СИСТЕМИ ТА АЛГОРИТМИ КОНСТРУКТОРСЬКОГО ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 621.396.6:681.3

Каркульовський В.І., Мотика І.І., 2000
НУ "Львівська політехніка", кафедра АСУ

ДІАКОПТИЧНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

На прикладі плоских конструктивів розглядаються особливості застосування методів діакоптики при моделюванні механічних систем із розподіленими параметрами.

При проектуванні складних механічних систем, зокрема механічних конструкцій радіоелектронних засобів (РЕЗ), дуже часто виникає необхідність моделювання плоских конструктивів (пластини, вузли на друкованих платах тощо). Такі конструкції є системами із розподіленими параметрами. Існуючі методи та моделі, які використовуються при аналізі таких систем, значно утруднюють застосування діакоптичного підходу як однієї з основ об'єктно-орієнтованого підходу в проектуванні [1, 2].

Характерною особливістю плат є їх мала товщина порівняно із іншими геометричними розмірами, тому механічні коливання плат можна характеризувати рівняннями, які описують коливання тонких пластин. Це дозволяє використовувати різноманітні гіпотези про характер деформування плат і за допомогою них виключити одну координату, і тим самим звести задачу до двовимірної.

Наприклад, широко використовується гіпотеза прямих нормалей, на основі якої при розрахунку пластин приймається, що всі прямі, які є нормальними до серединної площини пластини до деформаціїї, залишаються прямими і нормальними до серединної площини після деформації. Сама серединна поверхня хоча і викривляється, але не зазнає деформації розтягування або стиснення. Використання гіпотези прямих нормалей приводить до відомого в теорії пружності диференціального рівняння технічної теорії згину:

$$D\left[\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}\right]+2\rho d\,\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

де $D=\dfrac{E(2d)^3}{12(1-\nu^2)}$; E – модуль пружності; d – напівтовщина пластини; ν – коефіцієнт Пуассона; D – циліндрична жорсткість при згині пластини; ρ – густина матеріалу.

Основною перевагою цих рівнянь є їх простота. Замість трьох компонентів переміщень, що входять до рівняння Ламе, в технічній теорії згинів розглядається тільки одне переміщеня ω – прогин пластини.

Однак, при виготовленні друкованих плат застосовуються матеріали, які мають специфічні механічні особливості, які суттєво відрізняються від властивостей інших матеріалів, зокрема:

- анізотропію деформативних і надійнісних властивостей;
- низьку жорсткість зсуву;
- повзучість при зсуві.

У таких умовах існуючі теорії і методи розрахунку елементів конструкцій вузлів на друкованих платах не завжди ефективні та правильні, що потребує побудови іншої вихідної математичної моделі, ніж попередня.

Найбільш ефективною для такої цілі прийнято вважати “зсувну модель”, вперше запропоновану в задачах динаміки стрижнів видатним вітчизняним вченим-механіком С.П. Тимошенком.

Більш точні рівняння були побудовані на основі теорії плоских перерізів, яка вважає, що нормальний елемент, початково перпендикулярний серединній поверхні до деформації, не залишається перпендикулярним до неї після деформації, а повертається на деякий кут, не викривляючись і не змінюючи своєї довжини.

Отже, зміщення довільної точки еквідистантної поверхні характеризується п’ятьма величинами:

- трьома переміщеннями u_1, u_2, ω відповідної точки її серединної площини ;
- двома кутами повороту нормального елемента γ_1 і γ_2 в площині XOZ і YOZ.

Загальну картину деформації нормального елемента можна порівняти з рухом жорсткого відрізка в просторі з п’ятьма ступенями свободи.

Беручи до уваги вищерозглянуту гіпотезу плоских перерізів, побудуємо систему диференціальних рівнянь, які описують коливання друкованих плат [3]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} = -\rho s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x} = -\rho s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = \rho s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H_{12}}{\partial y} - Q_1 = -\rho s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x} - Q_2 = -\rho s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$H_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left[\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right]$$

$$B\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = N_1$$

$$B\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = N_2$$

$$\frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=S_{12}$$

$$\Lambda\left(\gamma_1+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=Q_1$$

$$\Lambda\left(\gamma_2+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=Q_2$$

$$D\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial \gamma_2}{\partial y}\right)=M_1$$

$$D\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial y}+\nu\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right)=M_2,$$

де: ρ – густина матеріалу плати; s – товщина плати, Λ – коефіцієнт зсуву; $u_1,u_2,w,\gamma_1,\gamma_2$ – узагальнені переміщення; $N_1,N_2,S_{12},Q_1,Q_2,H_{12},M_1,M_2$ – зусилля і моменти в платі.

Існуючі методи аналітичного розв’язання диференціальних рівнянь в часткових похідних не дозволяють отримати універсальні рівняння, які враховуватимуть різноманітні умови, а також неоднорідності, пов’язані з розміщенням на друкованій платі різних елементів. Для розв’язання даної системи диференціальних рівнянь використаємо метод скінченних різниць, який дозволяє замінити диференціальні рівняння скінченно-різницевими, що приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих дискретних значень шуканої функції у вузлах сіткової області, що апроксимує неперервну область моделювання задачі.

Побудова фізико-математичної моделі коливань плати у вигляді (1) дозволяє нам не використовувати точок поза межами контура і тим самим підвищити точність обчислень. Рівняння (1) для зовнішніх синусоїдальних збуджень з частотою ω в кінцево-різницевій формі має такий вигляд:

$$\begin{gathered}
-N_1(1)+N_1(3)+S_{12}(2)-S_{12}(4)=2h\rho s\omega^2 u_1(0)\\
N_2(2)-N_2(4)-S_{12}(1)+S_{12}(3)=2h\rho s\omega^2 u_2(0)\\
-Q_1(1)+Q_1(3)+Q_2(2)-Q_2(4)=2h\rho s\omega^2 w(0)\\
-M_1(1)+M_1(3)+H_{12}(2)-H_{12}(4)-Q_1(0)=2h\rho s\omega^2 u_1(0)\\
M_2(2)-M_2(4)-H_{12}(1)+H_{12}(3)-Q_2(0)=2h\rho s\omega^2 u_2(0)\\
-u_1(1)+u_1(3)+\nu(u_2(2)-u_2(4)-1/B*N_1(0))=0\\
u_2(2)-u_2(4)+\nu(-u_1(1)+u_1(3)-1/B*N_2(0))=0\\
-u_2(1)+u_2(3)+u_1(2)-u_1(4)-\frac{2}{B(1-\nu)}S_{12}(0)=0\\
-\gamma_2(1)+\gamma_2(3)+\gamma_1(2)-\gamma_1(4)-\frac{2}{D(1-\nu)}H_{12}(0)=0\\
\gamma_1(0)-w(1)+w(3)-\frac{1}{\Lambda}Q_1(0)=0
\end{gathered}\tag{3}$$

$$\gamma_2(0)+w(2)-w(4)-\frac{1}{\Lambda}Q_2(0)=0$$

$$-\gamma_1(1)+\gamma_1(3)+\nu(\gamma_2(2)-\gamma_2(4))-\frac{1}{D}M_1(0)=0$$

$$\gamma_2(2)-\gamma_2(4)+\nu(-\gamma_1(1)+\gamma_1(3))-\frac{1}{D}M_2(0)=0,$$

де h – крок (для спрощення приймаємо $h_x=h_y=h$); s – товщина плати.

Отже, в кожній точці обчислюваного шаблона маємо систему лінійних рівнянь(3) відносно змінних:

$$u_1(0),u_2(0),\gamma_1(0),\gamma_2(0),w(0),N_1(0),N_2(0),M_1(0),M_2(0),H_{12}(0),S_{12}(0),Q_1(0),Q_2(0).$$

На наступному етапі п'ятиточковий обчислювальний шаблон подаємо у вигляді узагальненого багатополюсника (базового елемента) [4], модель якого описується у вигляді системи рівнянь, що зв'язують узагальнені переміщення S_I (лінійні і кутові) полюсів (входів) із узагальненими силовими факторами R_I (реакціями і моментами) у цих полюсах:

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{S}_1\\ \mathbf{...}\\ \mathbf{S}_5\end{matrix}\right\| = \mathbf{F}\left[\left\|\begin{matrix}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{...}\\ \mathbf{R}_5\end{matrix}\right\|\right] \qquad (4)$$

Усі необхідні параметри моделі отримуємо із системи (3) за методикою, викладеною в [4].

Такий підхід дозволив:

- використати принцип діакоптики і методи теорії мереж за рахунок переходу від системи із розподіленими до системи із зосередженими параметрами [2];
- враховувати різноманітні, в тому числі і комбіновані, краєві умови закріплення плати;
- зменшити обчислювальні затрати за рахунок введення уніфікованих базових елементів;
- використати розроблену методику моделювання вібраційних процесів в механічних конструкціях;
- застосувати об'єктно-орієнтовану методологію та потужні засоби її підтримки для проектування, моделювання і створення бібліотеки класів моделей плоских конструктивів [5].

Отже, поєднання кінцево-різницевої апроксимації та діакоптичного підходу дає можливість моделювати механічні системи із розподіленими параметрами із ефективним застосуванням сучасних інформаційних технологій проектування.

1. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на С++. С.–Пб., 1999. 2. Каркульовський В.І., Мотика І.І. Об'єктно-орієнтований підхід в проектуванні складних механічних систем // Вісн. ДУ "Львівська політехніка" 1998. № 327. С.26–30. 3. Мотыка И.И., Каркулевский В.И. Смолий Б.И. Конечно-разностная модель печатной платы // Вестн. Львов. политехн. ин-ту. 1988. № 226. С.51–53. 4. Каркульовський В.І.. Моделювання пружних елементів механічних конструкцій // Матеріали 5-ої міжнар. наук.-техн. конф. "Досвід розробки та застосування САПР в мікроелектрониці". Львів, 1999. С.130–131. 5. Каркульовський В.І., Мотика І.І. Особливості моделювання вібраційних процесів в механічних конструкціях РЕЗ // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1999. № 373. С.179–186.