

УДК 621.317.73

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХИБОК ЦИФРОВОГО СИНТЕЗУ ГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ

© Гаврилюк М.О., Старостенко О.В.*, Хома В.В., 2000

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра “Автоматика і телемеханіка”

* “Universidad de las Americas Puebla”, департамент комп’ютерних наук

Визначено основні джерела похибок цифрового синтезу гармонічних сигналів. Досліджено вплив таких похибок на якість синтезованого сигналу та запропоновано шляхи його зменшення. Наведено вирази для оцінки вимог до швидкодії цифроаналогових перетворювачів.

The basic sources of digital synthesis errors of harmonic signals are specified. The influence of these errors on the synthesized signals quality is investigated and the ways of their reduction are offered. The expressions for an estimation of the requirements to digital to analog converters speed are given.

Гармонічні сигнали широко використовують у різноманітних електронних пристроях. Зокрема в автокомпенсаційних вимірювачах імітансу гармонічна напруга потрібна не лише для живлення вимірювальної схеми, але і для її зрівноваження. Щоб сповна використати переваги сучасних цифрових методів оброблення сигналів, гармонічні напруги формують цифровим способом.

Завдяки простоті реалізації та якості спектра цифровий синтез найчастіше здійснюється на основі рівномірної в часі сходиноквої апроксимації. Синтезовану за даним способом напругу можна описати виразом [1]

$$u_{ca}(t) = U_m \frac{\sin(\pi/d)}{\pi/d} \left\{ \sin\left(\omega_o t - \frac{\pi}{d}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kd \mp 1} \sin\left[(kd \mp 1)\omega_o t \pm \frac{\pi}{d}\right] \right\}, \quad (1)$$

де $v = (kd \pm 1)$ – номер гармоніки, причому $k=1,2,3,\dots$

Оскільки корисним сигналом є основна гармоніка, то, порівнюючи аналітичний вираз сигналу $u_{ca}(t)$ із ідеальною реалізацією $u_{ід}(t) = U_m \sin \omega_o t$, можна говорити про похибку відтворення амплітуди

$$\delta_o^{ca} = \frac{d}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) - 1,$$

та фазову похибку синусоїдального сигналу

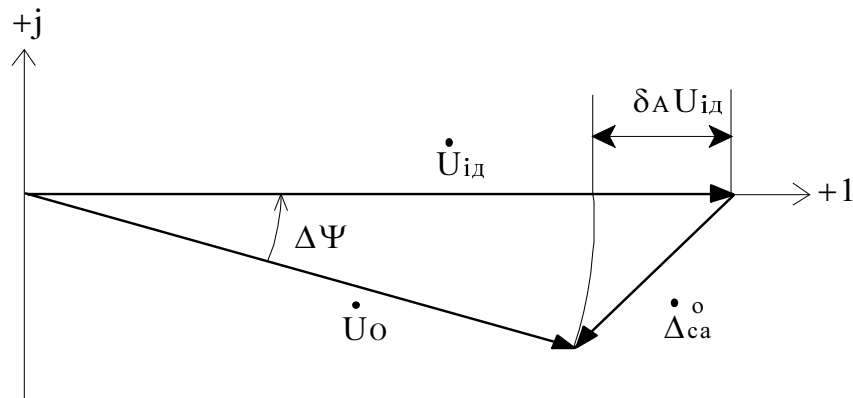
$$\Delta\psi_o^{ca} = -\frac{\pi}{d}.$$

Вплив згаданих похибок ослаблюється у міру збільшення числа кроків апроксимації d на період (табл.1).

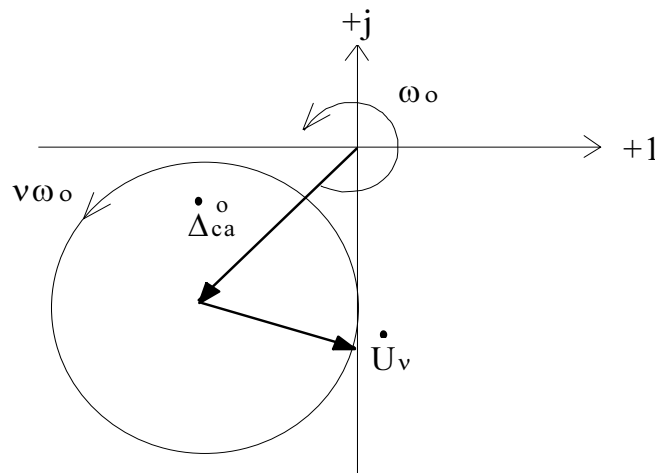
**Амплітудна та фазова похибки відтворення основної гармоніки
при рівномірній у часі сходиноквій апроксимації**

d	4	8	16	32	64	128
$-\delta_A, \%$	10	2,6	0,64	0,16	0,04	0,01
$-\Delta\psi, \text{град}$	45	23	11	5,6	2,8	1,4

При 128 кроках апроксимації гармонічного сигналу амплітудними спотвореннями основної гармоніки можна знехтувати, отже, основним джерелом похибок залишається детермінований фазовий зсув основної гармоніки.



a



б

Рис.1. Графічна інтерпретація похибок цифрового синтезу гармонічних сигналів.

На рис.1 подано графічну інтерпретацію похибок сходиноквої апроксимації. Як видно з рис.1,а, якість відтворення гармонічного сигналу можна характеризувати не лише амплітудною і фазовою похибками, але і векторною похибкою апроксимації Δ_{ca}^o . Якщо можна знехтувати амплітудною похибкою δ_0^{ca} , то вираз, що описує векторну похибку, набуває вигляду

$$\Delta_o^{ca} = U_B \sin(\omega_o t + \psi_B) = U_m \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) \cdot \sin\left[\omega_o t - \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{d}\right)\right]. \quad (2)$$

Присутність у спектрі апроксимованого сигналу вищих гармонік можна зобразити вектором \dot{U}_v , який обертається навколо вершини векторної похибки основної гармоніки U_o із круговою частотою $v\omega_o$ (рис.4.2.1,б). Як випливає із (1), відносний рівень гармонік при сходянковій апроксимації можна визначити за таким простим виразом:

$$n_v = \frac{|U_v|}{U_m} 100 = \frac{100}{v} = \frac{100}{kd \mp 1}, \quad [\%]. \quad (3)$$

Для наочності у табл. 2 наведено залежність відносного рівня амплітуд пари гармонік, найближчих до основної (із номерами $d-1$ і $d+1$) від числа кроків апроксимації d .

Таблиця 2

Залежність відносного рівня гармонік від числа кроків апроксимації

d	4	8	16	32	64	128
$\eta_{d-1}, \%$	33	14	6,7	3,2	1,6	0,79
$\eta_{d+1}, \%$	20	11	5,9	3	1,5	0,78

Вищі гармоніки є перешкоджаючим фактором, що знижує точність вимірювання складових імітансу. Ослаблення впливу гармонік, переважно, вимагає додаткового ускладнення процесу оброблення вимірювального сигналу.

Цифровий спосіб реалізації сходянкової апроксимації передбачає подання гармонічного сигналу на кожному кроку апроксимації у вигляді числа обмеженого формату b

$$N(i) = \text{Round}\left\{\left(\frac{U_m}{q} - 1\right) \sin\left(2\pi \frac{i}{d}\right)\right\} = \text{Round}\left\{N_m \sin\left(2\pi \frac{i}{d}\right)\right\}, \quad (4)$$

де $\text{Round}\{*\}$ – оператор заокруглення до ближчого цілого значення; $q = U_m/2^b$ – коефіцієнт перетворення ЦАП. Через обмеженість формату до похибки сходянкової апроксимації додається ще одна методична похибка Δ_{OF} , абсолютне значення якої дорівнює різниці між квантованим та неквантованим значенням рівня i -ї сходянки

$$\Delta_{OF}(i) = \left[q \cdot \text{Round}\left\{N_m \sin\left(2\pi \frac{i}{d}\right)\right\} - U_m \sin\left(2\pi \frac{i}{d}\right) \right].$$

Дослідимо спектральний склад синтезованого цифровим способом гармонічного сигналу. Для цього треба розкласти в ряд Фур'є криву цифрової апроксимації $N(i)$ і визначити коефіцієнти ряду

$$C_k = A_k + jB_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N(\alpha) \cdot e^{jk\alpha} d\alpha =$$

$$= -\frac{jU_m T}{2\pi k 2^b} \sum_{i=0}^{d-1} \text{Round} \left\{ N_m \sin \left(2\pi \frac{i}{d} \right) \right\} \left\{ e^{[jk\pi(i+1)/d]} - e^{[jk\pi i/d]} \right\}. \quad (5)$$

Знайти аналітичний розв'язок рівняння (5) не вдається, тому коефіцієнти ряду Фур'є розраховували числовими методами. На підставі аналізу даних розрахунку можна зробити такі висновки:

- подання миттєвих значень гармонічного сигналу на кожному із кроків апроксимації числом обмеженого формату приводить до збагачення новими гармоніками спектра апроксимованого сигналу;
- хоча рівень гармонік, що виникають, не перевищує амплітуд гармонік $d-1$ і $d+1$ сходявкової апроксимації, проте їх наближення до основної гармоніки створює загрозу зниження точності вимірювання.

Гармонічні сигнали у цифровому поданні використовуються як опорні сигнали блока цифрового оброблення та зворотного перетворювача двовимірних ЦАКВІ [2,3]. Крім того, на їх основі цифроаналогові перетворювачі (ЦАП) синтезують тестову напругу (рис.2). Такий синтез супроводжується додатковими інструментальними похибками, які за характером прояву поділяють на статичні та динамічні [4,5].

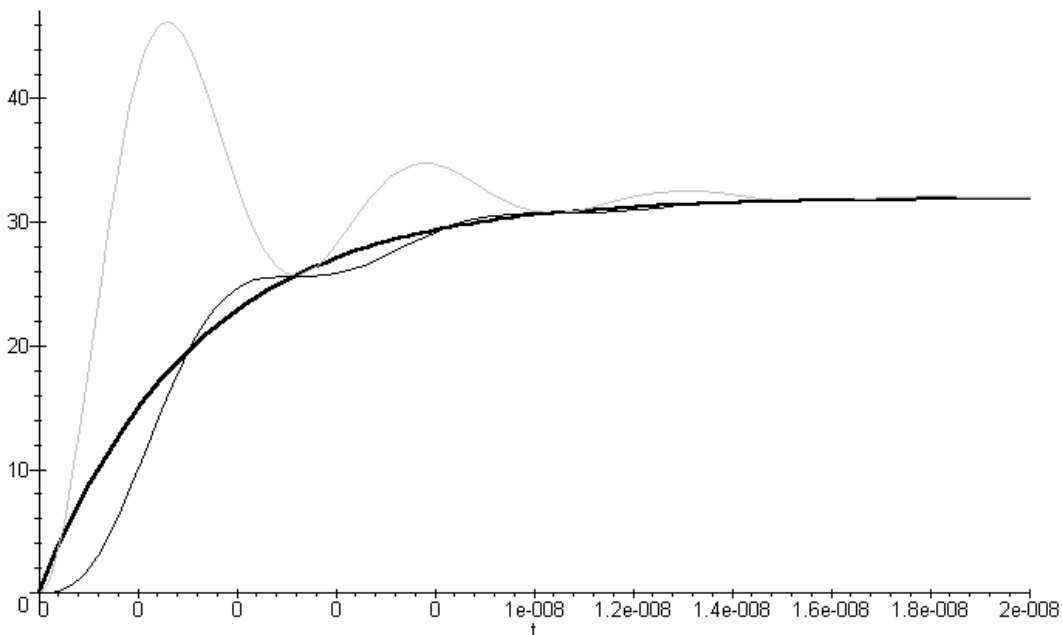


Рис.2. Графіки переходного процесу у вихідних каскадах ЦАП.

Статичні похибки пов'язані із відхиленням реальної характеристики перетворення (ХП) ЦАП від номінальної. Функцію перетворення ЦАП, що відповідає номінальній ХП, можна подати у вигляді

$$U(N_i) = 2^b q \sum_{n=0}^{b-1} a_n K_n, \quad (6)$$

де $K_n = 2^{n-1}/2^b$ – номінальні вагові коефіцієнти кодокерowanego подільника ЦАП.

Допускаючи суперпозиційний характер статичних похибок ЦАП, тобто незалежність похибок у $(i+1)$ -й точці ХП від числового значення коду N_i у попередній точці, реальну функцію перетворення можна подати у вигляді [5]

$$U(N_i) = 2^b (q + \Delta q) \sum_{n=0}^{b-1} a_n (K_n + \Delta K_n) + \Delta_0,$$

де Δq – похибка коефіцієнта перетворення, яка визначається похибками джерела опорної напруги, коефіцієнта передачі вихідного підсилювача та деякими іншими факторами; Δ_0 – похибка від зміщення нуля; ΔK_n – похибки вагових коефіцієнтів. Нехтуючи добутком $\Delta q \cdot \Delta K_n$ як величиною вищого порядку малості, вираз, що описує абсолютну похибку реального ЦАП у N_i -й точці ХП, набуває вигляду

$$\Delta U(N_i) = \Delta_0 + \Delta q N_i + 2^b q \sum_{n=0}^{b-1} a_n \Delta K_n. \quad (7)$$

Структура виразу (7) показує наявність трьох характерних складових похибки ЦАП: адитивної, мультиплікативної та похибки від нелінійності. Вплив перших двох складових похибок усувають у процесі налагодження приладу відповідно корекцією нуля та калібрування. Після проведення таких операцій початок і кінець реальної ХП збігається із номінальною, внаслідок чого функцію перетворення ЦАП можна подати у вигляді

$$U(N_i) = q N_i + 2^b q \sum_{n=0}^{b-1} a_n \Delta K_n. \quad (8)$$

Отже, на метрологічні характеристики ЦАП як структурного елемента, що формує гармонічні напруги, має вплив лише нелінійність його ХП.

Для характеристики нелінійності ХП ЦАП у його паспорті наводять такі два показники:

- нелінійність – максимальне відхилення характеристики перетворення даного ЦАП від апроксимуючої прямої, проведеної, наприклад, через початкову та кінцеву точки ХП;

- диференціальна нелінійність – максимальне відхилення дійсних ступенів квантування від їх середнього значення.

Під час синтезу тестової напруги вхідний сигнал $N(i)$ ЦАП є повністю детермінованим (4), а його розрядність у структурах із цифровим обробленням сигналів визначається, наприклад, одnobайтним форматом представлення опорного сигналу, отже, приймаємо $b=8$. Нелінійність ХП ЦАП проявляється у виникненні гармонічних складових додатково до тих, які зумовлюються розглянутими вище методичними похибками сходинкової апроксимації та цифрового синтезу. Крім того, можливі певні амплітудні та фазові спотворення основної гармоніки.

У загальному випадку похибки нелінійності містять як систематичну, так і випадкову складові. За таких умов результати впливу нелінійності не вдається подати у вигляді аналітичних залежностей, тому дослідження проводили за допомогою імітаційного моделювання.

Методика дослідження полягає у такому. Щоби виділити похибки вихідної напруги ЦАП, зумовлені нелінійністю його ХП, застосуємо диференційний метод [4]. Напруга на виході досліджуваного ЦАП $U_{\text{дц}}$ після корекції нуля і калібрування описується рівнянням (8). Якщо нелінійністю опорного ЦАП можна знехтувати, тобто $U_{\text{оц}}(N_i) = qN_i$, то вихідну різницеву напругу

$$\Delta U(N_i) = U_{\text{дц}} - U_{\text{оц}} = 2^b q \sum_{n=0}^{b-1} a_n \Delta K_n$$

можна прийняти не лише за кількісну оцінку нелінійності ЦАП, але, що в даному випадку важливіше, використати для розрахунку впливу нелінійності на точність формування гармонічних напруг.

Напруга $\Delta U(N_i)$ є послідовністю імпульсів детермінованої частоти $f_T = d \cdot f_0$ і тривалості $T_i = 1/f_i$, але із випадковими значеннями амплітуд і полярностей. Максимальне значення амплітуд імпульсів можна оцінити співвідношенням

$$U_{\text{max}}(i) \approx \bar{\Delta}_H + k\sigma_H,$$

де $\bar{\Delta}_H$ – систематична складова статичної похибки, яка визначається відхиленням реальних вагових коефіцієнтів K_j ЦАП від розрахункових 2^j ; σ_H і k – відповідно середньоквадратичне значення та квантильний коефіцієнт розподілу випадкової складової похибки.

Випадкова складова відхилення амплітуд імпульсів від середніх значень визначатиме склад та характер високочастотних гармонік, а тому її вплив на формування гармонічних напруг послаблюється як через інерційність елементів вимірювального каналу, так і у процесі оброблення, коли термін вимірювання займає кілька періодів тестового сигналу. Водночас систематична складова визначатиме склад і рівень гармонік, близьких до основної.

Спектр синтезованого цифровим способом тестового гармонічного сигналу досліджували, допускаючи, що систематична складова похибки від нелінійності ХП становить $\bar{\Delta}_H = \frac{\Delta U_{\text{max}}}{U_H} 100\% \approx 0,2\%$ або $\pm 1 \text{ о.м.р.}$ і зумовлюється тим, що вагові коефіцієнти K_j ЦАП відхиляються від номінальних значень за законом $\Delta K(j) = [\sin(2\pi j / 14 + 1)] / 4$. Результати моделювання показали, що вплив нелінійності на основну гармоніку проявляється у спотворенні її амплітуди не більше ніж на 0,5% і затримці фази на $1,4^\circ$. Відносний рівень лише 17-ї і 41-ї гармонік перевищує 0,1% і становить лише $0,0012 U_m$.

Крім розглянутих статичних інструментальних похибок, на точність формування гармонічних сигналів впливають динамічні похибки ЦАП. Основним показником, що

характеризує динамічні властивості ЦАП, є час $t_{\text{вст}}$ встановлення вихідного сигналу. За змістом цей параметр найчастіше визначають як інтервал часу між зміною коду на вході ЦАП із мінімального на максимальне значення (чи навпаки) до моменту, коли значення вихідної напруги ЦАП після перехідного процесу остаточно не увійде у зону усталеного значення, що відповідає $\pm 1/20$ о.м.р. [4].

У загальному випадку вихідні каскади ЦАП поведуть себе як аперіодична ланка другого порядку із певним значенням частоти власних коливань $\omega_{\text{цап}} = 2\pi / T_{\text{цап}}$ та коефіцієнтом згасання ζ . У відповідь на зміну кодів вихідна напруга ЦАП спочатку переходить через усталене значення U_m , а потім поступово наближається до нього у процесі експоненційно згасаючих коливань із частотою

$$\omega_k = \sqrt{1 - \zeta^2} / T_{\text{цап}}$$

і сталою часу згасання

$$\tau_\zeta = T_{\text{цап}} / \zeta.$$

Отже, параметр $t_{\text{вст}}$ можна розрахувати як час, необхідний для того, щоб експоненційні обвідні увійшли у смугу шириною $\pm q/2$ (рис.2)

$$t_{\text{вст}} = \frac{\lg(q/2U_m)}{\lg(e)} \tau_\zeta = 2,3 \lg\left(\frac{1}{2^{(n+1)}}\right) \tau_\zeta = 0,69(n+1)\tau_\zeta, \quad (9)$$

де q , U_m і n – відповідно коефіцієнт перетворення, максимальне значення вихідної напруги та розрядність ЦАП.

Під час формування тестової та компенсаційних напруг на виході ЦАП для забезпечення потрібного рівня сигналу та навантажувальної здатності згаданих джерел включають буферні підсилювачі. Подібні пристрої є аперіодичними ланками з передатною функцією

$$W(s) = \frac{K_{\text{бф}}}{1 + s/\omega_{\text{бф}}},$$

де $\omega_{\text{бф}}$ – частота одиничного підсилення буферного каскаду.

Якщо $\omega_{\text{бф}}$ вибрати із умови $\omega_{\text{бф}} \leq 1/\tau_\zeta$, то високочастотні коливання вихідного сигналу ЦАП при проходженні через буферний підсилювач значною мірою подавляються (рис.2), при цьому перехід із рівня на рівень вихідної напруги досить точно описується таким виразом:

$$u(t) = [U(N_{i+1}) - U(N_i)] \cdot \left\{ 1 - e^{-t/\tau_\zeta} \left[1 - \frac{1}{\tau_\zeta \omega_k} \sin(\omega_k t) \right] \right\}.$$

Аналіз наведеного виразу показує, що його синусоїдна компонента має істотне значення для опису сигналу лише на початку перехідного процесу, а на етапі входження сигналу у зону похибки її вплив є нехтовно малим (рис.2). Тому надалі будемо використовувати експоненційну апроксимацію вихідного сигналу

$$u(t) = [U(N_{i+1}) - U(N_i)] \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_\zeta} \right).$$

Як показано в роботі [1], експоненційна апроксимація порівняно із сходиноквою не змінює спектрального складу синтезованого сигналу, а лише амплітудно-фазові співвідношення наявних у його спектрі гармонік. Так, рівень кожної $(kd \mp 1)$ гармоніки

зменшується у $\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + [(kd \mp 1)\omega_o \tau_\zeta]^2}}$ разів. Якщо зменшення рівня вищих гармонік

при експоненційній апроксимації позитивно позначається на роботі вимірювача, то аналогічне зменшення амплітуди основної гармоніки є небажаним, оскільки викликає амплітудну похибку

$$\Delta_{EA} = U_m \frac{\sin(\pi/d)}{\pi/d} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_o \tau_\zeta)^2}} - 1 \right\}. \quad (10)$$

Знає додаткового зсуву і початкова фаза основної гармоніки. При малих значеннях π/d і $\omega_o \tau_\zeta$ для наближеної оцінки відставання початкової фази основної гармоніки відносно вхідного цифрового сигналу можна скористатися виразом [1]

$$\psi_o \approx \text{tg}(\psi_o) \approx -\left(\frac{\pi}{d} + \frac{\omega_o \tau_\zeta}{2} \right). \quad (11)$$

На підставі виразу (10) можна розрахувати необхідне значення частоти одиничного підсилення буферного каскаду, щоб забезпечити синтез гармонічної напруги з динамічною похибкою не більшою, ніж $\pm 1/20$ м.р.

$$\tau_{\text{екв}} = \frac{1}{\omega_o \sqrt{N_m/2}}. \quad (12)$$

Оскільки для характеристики динамічних властивостей ЦАП у його паспорті наводять час встановлення вираз (12) із урахуванням (9) зручно подати у вигляді

$$t_{\text{вст}} \leq \frac{0,22}{f_o} \cdot \frac{(n+1)}{2^{(n+1)/2}}, \quad (13)$$

де n – розрядність ЦАП.

У табл. 3 наведені вимоги до максимально допустимого часу встановлення 8-розрядних ЦАП залежно від частоти f_o синтезованої тестової напруги.

Таблиця 3

Вимоги до часу встановлення ЦАП при синтезі тестової напруги заданої частоти

f_o , МГц	0,1	0,2	0,5	1,0
$t_{\text{вст}}$, нс	850	425	170	85

Проведений аналіз дає змогу зробити такі висновки.

1. Цифровий синтез гармонічних сигналів супроводжується виникненням методичних та інструментальних похибок, які містять три складові: амплітудну і фазову похибки відтворення основної гармоніки, а також спотворення у вигляді вищих гармонік.

2. Методичні похибки зумовлюються заміною неперервної кривої сходишковою та обмеженням формату подання відліків.

3. Статичні інструментальні похибки, спричинені нелінійністю характеристики перетворення ЦАП, викликають незначне спотворення основної гармоніки та породжують додаткові гармоніки.

4. Динамічні інструментальні похибки ЦАП обмежують частотний діапазон синтезованих гармонічних сигналів.

5. На заданій частоті вимірювання похибки відтворення амплітуди основної гармоніки мають мультиплікативний характер та їх вплив, загалом, можна усунути при калібруванні вимірювального каналу.

6. Фазовий зсув, зумовлений інерційністю елементів, що беруть участь у цифровому синтезі гармонічних напруг, є сталим, тому його вплив також можна компенсувати.

1. Смеляков В.В. Цифровая измерительная аппаратура инфранизких частот. М., 1975. 2. Быстродействующие интегральные микросхемы ЦАП и АЦП и измерение их параметров / Марцинявичюс А.-Й. К. и др.; под ред. А.-Й. К. Марцинявичюса, Э.-А. К. Багданскиса. М., 1988. 3. Шлыков Г.П. Измерение параметров интегральных ЦАП и АЦП. М., 1985. 4. Гаврилюк М.О., Проців Р.О., Хома В.В. Комбіновані алгоритми зрівноваження компенсаційно-мостових вимірювальних схем // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. №4, 1998. С.71-76. 5. Хома В.В. Цифрове оброблення сигналів у засобах вимірювання імітансу // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". № 324, 1998. С.125-130.

УДК 621.352

ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ТЕПЛОВОГО РОЗШИРЕННЯ ВОЛЬФРАМУ

© Попов Б.О., Іскерка І.*, 2000

* Політехніка Ченстоховська, електричний факультет (Польща),

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури (Львів, Україна)

Запропоновано машинний алгоритм знаходження параметрів найкращого чебишовського наближення за допомогою суми багаточлена і експоненти від x^{-1} . Показано його застосування для знаходження параметрів моделі теплового розширення вольфраму.