УДК 621.83

Б.О. ПАЛЬЧЕВСЬКИЙ, С.В. ВЛАСЮК

Луцький державний технічний університет,
кафедра автоматизації виробничих процесів та пакування

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРІЮ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ЛІНІЇ ПАКУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Описано інтегральний критерій для оптимізації структури автоматизованої лінії пакування з використанням симплекс-методу.

It has been substantiated using of integral criterion of specific brought maney wasting for symplex-method optymisation of automatized line structure. There is an example to finding out an optimal structure of automatized line for packaging of viscous products.

Задачі структурної оптимізації ґрунтуються на породженні множини структур із заданих елементів та їхнього перебирання і оцінювання для знаходження найкращого. Складність структурної оптимізації автоматизованих ліній пакувального виробництва визначається великою розмірністю задачі оптимізації, що обмежує пряме застосування комбінаторних методів. Застосування методів цілеспрямованого перебирання “гілок та меж”, динамічного програмування тощо не підвищує достатньою мірою ефективності застосування алгоритмів оптимізації.

Іншою проблемою, що виникає під час оцінювання і порівняння між собою варіантів структури, є знаходження показників, що характеризують достатньо точно структуру автоматизованої лінії.

Отже, структурна оптимізація такого складного об’єкта, як автоматизована лінія, передбачає вирішення двох принципових завдань:

- Вибір методу алгоритмізованого пошуку оптимальної структури, придатного для розв’язання задач великої розмірності;
- Розробка критерію оптимізації, що достатньо точно охарактеризує структуру автоматизованої лінії.

Вибір методу алгоритмізованого пошуку оптимальної структури автоматизованої лінії. Основним недоліком комбінаторних методів пошуку заданої структури автоматичної лінії є тривалість пошуку. Для багатоелементних автоматизованих ліній множина отриманих варіантів стає надзвичайно великою – десятки чи сотні тисяч варіантів. Розглянути й оцінити ці варіанти за розумний проміжок часу неможливо, тому використовують різноманітні прийоми скорочення тривалості перебирання, так звані методи цілеспрямованого перебирання (метод "гілок і меж" чи метод "неявного перебирання", динамічного програмування тощо). Цими методами можна розпізнавати безперспективні часткові розв’язки, які повинні бути відразу відкинуті. Для подібних методів скороченого перегляду варіантів є характерною організація пошуку з поверненням. З використанням всіх цих методів можна певною мірою пришвидшити розв’язання, однак працемісткість знаходження розв’язку експоненційно залежить від кількості вхідних параметрів.

На відміну від переборних алгоритмів ефективними для цього типу задач великої розмірності будуть так звані поліноміальні алгоритми. У цьому випадку задачу оптимізації структури автоматизованої лінії можна подати як задачу цілочисельного лінійного програмування або задачу булевого лінійного програмування. Такі задачі будуть NP-повними [1], а точніше NP-важкими задачами, для яких у загальному випадку не існує поліноміального алгоритму розв’язання. Однак, якщо для таких задач ввести обмеження цілочисельності змінних, то задача перейде в клас задач цілочисельного лінійного програмування. Причому існує частковий клас задач цілочисельного лінійного програмування, що допускають ефективне розв'язання при унімодулярності матриці обмежень (Матриця називається унімодулярною, якщо визначник будь-якої її невиродженої квадратної підматриці дорівнює за модулем одиниці). Згідно з [1], якщо матриця обмежень задачі лінійного програмування з цілими коефіцієнтами унімодулярна, то у задачі існує цілочисельний розв'язок. Треба зазначити, що вказаний клас задач хоча і надзвичайно вузький з формальної точки зору (елементами матриці можуть бути лише -1, 0, 1, причому переважно 0), відповідає достатньо широкому класу практичних задач оптимізації на графах і сітках.

Приведемо задачу структурної оптимізації автоматизованої лінії пакування до вигляду, придатного для використання методу цілочисельного лінійного програмування. Формалізуємо задачу. Нехай маємо набір одиниць обладнання $(K_1; K_2; \ldots; K_n)$. Кожна і-та одиниця обладнання характеризується значенням критерію оптитимізації C_i, кількістю технологічних операцій L_i, які вона виконує, та їх набором. Також маємо m етапів, кожен з яких відповідає j-й технологічній операції (j=1,2,.., m). Потрібно отримати такий піднабір одиниць обладнання, який виконуватиме всі задані операції, а його ефективність за певним критерієм буде максимальною. Побудуємо матрицю $A_{n,m}$, у якій елемент $a_{i,j} = 1$, якщо одиниця обладнання K_i може виконувати L_i заданих технологічних операцій, починаючи з j-ї, і $a_{i,j} = 0$ у протилежному випадку. Оскільки кожна операція має виконуватись лише одним різновидом обладнання, то всі вільні члени лінійного рівняння дорівнюватимуть одиниці. Введемо N змінних $(X_1; X_2; \ldots; X_n)$, які відповідають одиницям обладнання з набору $(K_1; K_2; \ldots; K_n)$. Оцінювати ефективність будемо за допомогою функції $F = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots C_n X_n \Rightarrow \min$. У результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{1,1} X_1 + a_{1,2} X_2 + \ldots + a_{1,n} X_n = 1, \\ a_{2,1} X_1 + a_{2,2} X_2 + \ldots + a_{2,n} X_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m,1} X_1 + a_{m,2} X_2 + \ldots + a_{m,n} X_n = 1, \\ X_i \geq 0,\ j = 1, \ldots n. \end{cases}$$

які перетворюють у мінімум функцію:

$$F = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots C_n X_n \Rightarrow min.$$

Оскільки отримана матриця $A_{n,m}$ є унімодулярною, то змінні X_i набуватимуть лише цілих значень, а оскільки всі вільні члени дорівнюють одиниці, то $0 \leq X_i \leq 1$. Отже, змінні X_i набуватимуть значень 0 або 1.

Отримана система є канонічним видом задачі лінійного програмування, яка найефективніше розв'язується симплекс-методом. Основна ідея цього методу полягає в тому, що за відомими значеннями цільової функції у вершинах випуклого багатогранника, який називається симплексом, знаходять напрям, у якому потрібно зробити наступний крок, щоб отримати найбільше збільшення (зменшення) значення цільової функції. При цьому під симплексом у *n*-мірному просторі розуміють багатогранник, що має *n+1* вершину. Прикладом симплекса у двовимірному просторі, тобто на площині, є трикутник, у тривимірному просторі – тетраедр.

Симплекс має таку властивість – навпроти будь-якої із його вершин S_j розміщена тільки одна грань, на якій можна побудувати новий симплекс, який відрізняється від попереднього розміщенням нової вершини $\tilde{S}_j$, тоді як решта вершин обох симплексів збігається. Вершина нового симплекса $\tilde{S}_j$ може знаходитися і на іншому боці грані від вершини S_j. Ця властивість симплекса і зумовила можливість його використання для розв'язання задач оптимізації.

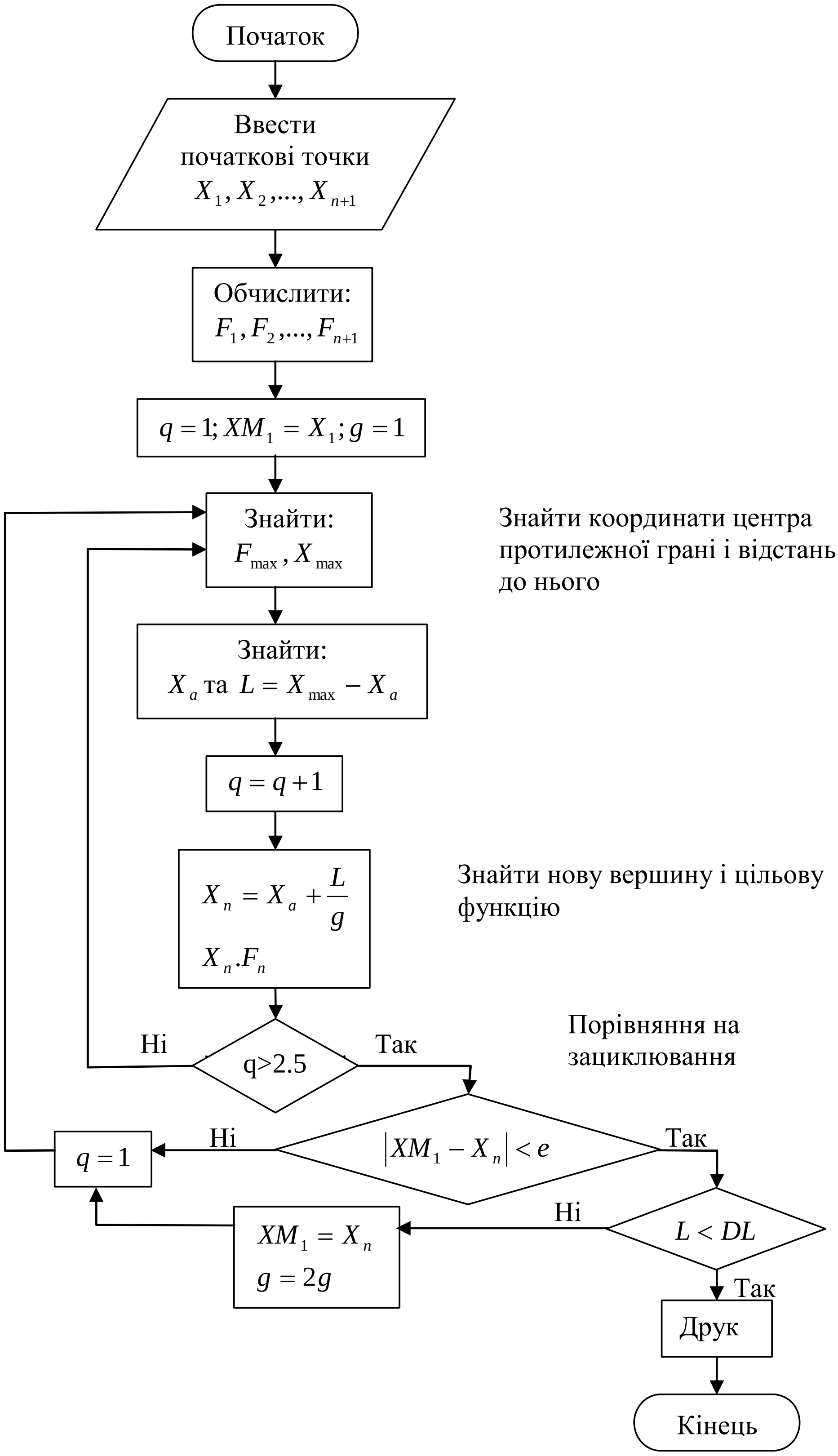

Рис. 1. Блок-схема симплексного методу

Нехай вершинам вихідного симплексу S_i $(i=1,2,...,n+1)$ відповідають координати $U=(U_1,U_2,...U_n)$, $(i=1,2,...,n+1)$. Найменше значення цільової функції відповідає вершині S_{js}. Визначимо координати вершини S_j нового симплекса. Вершина S_j розміщується симетрично вершині S_{js} відносно середини грані, що знаходиться навпроти вершини S_{js}. Координати центра цієї грані визначаються за формулою:

$$\overline{U}^{(A)}=\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1}\overline{U}^{(i)}$$

Причому підсумовують тільки за тими векторами *U*, які відповідають вершинам $S^{(i)}$, що утворюють цю грань. Вектор *L*, що характеризує відстань від вершини S_{js} до центру протилежної грані, дорівнюватиме:

$$L=\overline{U}^{(A)}-\overline{U}^{(j)}.$$

Координати вершини S_j визначають за формулою:

$$\tilde{U}^{(j)}=\overline{U}^{(A)}+L=2\cdot\overline{U}^{(A)}-\overline{U}^{(j)}.$$

Підставивши у вираз для $\overline{U}^{(A)}$ з (1), отримаємо:

$$\tilde{U}^{(j)}=\frac{2}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1}\overline{U}^{(i)}-(1+\frac{2}{n})\overline{U}^{(j)}.$$

Формула (4) визначає координати вершини S_j нового симплекса. За необхідності зменшити розміри симплекса (у випадку зациклювання в околі точки оптимальності) замість формули (2) можна користуватися таким виразом:

$$L=\overline{U}^{(A)}+\frac{1}{2}L=\frac{3}{2}\overline{U}^{(A)}-\frac{1}{2}\overline{U}^{(j)}.$$

Симплексний метод має одну важливу перевагу – за збільшення розмірності задачі обчислювальні затрати зростають мало, оскільки на кожному кроці обчислюють тільки одне значення цільової функції. Блок-схему наведено на рис. 1. Після використання симплекс-методу отримаємо вектор $(X_1;X_2;\ldots;X_n)$, у якому $X_i=1$, якщо використання одиниці обладнання K_i є оптимальним, і $X_i=0$ – у протилежному випадку.

Розробка критерію оптимізації. Ефективність функціонування будь-яких складних систем, до яких належать автоматизовані лінії пакування, значною мірою залежить від вибору основного, допоміжного та транспортного обладнання, його відповідного компонування та узгодження роботи. Структурний варіант автоматизованої лінії характеризується показниками якості її функціонування (продуктивність, надійність, характеристики якості виробів, частка бракованих виробів тощо) і економічними показниками (вартість лінії, експлуатаційні витрати, собівартість продукції тощо).

Узагальнювальним критерієм якості структурного варіанта автоматизованої лінії є приведені витрати. Для розв’язання оптимізаційних задач, що стосуються структури і компонування автоматичних ліній, краще застосовувати критерій питомих приведених витрат (на одиницю продукції). Отже, найефективнішим вважають варіант, який має найменше числове значення питомих приведених витрат.

Питомі приведені витрати (на одиницю продукції) визначають за виразом:

$$w = c + E_H \cdot k\ ,$$

де c – собівартість виготовлення одного виробу; E_H – нормативний коефіцієнт ефективності капітальних витрат, E_H =0,15; k – питомі капітальні витрати у виробничі фонди (на одиницю продукції), які визначають за виразом:

$$k = \frac{K}{N_P}\ ,$$

в якому К – капітальні витрати на виробничі фонди; N_P – річна програма випуску виробів.

Укрупнений метод визначення собівартості виготовлення виробу грунтується на використанні виразу:

$$c = M + (\beta + \delta) \cdot \Pi_\Phi \cdot S_P + \frac{\alpha \cdot A}{N_P} \cdot a\ ,$$

де S_P – хвилинна зарплата робітника, грн./хв; М – вартість вхідних матеріалів, грн.; Пф – працеміcткість виготовлення виробу, хв; β – загальні накладні витрати у частках зарплати, що містять витрати на поточний ремонт оболаднання; δ = 1,15 – коефіцієнт заробітної плати з нарахуваннями; α – амортизаційний коефіцієнт, який враховує річну вартість експлуатації обладнання у частках його вартості, для автоматичних ліній, що працюють у дві зміни α=0, 12; А – балансова вартість обладнання, грн.; а – кількість паралельно працюючого обладнання на одній операції; NP – річна програма випуску.

Розраховуючи собівартість продукції, яку виготовляють на конкуруючих варіантах автоматичної лінії, враховують тільки ті статті витрат, які змінюються в прийнятих до розгляду варіантах.

Для автоматичних ліній одинакового технологічного призначення недоцільно враховувати цехові і загальнозаводські витрати.

Якщо впровадження нової автоматичної лінії не вимагає зміни характеру заготовок, технологічних методів, то питомі витрати на матеріали для одиниці виробу не змінюються і їх також можна не розглядати, а розраховувати тільки технологічну собівартість (собівартість виготовлення, обробки, складання, пакування тощо).

Тоді собівартість виготовлення (пакування) одного виробу на і-й операції визначають за виразом

$$c_i = 1{,}15 \cdot \Pi_{\Phi i} \cdot S_P + \frac{0{,}12 \cdot A_i}{N_P} \cdot a_i\ ,$$

а собівартість виготовлення виробу на всіх М операціях

$$c = \sum_{i=1}^{M} \left(1{,}15 \cdot \Pi_{\Phi i} \cdot S_P + \frac{0{,}12 \cdot A_i}{N_P} \cdot a_i \right).$$

Працеміcткість виготовлення виробу на і-й операції визначають як

$$\Pi_{\Phi i} = \frac{T}{f \cdot K_\Gamma} \cdot a_i$$

або спрощено

$$\Pi_{\Phi i} = T \cdot a_i\ ,$$

де Т – тривалість робочого циклу; K_Γ – коефіцієнт готовності одиниці обладнання; f – коефіцієнт багатоверстатності обслуговування.

Питомі приведені витрати (на одиницю продукції) визначають для автоматичної лінії, що реалізує М послідовних технологічних операцій, за виразом:

$$w = \sum_{i=1}^{M} c_i + E_H \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i \cdot A_i}{N_\Gamma},$$

бо

$$w = \sum_{i=1}^{M} \left(1{,}15 \cdot \Pi_{\Phi i} \cdot S_P + \frac{0{,}12 \cdot A_i}{N_P} \cdot a_i \right) + 0{,}15 \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i \cdot A_i}{N_\Gamma}.$$

Тоді в кінцевому варіанті отримаємо вираз для визначення питомої собівартості:

$$w = \sum_{i=1}^{M} \left(1{,}15 \cdot T \cdot a_i \cdot S_P + \frac{0{,}12 \cdot A_i}{N_P} \cdot a_i \right) + 0{,}15 \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i \cdot A_i}{N_\Gamma}.$$

Отже, критерій оптимізації (оптимізаційна функція):

$$\sum_{i=1}^{M} \left(1{,}15 \cdot T \cdot a_i \cdot S_P + \frac{0{,}12 \cdot A_i}{N_P} \cdot a_i \right) + 0{,}15 \sum_{i=1}^{M} \frac{a_i \cdot A_i}{N_\Gamma} \Rightarrow min.$$

Приклад оптимізації структури автоматизованої лінії. Необхідно спроектувати автоматизовану лінію із продуктивністю 6000 банок за годину, критерій оцінювання – питомі приведені витрати на одиницю продукції. Для прикладу знайдемо оптимальну структуру автоматичної лінії для пакування в'язких продуктів у скляні банки. Автоматична лінія повинна реалізувати 3 основні операції технологічного процесу пакування: дозування, фасування продукту, закупорювання банок. У базі даних розміщено набір серійного обладнання, що випускається промисловістю, його вартість та визначена за вищенаведеними виразами питомою собівартістю (табл. 1).

Таблиця 1

База даних обладнання для пакування в'язких продуктів

Назва операції	Назва обладнання	Позначення	Продуктивність, банок за годину	Орієнтовна ціна, у.о.	Питома собівартість
1	2	3	4	5	6
Дозування	Автоматичний дозатор для пастоподібних та в'язких продуктів УФП-25ДА	X_{1-1}	1500	2270	0,184916
	Дозатор напівавтоматичний для рідких та в'язких продуктів УД-2(250)	X_{1-2}	1200	800	0,230403
	Дозатор напівавтоматичний для рідких та в'язких продуктів УД-2(500)	X_{1-3}	1200	860	0230434
Фасування	Автомат наповнювальний В2-ФНА	X_{2-1}	1000	25500	0,29143
	Фасувальний напівавтомат для фасування в'язких та кремоподібних продуктів	X_{2-2}	1200	4500	0,232269
	Наповнювальний автомат Б4-КНП	X_{2-3}	7200	5000	0,046504

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6
Закупорювання	Закатна машина Б4-КЗК-78	X_{3-1}	9600	16000	0,047614
	Закатна машина Б4-КЗК-84	X_{3-2}	12000	60000	0,052051
	Автомат закатний Б4-КЗК-79А	X_{3-3}	7200	10900	0,047099
Дозування та фасування	Автомат для дозування та фасування рідких та в'язких продуктів ДН2-01-160	X_{12-1}	4800	15600	0,095146
	Автомат для дозування та фасування рідких та в'язких продуктів ДН2-03-250	X_{12-2}	7500	17000	0,047714
	Автомат для дозування та фасування рідких та в'язких продуктів ДН3-03-250	X_{12-3}	15000	25000	0,048521
Фасування та закупорювання	Фасувально-закупорювальна машина МФУБ-03/380-8	X_{23-1}	3000	20200	0,096074
	Фасувально-закупорювальна машина "Фасана 30/8"	X_{23-2}	2100	40000	0,150102
	Фасувально-закупорювальна лінія "Пастпак ВК"	X_{23-3}	3750	13600	0,094743

Схематично вихідні умови задачі наведено на рис.2.

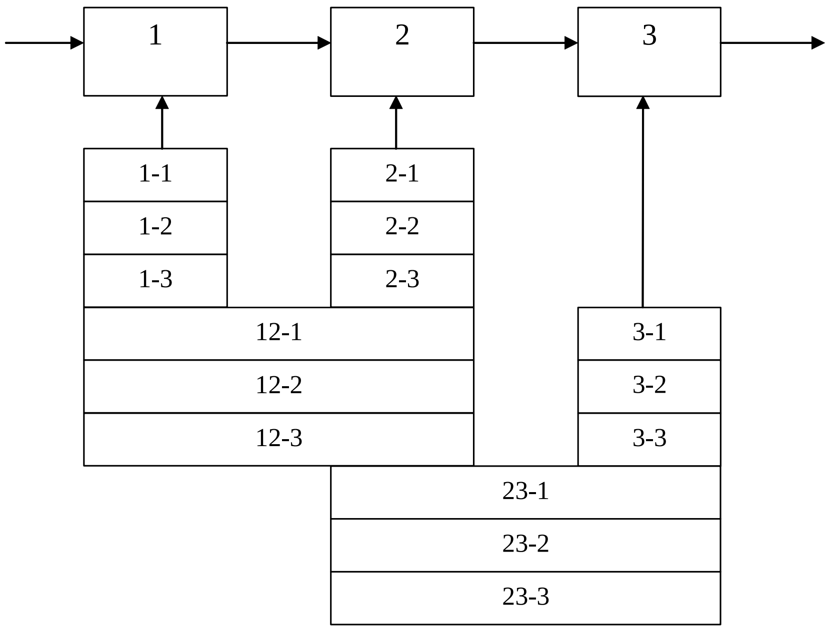

Рис. 2. Модель задачі оптимізації лінії пакування:
1 – дозування; 2 – фасування; 3 – закупорювання

Використавши описаний метод побудови системи лінійних рівнянь, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} X_{1-1}+X_{1-2}+X_{1-3}+X_{12-1}+X_{12-2}+X_{12-3}=1 \\ X_{2-1}+X_{2-2}+X_{2-3}+X_{12-1}+X_{12-2}+X_{12-3}+X_{23-1}+X_{23-2}+X_{23-3}=1 \\ X_{23-1}+X_{23-2}+X_{23-3}+X_{3-1}+X_{3-2}+X_{3-3}=1 \end{cases}$$

та лінійну функцію:

$$F(X)=0.184916X_{1-1}+0.230403X_{1-2}+0.230434X_{1-3}+0.29143X_{2-1}+0.232269X_{2-2}+$$
$$+0.046504X_{2-3}+0.047614X_{3-1}+0.052051X_{3-2}+0.047099X_{3-3}+0.095146X_{12-1}+$$
$$+0.047714X_{12-2}+0.048521X_{12-3}+0.096074X_{23-1}+0.150102X_{23-2}+0.094743X_{23-3}\Rightarrow \min$$

Приймемо $X_{1-1}, X_{2-1}, X_{3-1}$ – початковим базисним розв'язком, тоді

$$\begin{cases} X_{1-1}=1-X_{1-2}-X_{1-3}-X_{12-1}-X_{12-2}-X_{12-3} \\ X_{2-1}=1-X_{2-2}-X_{2-3}-X_{12-1}-X_{12-2}-X_{12-3}-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3} \\ X_{3-1}=1-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3}-X_{3-2}-X_{3-3} \end{cases}$$

Підставивши небазові змінні замість базових, отримаємо:

$$F(X)=0.523959+0.045488X_{1-2}+0.045518X_{1-3}-0.05916X_{2-2}-0.244925X_{2-3}+$$
$$+0.004437X_{3-2}-0.000514X_{3-3}-0.470968X_{12-1}-0.565832X_{12-2}-0.564219X_{12-3}-$$
$$-0.438324X_{23-1}-0.330269X_{23-2}-0.440987X_{23-3}$$

Оскільки у лінійній функції є від'ємні коефіцієнти, то отриманий розв'язок не є оптимальним, тому потрібно змінити базисні змінні. Переводимо в основні X_{12-2}, оскільки вона має найменший коефіцієнт. У неосновні переводимо X_{2-1}. У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} X_{1-1}=-X_{1-2}-X_{1-3}+X_{2-1}+X_{2-2}+X_{2-3}+X_{23-1}+X_{23-2}+X_{23-3} \\ X_{12-2}=1-X_{2-1}-X_{2-2}-X_{2-3}-X_{12-1}-X_{12-3}-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3} \\ X_{3-1}=1-X_{3-2}-X_{3-3}-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3} \end{cases}$$

$$F(X)=0.280244+0.045488X_{1-2}+0.045518X_{1-3}+0{,}904976X_{2-1}+0.78665X_{2-2}+$$
$$+0.415125X_{2-3}+0.004437X_{3-2}-0.000514X_{3-3}+0.047432X_{12-1}+0.000807X_{12-3}+$$
$$+0.699927X_{23-1}+0.998473X_{23-2}+0.832488X_{23-3}$$

Тепер переводимо у основні X_{3-3}, а у неосновні X_{3-1}, тоді:

$$\begin{cases} X_{1-1}=-X_{1-2}-X_{1-3}+X_{2-1}+X_{2-2}+X_{2-3}+X_{23-1}+X_{23-2}+X_{23-3} \\ X_{12-2}=1-X_{2-1}-X_{2-2}-X_{2-3}-X_{12-1}-X_{12-3}-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3} \\ X_{3-3}=1-X_{3-2}-X_{3-1}-X_{23-1}-X_{23-2}-X_{23-3} \end{cases}$$

$$F(X)=0.279729+0.045488X_{1-2}+0.045518X_{1-3}+0{,}904976X_{2-1}+0.78665X_{2-2}+$$
$$+0.415125X_{2-3}+0.004952X_{3-2}+0.000514X_{3-1}+0.047432X_{12-1}+0.000807X_{12-3}+$$
$$+0.700442X_{23-1}+0.998987X_{23-2}+0.833002X_{23-3}$$

У лінійній функції всі коефіцієнти є додатні, отже, отриманий варіант оптимальний. $X_{12-2} = 1, X_{3-3} = 1$, решта змінних дорівнює нулю.

Отже, найоптимальнішим є використання обладнання, наведеного у табл. 2.

Таблиця 2

Структура лінії пакування в'язких продуктів

Назва обладнання	Ціна	Продуктивність	Вартість	Виконувані операцій
Автомат для дозування та фасування рідких та в'язких продуктів ДН2-03-250	17000	7500	17000	– дозування – фасування
Автомат закатний Б4-КЗК-79А	16000	9600	16000	- закупорювання
Разом			33000	

Отриманий результат наведено на рис. 3.

Рис. 3. Схема лінії для пакування в'язких продуктів у скляні банки:
1–2 – дозатор напівавтоматичний для рідких та в'язких продуктів УД-2(250); 23–3 – фасувально-закупорювальна лінія для фасувасування рідких та в'язких продуктів "Пастпак ВК"

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. – М.: Мир, 1985. 2. Пальчевський Б.О., Власюк С.В. Структурна оптимізація автоматизованих ліній пакувального виробництва // Упаковка. – 2004. – № 3. – С.20–23.