

## АНАЛІТИЧНІ СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИЗНАЧЕННЯ ЇХ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

© Приймак М. В., Дмитроца Л. П., Олійник М. З., 2016

Наведено основні здобутки теорії функцій із змінним періодом та виділено задачі їх подальшого вивчення, зокрема задачу «наближення» функцій зі змінним періодом рядами Фур'є та створення відповідних інформаційних технологій їх аналізу. Щоб була можливість перевіряти методи дослідження функції зі змінним періодом, розроблено способи аналітичного задання таких функцій. Записано формули знаходження коефіцієнтів Фур'є та закладено для них основи теорії рядів Фур'є функцій зі змінним періодом.

**Ключові слова:** змінний період, функція зі змінним періодом, коефіцієнти Фур'є функції зі змінним періодом, ряд Фур'є функції зі змінним періодом, інформаційні технології аналізу функцій зі змінним періодом.

Main achievements of function theory with variable period have been described. The tasks aimed at their further study, namely the task of functions with variable period “approximation” Fourier series, and development the appropriate information technologies of their analysis have been emphasized. To make the investigation of the methods of function study with variable period testing possible different ways of analytical definition of such functions have been developed. Formulae of finding Fourier coefficients of the function with variable period have been recorded and the principles of Fourier series theory have been established.

**Key words:** variable period, function with variable period, Fourier coefficients of the function with variable period, Fourier series of the function with variable period, information technologies of functions with variable period investigation.

### Вступ. Загальна постановка проблеми

Один із напрямків інформаційних технологій – це опрацювання інформації, точніше – інформаційних сигналів. Первинною задачею цього напрямку, очевидно, є вибір чи розроблення моделі сигналу. На основі моделі розробляють методи та алгоритми опрацювання. Нарешті, алгоритми реалізують у вигляді програм для комп'ютерів чи інших обчислювальних засобів.

Незважаючи на значну кількість програмних продуктів (Mathcad, Matlab, Statistica, SpeQMathematics тощо), існують сигнали, методи аналізу яких та відповідні програми відсутні. Це зокрема сигнали із змінним періодом. Добре відомим прикладом таких сигналів є електрокардіограми, отримані після дії на організм пацієнта певних збудників, наприклад, фізичного навантаження. Яким же чином досліджувати сигнали із змінним періодом?

Основоположні кроки в цьому напрямку вже зроблено: визначено клас функцій із змінним періодом [1]; досліджено властивості змінного періоду [2, 3], побудовано його оцінку [4], розроблено метод побудови систем ортогональних тригонометричних функцій із змінним періодом та записано їхні зміни періоди [3, 5]. Разом із отриманими результатами ціла низка задач ще очікує свого розв'язання.

Наявність системи тригонометричних функцій із змінним періодом дає змогу ставити питання про побудову теорії рядів Фур'є функцій із змінним періодом. При цьому відкритими залишаються питання визначення коефіцієнтів Фур'є таких функцій, а також наближення їх рядами Фур'є. При розгляді цих та близьких до них задач виникатимуть питання перевірки правильності їх

вирішення на конкретних прикладах, використовуючи для цього аналітично задані функції зі змінним періодом. Проте таких способів задання поки що не існує.

Мета роботи – розробити способи аналітичного задання функцій із змінним періодом і записати їх змінні періоди та започаткувати інформаційні технології дослідження таких функцій, зокрема, розробити формули та алгоритми знаходження коефіцієнтів Фур'є, обчислення частинних сум ряду Фур'є, а також провести оцінку наближення ряду до досліджуваних функцій з використанням нерівності Бесселя.

## 1. Основні результати вивчення функцій зі змінним періодом

Враховуючи, що функції зі змінним періодом – порівняно новий об'єкт дослідження, нагадаємо деякі результати із теорії цих функцій, отримані раніше.

### 1.1. Функції зі змінним періодом та їхні змінні періоди

Визначення функції із змінним періодом як моделі відповідних сигналів вперше було введено в [1]. Функція  $f(x)$  дійсного аргументу  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$  називається функцією із змінним періодом  $T(x) > 0$ , якщо для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)),$$

причому період  $T(x)$  є диференційовною функцією.

Із (1) при  $T(x) = T = \text{const}$  випливає, що  $f$  є періодичною функцією з періодом  $T$  у звичайному розумінні. Вважатимемо надалі, що область визначення  $I = [a, b]$  в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Відомо, що для періодичної функції  $g(x)$  з постійним періодом  $T$  виконується рівність  $g(x) = g(x + T) = g(x - T)$ . Для функції  $f(x)$  із змінним періодом  $T(x)$  аналогічна рівність  $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$  у загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент  $x$  зменшується, змінний період повторюваності функції  $f(x)$  позначимо через  $T^-(x)$ . При цьому, якщо  $x$  і  $x - T^-(x)$  належать області визначення  $I$ , то

$$f(x) = f(x - T^-(x)).$$

Не вдаючись до аналітичних міркувань, зауважимо, що між періодами  $T(x)$  і  $T^-(x)$  існує взаємозв'язок, що виражається формулами

$$T(x) = T^-(x + T(x)), \quad T^-(x) = T(x - T^-(x)).$$

Крім визначення функції із змінним періодом розроблено способи задання найпростіших функцій із змінним періодом – тригонометричних функцій, записані їх змінні періоди та розроблено методи побудови ортогональних тригонометричних систем із змінним періодом.

### 1.2. Тригонометричні функції зі змінним періодом та їхні періоди

Найпростішими функціями із змінним періодом є тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ . У випадку, коли аргумент  $\alpha$  цих функцій задовольняє умові  $0 < \alpha < 1$ , графіки цих функцій розтягуються, якщо  $\alpha > 1$  – стискаються. Для прикладу на рис. 1 зображено функцію  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$ , (товста лінія) та для порівняння функція  $f_2(x) = \sin x$  (тонка лінія). Аналізуючи графіки, видно, що функція  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$ , із зростанням аргументу «розтягується», тобто її період збільшується. На відрізку  $[0, 30]$  для цієї функції вкладається два періодичних коливання, для функції  $\sin x$  на цьому ж інтервалі розміщується понад чотири коливання.

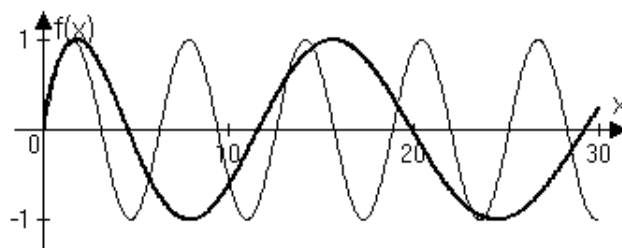


Рис. 1. Функції  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$  (товста лінія),  $f_2(x) = \sin x$  (тонка лінія)

Для функцій  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$  їх змінні періоди  $T_\alpha(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  визначаються так:

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0.$$

$$T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq T(0).$$

Звідси випливає, що для функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$  її зміні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}, x \in [0, \infty).$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}, x \in [T(0), \infty).$$

Графіки цих періодів показано на рис. 2. Для порівняння подано також період функції  $\sin x$ , тобто  $T(x) = T = 2\pi$ .

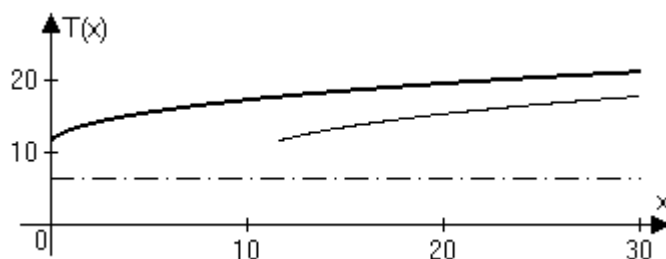


Рис. 2. Змінні періоди для функції  $\sin x^{3/4}$ :  $T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}$  (товста лінія)

$$T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}, x \geq (2\pi)^{4/3} \approx 11.594 \text{ (тонка лінія), та період } T(x) = T = 2\pi$$

для функції  $\sin x$  (штрих-пунктирна лінія)

Поведінка періодів  $T(x)$  та  $T^-(x)$  підтверджує проведений вище аналіз поведінки самої функції  $\sin x^{3/4}$ . Так в точці  $x=0$  період  $T(0)=11.594$ , для  $x=15$  період  $T(15)=18.427$ , що перевищує значення  $T(0)$  і свідчить про його зростання. Період  $T^-(15)=13.519$  є меншим, ніж  $T(15)=18.427$ . Це є підтвердженням поведінки самої функції  $\sin x^{3/4}$ : у бік зростання аргументу вона «розтягується», у бік зменшення – «стискається».

Узагальненням тригонометричних функцій  $\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0$  є функції  $\sin g(x), \cos g(x), x \in I$ , де  $g(x)$  – неперервна, строго зростаюча (спадна), кусково-диференційовна функція, причому в області визначення  $I = (a, b)$  її варіація  $V_a^b(g) \gg 2\pi$ . Якою саме є область визначення  $I$ , залежить від функції  $g(x)$ , і в кожному конкретному випадку визначається окремо.

### 1.3. Ортогональні системи тригонометричних функцій зі змінним періодом

У [3, 5] доведено таку теорему. Тригонометрична система функцій

$$\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

із змінним періодом  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0$  є ортогональною із ваговою функцією  $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  у просторі  $L^2_\rho(x, x + T_\alpha(x))$ , причому норма кожної із функцій цієї системи дорівнює  $\sqrt{\pi}$ .

Зазначимо, що довжина інтервалу ортогональності  $[x, x + T_\alpha(x)]$  вже не є постійною, а змінюється відповідно до значення, якого набуває аргумент  $x \geq 0$  та значення періоду  $T_\alpha(x)$  у цій точці.

Подібно до системи (1) можуть бути утворені інші ортогональні системи тригонометричних функцій зі змінним періодом. Шлях до цього – замість базових функцій  $\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0$  використовувати інші базові функції, наприклад,  $\sin g(x), \cos g(x), x \in I$ .

## 2. Основні напрямки дослідження функцій зі змінним періодом

Маючи клас функцій із змінним періодом, ортогональні системи тригонометричних функцій із змінним періодом, виникає питання: яким чином вивчати такі функції, що при цьому досліджувати і як досліджувати? Звичайно, що тут цілком природно скористатися досвідом дослідження функцій, зокрема періодичних функцій [6, 7], в основу якого покладено «**алгоритм наближення**». Його суть зводиться до заміни досліджуваної функції  $f \in F$ , де  $F$  – клас функцій із змінним періодом (клас наближуваних функцій), іншою функцією  $g \in G$ , де  $G$  – множина наближуваних функцій. У випадку періодичних функцій поширеним апаратом наближення є суми Фур'є за тригонометричною системою.

У нашому випадку для функцій із змінним періодом **алгоритм наближення**, тобто знаходження наближуваної функції, розпадається на такі етапи.

Основні етапи дослідження функцій із змінним періодом:

- Етап 1. Вибір засобів наближення, тобто вибір того сімейства функцій, за допомогою якого здійснюватиметься наближення заданої функції. Одним із засобів є тригонометричні поліноми.
- Етап 2. Вибір способу вимірювання відхилення (похибки) наближуваної функції  $g$  від заданої  $f$ , тобто вибір «віддалі» між  $f$  і  $g$ :  $\rho(f, g)$ . Найчастіше використовують середньоквадратичне наближення, зважене наближення.
- Етап 3. Вибір методу наближення. Це насамперед методи, побудовані на розкладі наближуваної функції в ряд Фур'є за деякою ортогональною системою. У випадку періодичних функцій поширеним апаратом є суми Фур'є за тригонометричною системою.
- Етап 4. Фактична побудова наближуваної функції.
- Етап 5. Оцінювання похибки, що виникає від заміни заданої функції наближуваної її функцією.
- Етап 6. Розроблення алгоритмів, програмного забезпечення і загалом інформаційної системи дослідження та аналізу функцій із змінним періодом

У процесі розроблення теорії кожного із цих етапів і створення відповідного програмного забезпечення та побудови інформаційних технологій етапи можна розбивати на окремі кроки, тобто деталізувати, виділяти в окремі задачі, методи чи алгоритми.

### 2.1. Задання періодичних функцій

"Алгоритм наближення" містить значну кількість задач, основна з яких – це побудова рядів Фур'є для наближуваних функцій. У нашому випадку це можуть бути електрокардіограми зі змінним періодом, про які йшлося вище. Оскільки способів задання функцій зі змінним періодом поки що не існує, спочатку доцільно оглянути способи задання періодичних функцій і по можливості використати їх для розроблення способів задання функцій із змінним періодом.

Аналіз літературних джерел, зокрема [8–10], показує, що для задання періодичних функцій переважно використовують три різновиди способів (методів, підходів). Це графічно-описові способи [9, с. 23–25], аналітичні способи, метод «зсуву» [10, с. 34]. Розглянемо лише основні аналітичні способи.

Аналітично задати періодичну функцію – це певним чином побудувати суперпозицію спеціально підібраних функцій. Серед функцій, що входять до суперпозиції, можуть бути тригонометричні функції, деякі елементарні функції, зокрема показникова і степенева функції. Використовують також функції, що вже не належать до класу елементарних функцій. Це:

а) **модуль** функції  $f$ , тобто  $|f|$ ;

б) **знак** (сигнум) функції:  $sign f = \begin{cases} 1, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ -1, & f < 0. \end{cases}$ ;

в) **дробова частина** функції:  $\{f\} = f - [f]$ , де  $[f]$  – ціла частина.

Наведемо приклади аналітичного задання періодичних функцій:

а) тригонометричні функції  $\sin x, \cos x, tg x, ctg x$ . Найбільше використовують перші дві із цих функцій –  $\sin x$  та  $\cos x$  або їх узагальнення  $A \sin(\omega x + \varphi)$  та  $A \cos(\omega x + \varphi)$ ;

б) показникова функція  $f(x) = a^{g(x)}$  або степенева функція  $f(x) = (g(x))^a$ , де  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція, найчастіше  $g(x) = \sin x$  або  $g(x) = \cos x$ ;

в) модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ , де  $g(x)$  – тригонометрична функція. В більш загальному випадку  $f(x) = h(|g(x)|)$ ,  $h(\bullet)$  є неперервною функцією;

г) **знак** (сигнум) функції:  $f(x) = sign g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція;

д) дробова частина функції:  $f(x) = g(\{x\})$ , де  $g(\bullet)$  – неперервна зростаюча (спадна) функція,  $\{x\}$  – дробова частина.

Приклади аналітичного задання періодичних функцій легко продовжити.

### 2.2. Задання функцій зі змінним періодом та їхні змінні періоди

Подібно до основних способів задання періодичних функцій можуть бути розроблені способи задання функцій із змінним періодом. Основну увагу ми звернемо лише на способи аналітичного задання функцій із змінним періодом, записавши їх у вигляді прикладів.

Для задання функцій із змінним періодом будемо орієнтуватися на розглянуті вище способи отримання періодичних (із постійним періодом) функцій, певним чином їх видозмінюючи. Ось деякі з таких функцій:

а) тригонометричні функції  $\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, tg x^\alpha, ctg x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ . Найбільш використовують перші дві із цих функцій –  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$  або їх узагальнення  $A \sin(k x^\alpha + \varphi)$  та  $A \cos(k x^\alpha + \varphi)$ ;

б) показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де число  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше  $g(x) = \sin x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , або  $g(x) = \cos x^\alpha$ ;

в) степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ , де число  $a$  та функція  $g(x)$  такі самі, як і в пункті 2.1 (а);

г) модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція із змінним періодом;

д) знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція із змінним періодом;

е) дробова частина:  $f(x) = \{g(x)\}^a$ , де  $a > 0$ ,  $\{\bullet\}$  – дробова частина,  $g(x)$  – деяка нелінійна неперервна зростаюча (спадна) функція;

ж) трансформація функцій із змінним періодом.

Розглянуті вище способи отримання функцій із змінним періодом можуть бути розширені із застосуванням до них певних перетворень:

- паралельне перенесення (зсув) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ;
- паралельне перенесення (зсув) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(x + b)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(kx)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow kf(x)$ .

Як і у випадку з періодичними функціями, приклади аналітичного задання функцій із змінним періодом можна продовжити.

### 2.3. Графіки аналітично заданих функцій зі змінним періодом

Наведемо графіки деяких із функцій із змінним періодом та запишемо їхні змінні періоди.

Один із таких графіків для функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$  розглянуто вище і показано на рис. 1.

Приклад 1. Функція  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$ . Її графік – це періодичні коливання прямокутної

форми (рис. 3) із змінним періодом  $T(x) = -x + \left(x^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5}$  (рис. 5, товста лінія).

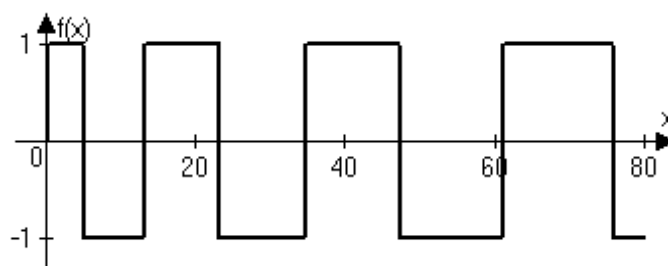


Рис. 3. Графік функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$

Приклад 2. Степенева функція  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$  (рис. 4), її змінний період

$T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$  (рис. 5, тонка лінія)

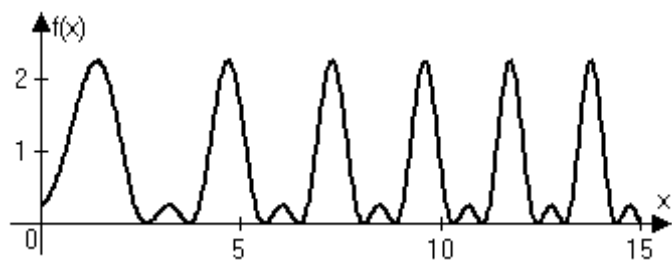


Рис. 4. Графік функції  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$

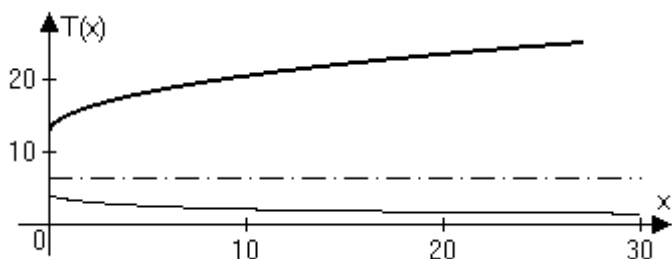


Рис. 5. Змінні періоди  $T(x) = -x + \left(x^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5}$  (товста лінія),  $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$  (тонка лінія) та період  $T = 2\pi$  (штрих-пунктирна лінія)

Приклад 3. Суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»:  $f(x) = \{\log_c x\}$ ,  $x \geq 1$ ,  $c > 1$ . При  $c = 3$  графік функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$  показано на рис. 6. Варто звернути увагу, що для цієї функції її змінний період  $T(x) = x(c-1)$ , тобто є лінійною функцією з коефіцієнтом  $k = c-1$ . Для функції, зображеної на рис. 6, змінний період  $T(x) = 2x$ .

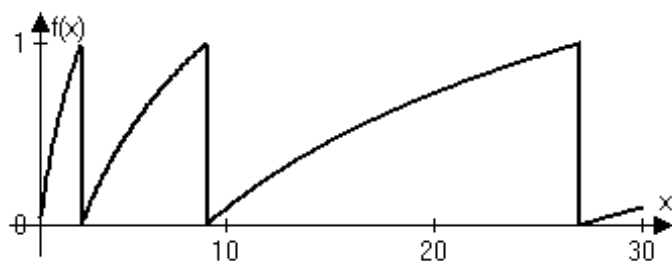


Рис. 6. Графік функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$

### 3. Скалярний добуток, норма, коефіцієнти та ряд Фур'є функцій зі змінним періодом

Маючи аналітично задані функції зі змінним періодом, а також ортогональні тригонометричні системи зі змінним періодом, є можливість розглядати задачі аналізу (дослідження) функцій із змінним періодом. З погляду інформаційних технологій важливими для цього є розрахункові формули знаходження коефіцієнтів Фур'є таких функцій та обчислення їхніх скінченних рядів Фур'є. Необхідно наголосити, що при цьому повинна виконуватися наступна умова: змінний період функції, яка досліджується, та змінний період відповідної тригонометричної системи мають збігатися.

#### 3.1. Скалярний добуток та норма функцій зі змінним періодом

Вище при розгляді тригонометричної системи функцій (1) йшлося, що ця система є ортогональною в просторі  $L^2_\rho(x, x+T(x))$  із ваговою функцією  $\rho(x) = ax^{\alpha-1}$ . Враховуючи це

зауваження, скалярний добуток функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , що належать просторові  $L^2_\rho(x, x+T(x))$ , визначаємо за формулою

$$(f, g) = \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} \rho(x) f(x) g(x) dx = \alpha \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) g(x) dx, \quad \tau, \tau+T(\tau) \in I. \quad (2)$$

Для функції  $f(x)$  її норма

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\alpha \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f^2(x) dx}.$$

### 3.2. Коефіцієнти Фур'є та ряд Фур'є функції зі змінним періодом

Нехай  $f(x)$  – функція із змінним періодом

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Припускаємо, що ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha.$$

Враховуючи скалярний добуток (2), коефіцієнти Фур'є цього ряду визначаємо за формулами:

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) dx; \quad (4)$$

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \cos kx^\alpha dx, \quad b_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \sin kx^\alpha dx, \quad (5)$$

причому точку  $\tau \geq 0$  вибирають довільно, а враховуючи (3), відповідно для цієї точки інтервалом інтегрування є відрізок  $[\tau, \tau+T(\tau)] = \left[ \tau, (\tau^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} \right]$ . Нерівність Бесселя має вигляд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2. \quad (6)$$

### 4. Інформаційні технології аналізу функцій зі змінним періодом

Розроблені методи аналітичного задання функцій із змінним періодом, визначення їх коефіцієнтів Фур'є та побудова ряду Фур'є таких функцій є складовою інформаційної технології дослідження функцій із змінним періодом. Розглянемо це на конкретному прикладі обчислення коефіцієнтів Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^\alpha)$  із змінним періодом  $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$  при  $\alpha = 5/7$  та для порівняння проведемо аналогічні обчислення для «подібної» їй функції при  $\alpha = 1$ , тобто для добре відомої з курсів математики функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , що описує періодичні коливання прямокутної форми із постійним періодом  $T = 2\pi$ . Перевіримо для цих функцій також нерівність Бесселя.



Приклад 4. Для функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  (рис. 2) її змінний період

$T(x) = -x + \left(x^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5}$ . Нехай ліва точка інтервалу інтегрування  $\tau = 20$ . У цій точці період

$T(20) = -20 + \left(20^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5} \approx 23.4095$ . Отже, за формулами (4) і (5) для знаходження коефіцієнтів

Фур'є інтегрування потрібно здійснювати на інтервалі  $[20, 20 + T(20)] = [20, 43.4095]$ . Результати обчислення коефіцієнтів зведено в лівій частині таблиці. Для порівняння в правій частині наведено коефіцієнти Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , обчислені за цими самими формулами (4) і (5), але при  $\alpha = 1$ .

№ коефіцієнта	Коефіцієнти Фур'є (заокруглені до четвертого знака після коми)			
	Функція зі змінним періодом $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$		Функція з постійним періодом $f(x) = \text{sign}(\sin x)$	
	Інтервал аналізу [20, 43.4095]		Інтервал аналізу [0, 2 $\pi$ ] = [0, 6.2831]	
	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,10}$	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$
0	0.0003		0.0016	
1	-0.0082	1.2732	0.0050	1.2732
2	-0.0003	0.0000	-0.0017	0.0000
3	-0.0082	0.4244	0.0050	0.4244
4	-0.0003	0.0000	-0.0017	0.0000
5	-0.0082	0.2546	0.0050	0.2546
6	-0.0003	0.0000	-0.0017	0.0000
7	-0.0082	0.1818	0.0050	0.1819
8	-0.0003	0.0000	-0.0017	0.0000
9	-0.0082	0.1414	0.0050	0.1415
	$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{19} a_k^2 + b_k^2 = 1.9588$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 1.9586$	
	$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1.9999$		$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1.9983$	

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  і  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$  показує їх «практичний» збіг. Деякі неузгодженості можна пояснити похибками обчислень, а також, можливо, і програмним забезпеченням Advanced Grapher, яке крім побудови графіків на рис. 1–6, використовувало для інтегрування (при знаходженні коефіцієнтів) та деяких обчислень.

Використовуючи наведені в таблиці коефіцієнти Фур'є, побудовано також ряди Фур'є. На рис. 7 відтворено графік скінченного ряду Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  (суцільна лінія) і зображено графік самої функції (пунктирна лінія). Порівнюючи ці графіки, можна стверджувати, що скінченний ряд Фур'є  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx^{5/7} + b_k \sin kx^{5/7}$  вже при  $n = 9$  достатньо «добре» відтворює форму самої функції. Такі самі висновки можна зробити і щодо порівняння скінченного ряду Фур'є для функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , графік якого показано на рис. 8 (суцільна лінія), і функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$  (пунктирна лінія).

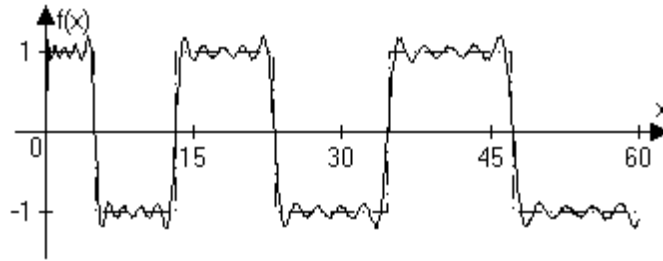


Рис. 7. Функція  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$ ,  $x \in [0, 60]$ , (пунктирна лінія) та її ряд Фур'є (перші дев'ятнадцять доданків, суцільна лінія)

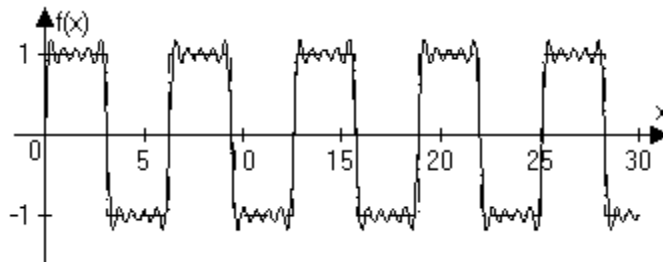


Рис. 8. Функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ ,  $x \in [0, 30]$ , (пунктирна лінія) та її ряд Фур'є (перші дев'ятнадцять доданків, суцільна лінія)

У таблиці також наведено результати обчислень для формул, що входять до нерівності Бесселя (6). Порівняння показує, що результати обчислень для цих функцій «практично» збігаються. Щодо самої нерівності Бесселя, то із порівняння результатів обчислень для  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_n^2$  і  $\frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2$  видно, що суми  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{19} a_k^2 + b_k^2$ , які можна інтерпретувати як норми

рядів Фур'є відповідних функцій  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  і  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , також практично близькі до норм самих функцій. Це свідчить, що побудований в роботі ряд Фур'є функції із змінним наближається до самої функції.

Розглянуті в цій роботі методи та алгоритми аналітичного задання функцій із змінним періодом, обчислення їх коефіцієнтів Фур'є та побудова ряду Фур'є – це реалізація лише деяких з етапів розроблення інформаційних технологій аналізу функцій із змінним періодом. Щодо виконання інших етапів, які були перераховані вище і стосуються розвитку теорії та розроблення відповідних інформаційних технологій дослідження функцій із змінним періодом, то їх планується продовжити в наступних роботах.

### Висновки та перспективи подальших наукових розвідок

Наголошено, що в останні роки розвивається теорія функцій із змінним періодом, які є узагальненням періодичних функцій. Один із здобутків цієї теорії – розроблено метод побудови ортогональних тригонометричних систем із змінним періодом. Наявність класу функцій із змінним періодом та відповідних ортогональних систем відкриває шлях до розв'язання багатьох інших задач, основні з яких охоплені терміном «алгоритм наближення» функцій із змінним періодом. Етапи цього алгоритму охоплюють основні напрямки розроблення теорії та інформаційних технологій дослідження, аналізу функцій із змінним періодом. Щоб була можливість перевіряти відповідні методи та алгоритми, розроблено способи аналітичного задання таких функцій із

змінним періодом та записано їхні змінні періоди. Записано також формули скалярного добутку функцій із змінним періодом з врахуванням при цьому вагової функції, певним чином пов'язаної зі змінним періодом. Наведено загальний вигляд ряду Фур'є функції із змінним періодом, чим закладено основи теорії їх рядів Фур'є цих функцій. Перевірено отримані теоретичні результати, а саме для однієї із аналітично заданої функції – періодичні коливання прямокутної форми зі змінним періодом. Для цього вибрано відповідну тригонометричну систему ортогональних функцій із змінним періодом, знайдено коефіцієнти Фур'є досліджуваної функції, причому їх обчислення відповідним інтегруванням проводили на одному із інтервалів, довжину узгоджували із величиною змінного періоду в лівій точці інтервалу ортогональності тригонометричної системи. Побудований за цими коефіцієнтами графік ряду Фур'є достатньо добре відтворює поведінку самої функції. Було також знайдено коефіцієнти Фур'є для періодичних коливань прямокутної форми, але вже з постійним періодом. Як і передбачувалося, виходячи з основ теорії функцій із змінним періодом, коефіцієнти Фур'є в обох випадках практично збігалися. Отримані попередньо і в цій роботі результати теорії функцій із змінним періодом дають підставу використати розроблені способи та алгоритми як основу для створення відповідних інформаційних технологій всебічного дослідження функцій із змінним періодом.

1. Приймак М. В.. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом / Приймак М. В., Боднарчук І. О., Лупенко С. А. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т. 10, № 2. – С. 132–141. 2. Приймак М. В. Сигнали зі змінним періодом та їх модель / Приймак М. В., Василенко Я. П., Дмитроца Л. П. // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: Век+, 2013. – № 59. – С. 116–121. 3. Василенко Я. П. Клас функцій із змінним періодом / Василенко Я. П., Дмитроца Л. П., Приймак М. В. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. – № 1105. – Серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2014. – Вип. 24. – С. 21–32. 4. Приймак М. В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти / Приймак М. В., Сарабун Р. О., Дмитроца Л. П. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля. – 2011. – № 2. – С. 76–82. 5. Приймак М. В. Ортогональні системи періодичних функцій із змінним періодом / Приймак М. В. // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. – Тернопіль: Вид. ТДТУ, 2007. – С. 72. 6. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953] / Бернштейн С. Н.. – М.: Издательство АН СССР, 1954. – 628 с. 7. Натансон И. П. Конструктивная теория функций / Натансон И. П. – М.; Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с. 8. Толстов Г. П. Ряды Фурье / Толстов Г. П. – М.: Гос. изд-во физ. мат-й литературы, 1960. – 390 с. 9. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / Гоноровский И. С. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с. 10. Алгебра и начала анализа: учеб. пособие для 9–10 кл. сред. шк. / под ред. А. Н. Колмогорова. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1987. – 335 с.