \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V L dV dt = 0, \tag{3}$$

де V – область інтегрування (об’єм).

Тепер функція Лаґранжа L матиме розмірність енергії, поділеної на об’єм (густина енергії).

Принцип Гамільтона-Остроградського стверджує таке: “З усієї множини віртуальних рухів голономної системи лише для реального руху функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським одержує стаціонарне значення”. Якщо система характеризується мінімальними енергетичними затратами, то вона здійснює реальний рух (це випливає з принципу Мопертюї) і функціонал енергії цієї системи (внутрішній інтеграл у (3)) одержує стаціонарне значення. Тобто, якщо функціонал енергії отримує стаціонарне значення, то й функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським також отримує стаціонарне значення.

Запишемо функціонал енергії та умову його стаціонарності:

$$I = \int_V L dV; \qquad \delta I = \delta\int_V L dV = 0. \tag{4}$$

Функцію Лаґранжа запишемо так [3, 7]:

$$L = L(q_{xx}, q_{yy}, q_{zz}, q_{xxt}, q_{yyt}, q_{zzt}, q_t, t), \tag{5}$$

де q – функція узагальнених координат,

$$q_{ii} = \frac{\partial^2 q}{\partial i^2}; \quad q_{iit} = \frac{\partial^3 q}{\partial i^2 \partial t} \quad (i = x, y, z); \; q_t = \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{6}$$

Для спрощення одержання рівняння поперечних коливань вважатимемо, що коливання пружного середовища є малими за амплітудою порівняно з розмірами об’єкта. За згаданих допущень густини енергій визначаємо так [3, 6]:

$$T = \frac{\rho}{2}(u_t)^2; \quad P = \frac{\mu}{2}(\Delta u)^2; \quad \Phi_2 = \frac{\xi}{2}\int_0^t (\Delta u_t)^2_{|t=\tau} d\tau; \quad D = 0, \tag{7}$$

де $\boldsymbol{\Delta}$ – оператор Лапласа; $u(x, y, z, t)$ – функція відхилення амплітуди механічної хвилі в пружному середовищі під час поперечних коливань; μ – коефіцієнт, що характеризує пружні властивості ізотропного середовища; ξ – коефіцієнт внутрішньої дисипації в пружному середовищі.

Тоді неконсервативний лаґранжіан (5) за умов (7) та $q = u(x, y, z, t)$ запишемо так:

$$L = \frac{\rho}{2}(q_t)^2 - \frac{\mu}{2}\left(q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}\right)^2 + \frac{\xi}{2}\int_0^t \left(q_{xxt} + q_{yyt} + q_{zzt}\right)^2_{|t=\tau} d\tau. \tag{8}$$

Підставляючи вираз (5) за умови (6) у функціонал (4), одержимо остаточно рівняння Ейлера з врахуванням дисипації [7]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial L}{\partial q_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial L}{\partial q_{yy}}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial L}{\partial q_{zz}}-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{xxt}}-\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{yyt}}-\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{zzt}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_t}=0. \tag{9}$$

Підставляючи вираз (8) в рівняння (9) та розписуючи послідовно всі доданки, попередньо змінюючи черговість диференціювання та застосовуючи теорему про похідну інтеграла за верхньою межею, отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial L}{\partial q_{xx}}=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial q_{xx}}\left(q_{xx}+q_{yy}+q_{zz}\right)^2=-\mu(q_{xxxx}+q_{xxyy}+q_{xxzz}); \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial L}{\partial q_{yy}}=-\mu(q_{yyyy}+q_{yyxx}+q_{yyzz});\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial L}{\partial q_{zz}}=-\mu(q_{zzzz}+q_{zzxx}+q_{zzyy}); \tag{11}$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{xxt}}=-\frac{\xi}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial q_{xxt}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left(q_{xxt}+q_{yyt}+q_{zzt}\right)^2_{|t=\tau}d\tau=-\xi(q_{xxxxt}+q_{xxyyt}+q_{xxzzt}); \tag{12}$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{yyt}}=-\xi(q_{yyyyt}+q_{yyxxt}+q_{yyzzt});\quad -\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_{zzt}}=-\xi(q_{zzzzt}+q_{zzxxt}+q_{zzyyt});$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_t}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho q_t=-\rho q_{tt}. \tag{13}$$

Додавши вирази (10)–(13), отримаємо

$$\rho q_{tt}=-\mu\left(q_{xxxx}+q_{yyyy}+q_{zzzz}+2q_{xxyy}+2q_{yyzz}+2q_{xxzz}\right)-\xi\left(q_{xxxxt}+q_{yyyyt}+\right.$$
$$\left.+q_{zzzzt}+2q_{xxyyt}+2q_{yyzzt}+2q_{xxzzt}\right)\equiv-\mu\nabla^4 q-\xi\nabla^4 q_t. \tag{14}$$

Або, використовуючи умову $q=u(x,y,z,t)$, запишемо остаточно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{\rho}\nabla^4 u-\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^4 u\equiv-\frac{\mu}{\rho}\Delta^2 u-\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u. \tag{15}$$

Практичний інтерес становить рівняння (15) за умови $i=x,y$ (коливання пластини) [3]:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{\rho_S}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)-\frac{\xi}{\rho_S}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}+2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^5 u}{\partial y^4\partial t}\right), \tag{16}$$

де ρ_S – поверхнева густина матеріалу пластини; а також, коли $i=x$ (коливання балки) [3, 6]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{\rho_l}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\xi}{\rho_l}\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}, \tag{17}$$

де ρ_l – лінійна густина матеріалу балки.

Вираз (15) репрезентує рівняння поширення амплітуди механічної хвилі в тривимірному середовищі під час поперечних коливань з урахуванням дисипації [3]. На підставі згаданих рівнянь можна з достатнім ступенем адекватності описати пружно-дисипативні властивості пластини й балки під час поперечних коливань.

Висновки. Аналіз поперечних коливань пружного ізотропного середовища доцільно здійснювати на підставі рівнянь (15). Шляхом зменшення порядку декартового простору згадане рівняння (15) можна подати в спрощеному вигляді: для коливання пластини – (16) і для коливання балки – (17). Усі згадані рівняння строго математично одержані на підставі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського з урахуванням дисипації.

1. Булгаков М., Головач І.В., Черниш О.М. Моделювання і аналіз вібраційного процесу викопування коренеплодів буряка // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та *приладобудуванні. – 2006. – С. 39–48. 2. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Згинні коливання фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги мобільного обприскувача з під'єднаним дірчастим трубопроводом // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2006. – С. 48–56. 3. Мышкис А.Д. Математика (специальные курсы). – М.: Наука, 1971. – 632 с. 4. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наук. думка, 1981. – 220 с. 5. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М. – Л.: Энергия, 1964. – 528 с. 6. Филиппов А.А. Колебания деформируемых систем. – М.:Машиностроение, 1970. – 736 с. 7. Чабан А. Застосування інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського для одержання рівнянь крутильних коливань вала // Машинознавство. – 2005. – № 9. – С. 10–14.*

УДК 621.9.048.6

Т.С. Ярошевич
Луцький державний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ПУСКУ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ДЕБАЛАНСНИМ ПРИВОДОМ

Розглянуто задачу розбігу дебалансного збудника, встановленого на тримкому тілі з одним ступенем вільності, який приводиться в рух від асинхронного двигуна. Наведено детальний опис ефекту Зоммерфельда.

The problem of acceleration of unbalanced vibro-exciter placed on carrying rigid body with one degree of freedom set to rotation by electric motor of asynchronous type is considered. The explanation of Zommerfeld's effect is given.

Постановка проблеми. Сфера використання вібраційних машин та пристроїв має стійку тенденцію до подальшого зростання в найрізноманітніших галузях машино- та приладобудування. У багатьох вібраційних машинах та пристроях коливання збуджуються механічними дебалансними віброзбудниками, що приводяться в обертання електродвигунами асинхронного типу.

Завдання, що ставиться перед приводом вібраційної машини, зводиться, насамперед, до збудження заданих коливань тримкого тіла. Необхідною умовою цього є розбіг та вихід на усталений режим обертання ротора двигуна. Вибір потужності двигуна вібромашини відрізняється від аналогічного завдання для випадку машини загального призначення. Вібраційні машини мають специфічну особливість, яка полягає у нерівномірності споживання потужності в різних режимах роботи. Насамперед, це стосується періоду розбігу електродвигуна. У цей період можливе "зависання" швидкості ротора двигуна з обмеженою потужністю (так званого "неідеального" джерела енергії) в області резонансних частот, тобто виникнення ефекту Зоммерфельда. Робота вібромашини в разі прояву ефекту Зоммерфельда відрізняється надмірно великими резонансними коливаннями та „сплеском" енергомісткості, тому традиційні методи розрахунку потужності електродвигуна є непридатними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ґрунтовні теоретичні дослідження таких систем (коливних систем з обмеженим збудженням) наводяться в роботах В.О. Кононенка та його учнів і послідовників [1]. Найповніші бібліографічні відомості щодо досліджень у цьому напрямку наведено в роботі [2] та довіднику [3]. У роботах [4, 5] наведено чисельне моделювання задачі пуску незрівноваженого ротора, встановленого на пружно закріпленій платформі. Експериментальне дослідження перехідних процесів у вібраційних машинах із дебалансним приводом викладено в [6]. З-поміж аналітичних досліджень виділимо статтю [7], в якій методом прямого розділення