

МАШИНОЗНАВСТВО. ДИНАМІКА ТА МІЦНІСТЬ МАШИН. ПІДНІМАЛЬНО- ТРАНСПОРТНІ МАШИНИ

УДК 621. 01

І. А. Вікович

Національний університет “Львівська політехніка”

МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПОПЕРЕЧНО-КУТОВИХ КОЛИВАНЬ БІТУМО-ЩЕБЕНЕВОГО АГРЕГАТУ З РОЗІГРІТИМ РІДКИМ БІТУМОМ

© Вікович І. А., 2016

Розроблено модель і метод розрахунку коливань під час його руху у поперечно-вертикальній площині бітумо-щебеневого агрегату з торсіонною підвіскою з урахуванням рухливості розігрітого рідкого бітуму в циліндричній горизонтальній ємкості агрегату.

Ключові слова: бітумо-щебеновий агрегат, торсіонна підвіска, коливання, математична модель.

Mathematical model of oscillations in the transverse and vertical space of trail of bitum and broken stone aggregate with independent torsions suspension with of motion warming up of bitems are developed.

Key words: trail of bitum and broken stone, torsions suspension, oscillation, mathematical model.

Вступ. В Україні на більшій частині доріг з удосконаленим типом покриття покладено асфальтобетон (95–96 %). Тому застосовується найбільше різноманітних ремонтних матеріалів і машин, технологій та створюється нових розробок для якісного нанесення асфальтобетонних покриттів.

Найпростішим доступним і поширеним методом ремонту доріг є ямковий ремонт гарячою асфальтобетонною сумішшю, оскільки у розпорядженні дорожніх служб є широка мережа заводів з виробництва асфальту й усі необхідні традиційні вихідні матеріали (щебінь, пісок, мінеральний порошок, бітум) для приготування асфальто-щебеневої суміші та велика кількість різних машин для укладання гарячої асфальтобетонної суміші.

Для укладання на дорогах гарячої асфальтобетонної суміші сьогодні застосовують причіпні й самохідні колісні, гусеничні та комбіновані асфальтоукладальники з різними заданими технічними і технологічними параметрами: великою, середньою і малою продуктивністю та відповідним робочим устаткуванням, шириною укладання переважно від 0,6 до 7 м, різною висотою укладання і щільністю, різною транспортною швидкістю, з газовим, електричним та комбінованим підігрівом, з одно- і двошаровим укладанням базового та шару зносу, укладання грубо- і дрібнозернистої та піщаної асфальтобетонної суміші з регульовальними системами параметрів укладання.

Розроблений і виготовлений експериментальний бітумо-щебеновий агрегат призначений для підігрівання бітуму (бітумних мастик), підтримування робочої температури та контрольованого подавання його під час ямкового ремонту доріг з одночасною доставкою чотирьох фракцій щебеню, підготовки дорожнього полотна перед укладанням асфальту, під час ремонту м'яких покриттів і гідроізоляції фундаментів будівель, очищення струменем стиснутого повітря оброблювальної поверхні

перед нанесенням розплавленого бітуму. Цей бітумо-щебеневий агрегат може використовуватись для заливання швів і тріщин на асфальтному покритті доріг, тротуарів, майданчиків та аеродромів.

Бітумо-щебеневий агрегат розрахований для роботи за температури повітря в межах від 0 до плюс 40 °С, його робочий об'єм 400 л, він важить 700 кг, швидкість транспортування становить 25–50 км/год.

Постановка проблеми. Під час виконання технологічного процесу ямкового ремонту доріг, тротуарів, майданчиків тощо доволі часто виникає потреба транспортувати на порівняно великій відстані на нові ділянки причіпний бітумо-щебеневий агрегат з розігрітим рідким бітумом, рухливість якого може істотно вплинути на процес транспортування.

Залежно від технологічних потреб і умов експлуатації циліндрична горизонтальна ємкість бітумо-щебеневого агрегату може бути повністю наповнена розігрітим рідким бітумом, наповнена рівно наполовину ємкості або наповнена менше чи більше за її половину.

Відомо, що плавність ходу і стійкість руху транспортних засобів, частково заповнених рідиною, зокрема рідким бітумом (в'язка рідина), погіршується внаслідок зміщення центра ваги рідини (рідкого бітуму) під час коливань, особливо в екстремальних режимах руху і на поворотах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сьогодні недостатньо розробок і фактично не ведуться дослідження щодо ефективного функціонування конструкцій машин, призначених для ямкового ремонту доріг, зокрема безпосереднього транспортування розігрітого рідкого бітуму до місць призначення. Тому проектування нової конструкції машини для ямкового ремонту доріг, розроблення моделі й методу розрахунку й аналізу динамічних процесів у бітумо-щебеному агрегаті та підвищення ефективності функціонування такого агрегату є нині актуальним завданням.

Динамічні процеси у транспортних машинах, частково заповнених рідиною, досліджено у роботах [1–6, 8, 9, 11–15]. Проте безпосередньо застосувати ці наукові підходи до розв'язання конкретних інженерних задач проблематично.

Виклад основного матеріалу. На рис. 1 штриховою лінією показано у перерізі наповнення із різними висотами h_i ($h=R$; $h<R$ і $h>R$, R – радіус циліндричної ємкості) циліндричної горизонтально розміщеної ємкості бітумо-щебеневого агрегату із розігрітим рідким бітумом у процесі його руху і показано сили, прикладені у центрі маси рідкого бітуму під час поперечно-кутових коливань.

Припустимо, що під час поперечних коливань бітумо-щебеневого агрегату розігрітий рідкий бітум у циліндричній горизонтальній ємкості буде нахилений під деяким кутом $\alpha_p(t)$ до горизонту (розглядається лінійний характер збурених коливань рідкого бітуму) [1]. Визначимо положення центра маси рідкого бітуму відносно початку координат O координатних осей Oy , Oz у поперечній площині циліндричної горизонтальної ємкості, радіус якої дорівнює R .

Координати центра маси рідкого бітуму визначимо за умови “затверділого” бітуму, як координати центра ваги сегмента (сектора без його трикутника) для трьох випадків (рис. 1, а–в) якщо висота h наповнення циліндричної ємкості бітумом відповідно становитиме

$$1) h > R; h = R(1 + \cos \alpha_s); \alpha_s = \arccos\left(\frac{h}{R} - 1\right);$$

$$2) h = R; h = \pi;$$

$$3) h < R; h = R(1 - \cos \alpha_s); \alpha_s = \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

де α_s – це половина центрального кута відповідного сегмента циліндричної горизонтальної ємкості, відповідно частково наповненої розігрітим рідким бітумом.

Для визначення центра ваги розігрітого рідкого бітуму розділимо сектор круга для сегмента горизонтально розміщеної циліндричної ємкості, частково заповненої розігрітим рідким бітумом, який відповідає центральному куту $2\alpha_s$, на нескінченну множину елементарних секторів (рис. 2).

Довжина дуги АВ сектора круга АОВ з центральним кутом $2\alpha_s$ (рис. 2) симетрично розміщена відносно осі у, тому центр ваги цієї дуги розміщений на осі у, а його положення визначається тільки координатою y_{cl} :

$$z_{cl} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta l_{si}}{l_s}, \tag{1}$$

де y_i – координата центра ваги i -го нескінченно малого елемента довжини дуги Δl_{si} , на які розділена уся дуга АВ сектора АОВ ($i=1, 2 \dots n$); $l_s = R2\alpha_s$ – вся довжина дуги АВ сектора АОВ.

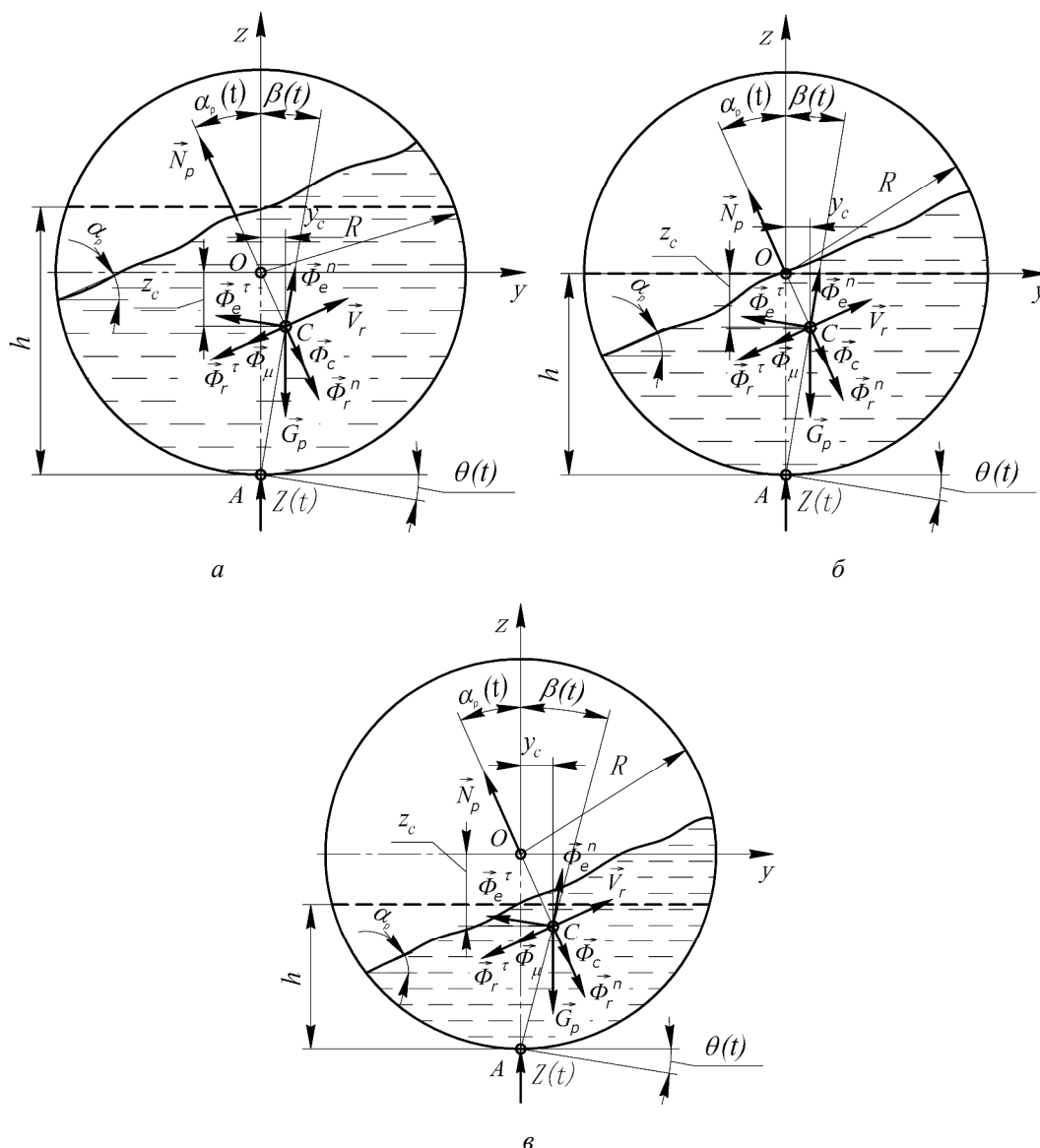


Рис. 1. Сили, які діють у центрі мас розігрітого рідкого бітуму в частково заповненій рухомій циліндричній горизонтальній ємкості бітумо-щебеневого агрегату під час його поперечно-кутових коливань

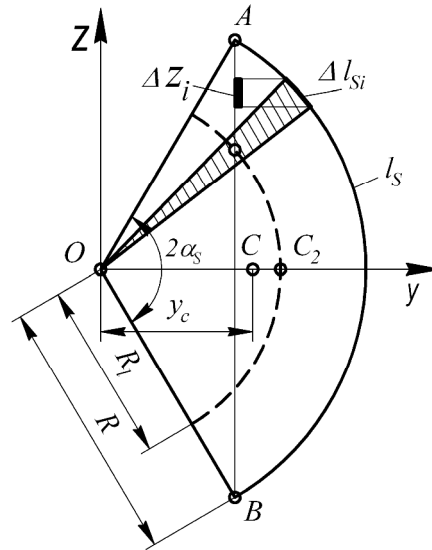


Рис. 2. Розрахункова схема для визначення центра ваги сектора OAB

Рівняння (1) перепишемо так:

$$z_{cl} = \frac{1}{l_s} \sum_{i=1}^n z_i \Delta l_{si} = \frac{1}{l_s} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\cos \alpha_{si}} \Delta l_{si} \cos \alpha_{si} = \frac{1}{l_s} \sum_{i=1}^n R \Delta y_i = \frac{R}{l_s} \sum_{i=1}^n \Delta y_i = R \frac{2R \sin \alpha_s}{2R \alpha_s} = R \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s}, \quad (2)$$

де $R = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\cos \alpha_{si}}$; $\sum_{i=1}^n \Delta y_i = \Delta l_{si} \cos \alpha_{si} = 2R \sin \alpha_s$; $l_s = R 2\alpha_s$.

Кожний елементарний сектор горизонтальної циліндричної ємкості подаємо як трикутник з основою $R \Delta 2\alpha_s$ і висотою R , центр ваги якого розміщений на відстані $R_l = \frac{2}{3}R$ від центра круга (рис. 2). Отже, центр y_c сектора AOB з центральним кутом $2\alpha_s$ (рис. 2) збігається з центром ваги дуги AB цього сектора, радіус якої $R_l = \frac{2}{3}R$, і на основі (2)

$$z_c = R_l \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s}. \quad (3)$$

Під час поперечно-кутових коливань бітумо-щебеневого агрегату відстань OC (рис. 1, б) від центра горизонтально розміщеної циліндричної ємкості до центра мас C розігрітого рідкого бітуму, який рівно наполовину заповнює цю ємкість ($n=R$, де центральний кут сектора півкола $2\alpha_s = \pi$, α_s – половина центрального кута), визначимо за допомогою відомої формули (3):

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,4244R; \quad (\alpha_s = \frac{\pi}{2} \text{ для } h = R). \quad (4)$$

Якщо горизонтальна циліндрична ємкість бітумо-щебеневого агрегату наповнена менше ніж наполовину ($h < R$) розігрітим рідким бітумом (рис. 1, в), то під час поперечно-кутових коливань бітумо-щебеневого агрегату відстань OC (C – положення центра маси сегмента) можна визначити з умови, як визначається положення центра ваги складних фігур (сектора без його трикутника) за формулою не об'ємів, а площ, оскільки поперечний переріз сегмента бітуму вздовж осі ємкості сталий:

$$OC = \frac{F_s z'_s - F_\Delta z'_\Delta}{F_s - F_\Delta} = \frac{R^2 \alpha_s \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s} - R^2 \sin \alpha_s \cos \alpha_s \frac{2}{3} R \cos \alpha_s}{R^2 \alpha_s - R^2 \sin \alpha_s \cos \alpha_s} = \frac{2R \sin^3 \alpha_s}{2(\alpha_s - \sin \alpha_s \cos \alpha_s)}, \quad (5)$$

де F_s і F_Δ та z'_s і z'_Δ – площі та координати в осях $0z'$ і $0y'$ відповідно сектора і трикутника.

Якщо горизонтальна циліндрична ємкість бітумо-щебеневого агрегату наповнена більше ніж наполовину ($h > R$) розігрітим рідким бітумом (рис. 1, а), то під час поперечно-кутових коливань бітумо-щебеневого агрегату відстань ОС у системі координат $0x'y'$ визначимо аналогічно з умови, якою визначається положення центра ваги складних фігур (сектора без його трикутника):

$$OC = \frac{F_0 z_{10} - F_{1s} z_{1s} - F_{\Delta} z_{1\Delta}}{F_0 - F_{1s} - F_{\Delta}} = \frac{0 - R^2 \alpha_s \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha_s}{\alpha_s} + R^2 \sin \alpha_s \cos \alpha_s \frac{2}{3} R \cos \alpha_s}{\pi R^2 - R^2 \alpha_s - R^2 \sin \alpha_s \cos \alpha_s} =$$

$$= \left| -\frac{2}{3} \frac{R \sin^3 \alpha_s}{\pi - \alpha_s + \sin \alpha_s \cos \alpha_s} \right|.$$
(6)

Координати центра маси рухливості рідкого бітуму під час коливань відносно системи координат $0zy$ будуть такі

$$y_{ci} = 0C_i \sin \alpha_p; \quad z_{ci} = 0C_i \cos \alpha_p, \tag{7}$$

де відстані OC_i (OC_i – координати положення центрів ваг відповідних сегментів) визначаємо за рівнянням (4), (5) і (6).

Розглянемо приклад, коли горизонтально-циліндрична ємкість бітумо-щебеневого агрегату наповнена розігрітим рідким бітумом більше ніж наполовину.

Внаслідок вертикальних і кутових поперечних коливань рухомої циліндричної горизонтальної ємкості, частково заповненої рідким бітумом, нормальна реакція N рідкого бітуму (рис. 1, а і рис. 3) зрівноважується вагою рідкого бітуму G_p , переносною Φ_{ei} , відносною Φ_{ri} і коріолісовою Φ_{ci} силами інерції.

Використовуючи принцип Германа–Ейлера–Даламбера, прикладемо у центрі мас розігрітого рідкого бітуму вектори переносної $\dot{\phi}_{ei}$, відносної $\dot{\phi}_{ri}$ і коріолісової $\dot{\phi}_{ci}$ сил інерції, нормальну реакцію рідкого бітуму \dot{N}_{pb} , вагу рідкого бітуму \dot{G}_p , силу інерції, спричинену вертикальним кінематичним збуренням $z(t)$, та вектор сили опору руху Φ_m , зумовлений загалом внутрішнім в'язким тертям і тертям до стінок ємкості рідкого бітуму з деяким його узагальненим коефіцієнтом в'язкості m пропорційним до швидкості переміщення центра маси рідкого бітуму вздовж його поверхні й спроекуємо вектори усіх сил відповідно на осі z і y . Запишемо рівняння динамічної рівноваги:

$$-m_p (g + \ddot{z}) + \Phi_{ei}^n \cos b + \Phi_{ei}^t \sin b - \Phi_{ri}^n \cos a_p - \Phi_{ri}^t \sin a_p -$$
(8)

$$-\Phi_{ci} \cos a_p + N_p \cos a_p - \Phi_m \sin a_p = 0;$$

$$\Phi_{ei}^n \sin b - \Phi_{ei}^t \cos b + \Phi_{ri}^n \sin a_p - \Phi_{ri}^t \cos a_p +$$
(9)

$$+\Phi_{ci} \sin a_p - N_p \sin a_p - \Phi_m \cos a_p = 0,$$

де m_p – маса розігрітого рідкого бітуму в циліндричній горизонтальній ємкості бітумо-щебеневого

агрегату $\left(m_p = \frac{G_p}{g} \right)$; m_r – активна рухома частина маси рідкого бітуму $\left(m_r \approx \frac{1}{2} l_p R^2 a_p \right)$; l_p –

довжина циліндричної ємкості бітумо-щебеневого агрегату;

$$\Phi_{ei}^n = m_p O' C_i \dot{\phi}_{ei}^n = m_p \frac{R - z_{ci}}{\cos b} \dot{\phi}_{ei}^n; \quad \Phi_{ei}^t = m_p O' C_i \dot{\phi}_{ei}^t = m_p \frac{R - z_{ci}}{\cos b} \dot{\phi}_{ei}^t; \quad \Phi_{ri}^n = m_r 0C_i w_{ri}^n = m_r 0C_i \dot{\phi}_{ri}^n;$$

$$\Phi_{ri}^t = m_r e_{ri} = m_r 0C_i \dot{\phi}_{ri}^t; \quad \Phi_{ci} = 2m_r \dot{\phi}_{ri} = 2m_r 0C_i \dot{\phi}_{ri}; \quad \Phi_m = m_r V_{ri} = m_r 0C_i \dot{\phi}_{ri};$$

$$w_{ri} = \frac{V_{ri}}{0C_i} = \dot{\phi}_{ri}; \quad V_{ri} = \sqrt{\dot{z}_{ci}^2 + \dot{y}_{ci}^2} = 0C_i \dot{\phi}_{ri}; \quad z_{ci} = 0C_i \cos a_p(t); \quad y_{ci} = 0C_i \sin a_p(t).$$

Враховуючи, що $N_p \cos a_p = N_z$ і $N_p \sin a_p = N_y$ та $O'C_i = \frac{R - z_{ci}}{\cos b}$, з рівнянь (6) і (7)

визначаємо відповідно N_z і N_y :

$$N_z = m_p (g + a_{pR}) - m_p a_{pR} q^2 - m_p a_{pR} \text{tg} b q^2 + m_r a_p^2 z_{ci} + m_r a_p y_{ci} + 2m_r q^2 z_{ci} + m_r a_p y_{ci}; \quad (10)$$

$$N_y = m_p a_{pR} q^2 \text{tg} b - m_p a_{pR} q^2 + m_r a_p y_{ci} - m_r a_p z_{ci} + 2m_r q^2 y_{ci} - m_r a_p z_{ci}, \quad (11)$$

де $a_{pR} = R - OC_i \cos a_p$.

Щоб встановити закон коливань у поперечно-вертикальній площині розігрітого рідкого бітуму в циліндричній ємкості бітумо-щебеневого агрегату у вигляді функції кута нахилу рідкого бітуму до горизонту $a_p(t)$, необхідно з рівнянь (8) і (9) вилучити нормальну реакцію рідини N .

Для цього використовуємо умови:

$$\frac{N_y}{N_z} = \text{tg} \alpha_p; \quad (12)$$

$$\frac{y_{ci}}{z_{ci}} = \text{tg} \alpha_p, \quad (13)$$

і враховуючи, що $y_c = OC_i \sin \alpha_p$, $z_{ci} = OC_i \cos \alpha_p$, та прирівнюючи ліві частини рівнянь (12) і (13), запишемо:

$$\frac{N_y}{N_z} = \frac{OC_i \sin \alpha_p}{OC_i \cos \alpha_p}. \quad (14)$$

Із рівняння (14) одержимо, що

$$N_y = \cos \alpha_p = N_z \sin \alpha_p. \quad (15)$$

Рівняння (15) запишемо у вигляді:

$$N_z \sin \alpha_p - N_y \cos \alpha_p = 0. \quad (16)$$

Підставляючи у рівняння (16) значення виразів (10) і (11), для N_z і N_y , після перетворень одержимо закон коливань рідкого бітуму в циліндричній горизонтальній ємкості бітумо-щебеневого агрегату в поперечно-вертикальній площині. Для цього помножимо рівняння (8) на $\sin a_p$, а рівняння (9) на $\cos a_p$ і складемо ці рівняння та після перетворень одержимо закон коливань рідкого бітуму в циліндричній горизонтальній ємкості у поперечно-вертикальній площині у вигляді:

$$m_r OC_i a_p + m_r OC_i a_p + m_p a_{pR} (\cos a_p - \text{tg} b \sin a_p) q^2 - m_p a_{pR} (\sin a_p + \text{tg} b \cos a_p) q^2 + m_p (g + a_{pR}) \sin a_p = 0, \quad (17)$$

де $\text{tg} \beta = \frac{y_{ci}}{R - z_{ci}} = \frac{OC_i \sin \alpha_p}{\alpha_{pR}}$; $i = 1, 2, 3$, а відстані OC_i визначено відповідно рівняннями (4), (5), (6)

залежно від наповнення розігрітим рідким бітумом горизонтально розміщеної циліндричної ємкості бітумо-щебеневого агрегату.

Для розв'язання загалом задачі про коливання підресореного причіпного бітумо-щебеневого агрегату в поперечно-вертикальній площині під час його руху, спричиненого нерівностями дороги з урахуванням впливу рухливості розігрітого рідкого бітуму, частково заповненого у його циліндричній горизонтальній ємкості, розроблено адекватну розрахункову схему, показану на рис. 3.

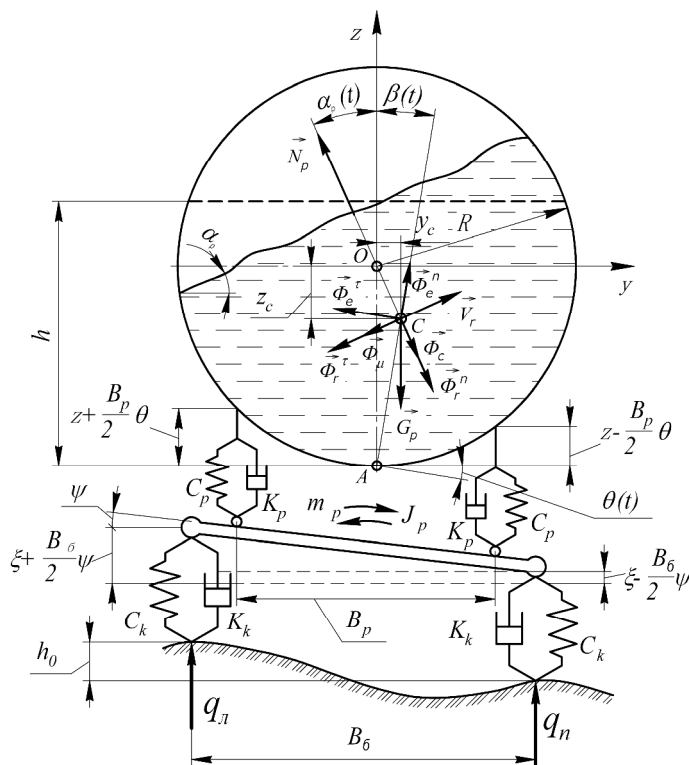


Рис. 3. Розрахункова схема коливань у поперечно-вертикальній площині причіпного бітумо-щебеневого агрегату, циліндрична горизонтальна ємкість якого частково заповнена розігрітим рідким бітумом

Відповідно до розрахункової схеми (рис. 3) складемо нелінійні диференціальні рівняння, які описують коливальний процес у поперечно-вертикальній площині причіпного бітумо-щебеневого агрегату, частково заповненого розігрітим рідким бітумом у його циліндричній горизонтальній ємкості, у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & M \ddot{z} + 2k_p \left[z + \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] + 2k_p \left[z - \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] + \\
 & + 2c_p \left[z + \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] + 2c_p \left[z - \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] + N_z = 0; \\
 & I_0 \ddot{\psi} + 2k_p \left[\xi + \frac{B_p}{2} \dot{\psi} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} - 2k_p \left[\xi - \frac{B_p}{2} \dot{\psi} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} + \\
 & + 2c_p \left[z + \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} - 2c_p \left[z - \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} + N_z y_{ci} + N_y (h_0 - z_{ci}) = 0; \\
 & m_p \ddot{x} + 2k_k \left[x + \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] + 2k_k \left[x - \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] - \\
 & - 2k_p \left[z + \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] - 2k_p \left[z - \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] + \\
 & + 2c_k \left[x + \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] + c_k \left[x - \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] - \\
 & - 2c_p \left[z + \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] - 2c_p \left[z - \frac{B_p}{2} \dot{\theta} - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_p \ddot{y} + 2k_k \left[x + \left(\frac{B_k}{2} y - q_l \right) \right] \frac{B_k}{2} - 2k_k \left[x - \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] \frac{B_k}{2} + \\
 & + 2c_k \left[x + \left(\frac{B_k}{2} y - q_l \right) \right] \frac{B_k}{2} - 2c_k \left[x - \left(\frac{B_k}{2} y - q_{II} \right) \right] \frac{B_k}{2} - \\
 & - 2k_p \left[z + \frac{B_p}{2} q - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} + 2k_p \left[z - \frac{B_p}{2} q - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} - \\
 & - 2c_p \left[z + \frac{B_p}{2} q - \left(x + \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} + 2c_p \left[z - \frac{B_p}{2} q - \left(x - \frac{B_k}{2} y \right) \right] \frac{B_p}{2} = 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

де $M = m_{\delta} + m_p$ – підресорена маса бітумо-щебеневого агрегату m_{δ} разом з розігрітим рідким бітумом m_p ; k_p , k_k і c_p , c_k – коефіцієнти в'язкості та жорсткості відповідно підвіски бітумо-щебеневого агрегату і коліс; z , ξ і θ , ψ – вертикальні і кутові переміщення циліндричної горизонтальної ємкості, частково заповненої рідким бітумом, на підвісці і відповідно коліс причіпного бітумо-щебеневого агрегату; I_{δ} , I_p та m_p – зведений момент інерції системи “тіло-рідина” стосовно поздовжньої його осі, момент інерції та маса моста бітумо-щебеневого агрегату; y_{ci} і z_{ci} – координати центра мас розігрітого рідкого бітуму стосовно центра 0 циліндричної горизонтальної ємкості причіпного бітумо-щебеневого агрегату; q_l і q_{II} – збурення від нерівностей дороги під лівими і правими колесами причіпного бітумо-щебеневого агрегату; N_y і N_z – складові реакції відповідно на осі y і z , що діють на стінки циліндричної ємкості бітумо-щебеневого агрегату під час коливань розігрітого рідкого бітуму і які визначаються з рівнянь (10), (11) і (12) та (14).

Рівняння (18) з урахуванням виразів для N_x і N_z та інерційних сил після перетворень набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 & (M + m_p) \ddot{x} + 4k_p (x - \xi) + 4c_p (z - x) - m_p a_{pR} \text{tg } b \dot{q} - \\
 & - m_p a_{pR} \dot{q}^2 + 2m_r q_p^2 z_{ci} + m_r q_p^2 y_{ci} + m_r a_p^2 z_{ci} + m_r a_p^2 y_{ci} + m_p y_{ci} = 0; \\
 & I_{\delta} \ddot{q} - m_p a_{pR} [\text{tg } b y_{ci} + (h - z_{ci})] \dot{q} - m_p a_{pR} [y_{ci} + (\text{htg } b - z_{ci})] q^2 + \\
 & + 2m_r y_{ci} [z_{ci} + (h - z_{ci})] q_p^2 - m_r [y_{ci}^2 - z_{ci} (h - z_{ci})] a_p - \\
 & - m_r y_{ci} [z_{ci} + (h - z_{ci})] a_p^2 + m_r [y_{ci}^2 - z_{ci} (h - z_{ci})] a_p + m_p \ddot{z}_{ci} + m_p g y_{ci} + \\
 & + k_p B_p^2 q + c_p B_p^2 q - k_p B_k B_p y = 0; \\
 & m_p \ddot{x} + 4(k_k + k_p) x + 4(c_k + c_p) x - 4k_p \xi - 4c_p z = 2k_k (q_l - q_{II}) + 2c_k (q_l - q_{II}). \\
 & I_p \ddot{y} + (B_k k_k + B_p k_p) B_k y + (B_k c_k + B_p c_p) B_k y - B_p^2 k_p q = B_k k_k (q_l - q_{II}) + B_k c_k (q_l - q_{II}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Збурення від нерівностей дороги під лівими і правими колесами, переважно для практичних розрахунків, наближено подають у вигляді:

$$q_l = h_0 (1 - \cos nt); \quad q_{II} = h_0 (1 - \sin nt); \quad n = \frac{2p}{S} V, \tag{20}$$

де n – частота збурення (чергування нерівностей дороги); S та h_0 – довжина хвилі та половина висоти нерівностей профілю дороги.

Останні два рівняння системи (14) з урахуванням (16) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 & m_p \ddot{x} + 4(k_k + k_p)x + 4(c_k + c_p)\dot{x} - 4k_p z - 4c_p \dot{z} = \\
 & = 2h_0 k_k n(\sin nt + \cos nt) + 2h_0 c_k (\sin nt - \cos nt); \\
 & I_p \ddot{y} + (B_k k_k + B_p k_p) B_{\alpha} y + (B_k c_k + B_p c_p) B_{\alpha} \dot{y} - B_p^2 k_p \ddot{q} = \\
 & = B_k h_0 n k_k (\sin nt + \cos nt) + B_k h_0 c_k (\sin nt - \cos nt).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, що систему нелінійних диференціальних рівнянь (18) з урахуванням (20) у сукупності з (12) можна розв'язати тільки числовим методом. Для цього подамо цю систему нелінійних диференціальних рівнянь у зручному для числового розв'язання вигляді, ввівши заміну:

$$z = z_1; \quad \dot{z} = \dot{z}_1; \quad \ddot{z} = \ddot{z}_1; \quad q = q_1; \quad \dot{q} = \dot{q}_1; \quad \ddot{q} = \ddot{q}_1; \quad \alpha_p = \alpha_{p1}; \quad \dot{\alpha}_p = \dot{\alpha}_{p1}; \quad \ddot{\alpha}_p = \ddot{\alpha}_{p1}; \quad x = x_1; \quad \dot{x} = \dot{x}_1; \quad \ddot{x} = \ddot{x}_1; \quad y = y_1; \quad \dot{y} = \dot{y}_1; \quad \ddot{y} = \ddot{y}_1;$$

$$\begin{cases}
 a_{11} \ddot{z}_1 - a_{12}(a_p) \ddot{q}_1 + a_{15}(a_p) = b_1(z, z_1, q_1, \dot{q}_1^2, x, \dot{x}_1, y, \dot{y}_1, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2, q_1, nt); \\
 a_{21} \ddot{z}_1 + a_{22}(a_p) \ddot{q}_1 - a_{25}(a_p) \ddot{\alpha}_{p1} = b_2(q, q_1, \dot{q}_1^2, y, \dot{y}_1, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2); \\
 a_{33} \ddot{x}_1 = b_3(z, z_1, x, \dot{x}_1, nt); \\
 a_{44} \ddot{y}_1 = b_4(q_1, y, \dot{y}_1, nt); \\
 a_{51}(a_p) \ddot{z}_1 - a_{52}(a_p) \ddot{q}_1 - a_{55}(a_p) \ddot{\alpha}_{p1} = b_5(q_1, \dot{q}_1^2, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2),
 \end{cases} \tag{22}$$

де

$$\begin{aligned}
 & a_{11} = M + m_p; \quad a_{12}(a_p) = m_p a_{pR} \operatorname{tg} b; \quad a_{15} = m_r y_{ci}; \\
 & a_{21} = m_p y_{ci}; \quad a_{22}(a_p) = I_{\sigma} - m_p a_{pR} [\operatorname{tg} b y_{ci} + (h - z_{ci})]; \\
 & a_{25} = m_r [y_{ci}^2 - z_{ci}(h - z_{ci})]; \\
 & a_{33} = m_p; \quad a_{44} = I; \quad a_{51}(a_p) = m_p \sin a_p; \quad a_{52}(a_p) = m_p a_{pR} (\operatorname{tg} b \sin a_p + \cos a_p); \\
 & a_{55}(a_p) = m_p OC_i; \\
 & b_1(z, z_1, q_1, \dot{q}_1^2, x, \dot{x}_1, y, \dot{y}_1, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2, nt) = m_p a_{pR} q_1^2 - 2m_r z_{ci} q_1 a_{p1} - \\
 & - m_r z_{ci} a_{p1}^2 - m_r y_{ci} a_{p1} - 4k_p(z - x_1) - 4c_p(\dot{z} - \dot{x}) - m_p y_{ci}; \\
 & b_2(q, q_1, \dot{q}_1^2, y, \dot{y}_1, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2) = m_p a_{pR} [y_{ci} + \operatorname{tg} b (h - z_{ci})] q_1^2 - \\
 & - 2m_r y_{ci} q_1 a_{p1} + m_r y_{ci} h a_{p1}^2 - m_r [y_{ci} - z_{ci}(h - z_{ci})] a_{p1} - k_p B_p^2 q_1 - \\
 & - c_p B_p^2 \dot{q} + k_p B_{\alpha} \dot{y}_1 + c_p B_{\alpha} B_p \dot{y} - m_p g y_{ci}; \\
 & b_3(z, z_1, x, \dot{x}_1, nt) = 2 \left\{ 2 \left[k_p z_1 + c_p \dot{z} - (k_k + k_p) x_1 - (c_k + c_p) \dot{x} \right] + \right. \\
 & \left. + h_q [k_k n(\sin nt z - \cos nt) + c_k (2 - \sin nt - \cos nt)] \right\}; \\
 & b_4(q_1, y, \dot{y}_1, nt) = B_p^2 k_p q_1 - B_k \left\{ (B_k k_k + B_p k_p) y_1 + (B_k c_k + B_p c_p) \dot{y} - \right. \\
 & \left. - h_q [k_k n(\sin nt + \cos nt) + c_k (\sin nt - \cos nt)] \right\}; \\
 & b_5(q_1, \dot{q}_1^2, a_p, \dot{\alpha}_{p1}, \alpha_{p1}^2) = m_{rc} a_{p1}^2 \sin 2a_p + m_p a_{pR} (\operatorname{tg} b \cos a_p - \sin a_p) q_1^2 - \\
 & - 2m_{rc} q_1 a_{p1} \sin 2a_p - m_{rc} a_{p1} \cos 2a_p + m_p g \sin a_p.
 \end{aligned}$$

Для числового розв'язування системи нелінійних диференціальних рівнянь (18) доцільно використовувати такі параметри системи:

$$\begin{aligned}
 & M = m_{\sigma} + m_p = 1000 + 950 \approx 2000 \text{ (кг)}, \quad k_p = 2 \cdot 10^3 \text{ Нс/м}, \quad k_k = 3 \cdot 10^2 \text{ Нс/м}, \\
 & c_p = 5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, \quad c_k = 3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad I_{\sigma} = 5 \cdot 10^2 \text{ кгм}^2, \quad I_p = 5 \cdot 10^3 \text{ кгм}^2, \quad m_p = 950 \text{ кг},
 \end{aligned}$$

$$m_p = \frac{G_p}{g} \approx \frac{950}{9,8} \approx 1000 \text{ кг}, \quad q_1 = 0,05 \text{ м}, \quad q_{II} = 0,05 \text{ м}, \quad \alpha_{pR} = 0,02, \quad B_p = 1,8 \text{ м}, \quad B_k = 2 \text{ м},$$

$$\theta = 0 \div \frac{\pi}{6}, \quad \psi = 0 \div \frac{\pi}{12}, \quad \alpha_p = 0 \div \frac{\pi}{4}, \quad \beta = 0 \div \frac{\pi}{6}, \quad R = 0,5 \text{ м}, \quad l_0 = 2 \text{ м}.$$

Висновки. Отже, розроблена динамічна модель і запропонований підхід дають змогу виконувати аналіз динамічних процесів у причіпному бітумо-щебеновому агрегаті з торсіонною підвіскою з урахуванням рухливості розігрітого рідкого бітуму в його циліндричній горизонтальній ємкості у поперечно-вертикальній площині, вибирати раціональні параметри цього агрегату для підвищення ефективності функціонування загалом.

Перспективи подальших досліджень. Надалі доцільно здійснити аналіз динамічних процесів у бітумо-щебеновому агрегаті на основі числового розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь (18). Крім цього, бажано визначити коефіцієнти в'язкого тертя рідкого бітуму до стінок горизонтальної циліндричної ємкості бітумо-щебенового агрегату, а також необхідно провести натурні експериментальні дослідження та порівняти їх з теоретичними результатами досліджень.

1. Богоряд И. Б., Дружинин И. Ф., Дружинин Г. З., Либин Э. И. Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977. – 144 с. 2. Богомаз Г. И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. – К.: Наукова думка, 2004. – 223 с. 3. Вікович І. А., Дубневич О. М., Остапчук М. М. Модель і метод розрахунку динамічних процесів у причіпному бітумо-щебеновому агрегаті з незалежною торсіонною підвіскою з урахуванням рухливості розігрітого рідкого бітуму // Укр. міжвід. науково-техн. зб. “Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – Вип. 44. – С. 46–52. 4. Горьков П. И. Динамическое действие колеблющейся жидкости на цистерны при неполном наливе // Изд-во АН СССР, ОНТ. – М., 1952. – № 2. – С. 19–24. 5. Гузь А. Н. Динамика сжимаемой жидкости (обзор) // Прикл. мех. – 2000. – 36, № 1. – С. 25–52. 6. Дмитриченко М. Ф., Вікович І. А. Динаміка мобільних машин з начіпними функціональними елементами: монографія. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2008. – 496 с. 7. Дмитриченко М. Ф., Вікович І. А., Дубневич О. М. Аналіз динамічних процесів у причіпному бітумо-щебеновому агрегаті з незалежною однавжільною підвіскою // Вісн. Нац. транспортного ун-ту. – К.: НТУ, 2011. – Вип. 24. – С. 7–15. 8. Дмитриченко М. Ф., Вікович І. А., Дубневич О. М., Бутитер І. Б. Розроблення моделі і методу розрахунку динамічних процесів у бітумо-щебеновому агрегаті // Вісн. Нац. транспортного ун-ту. – К.: НТУ, 2012. – Вип. 26. – С. 34–41. 9. Лобанов Н. В. Моделирование торсионной подвески гусеничных транспортных средств // Вестник РГРТУ. – Вып. 23. – Рязань, 2008. – С. 45–47. 10. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащих жидкость. – К.: Наук. думка, 1990. – 296 с. 11. Мойсеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1995. – 440 с. 12. Панков Ю. П. Применение ЭВМ для определения оптимальных конструктивных параметров торсионно-пружинной подвески и исследования колебаний прицепа // Автомобильная промышленность. – 1995. – № 1. – С. 16–19. 13. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изд-во АН СССР, ОНТ. – М., 1951. – С. 1483–1494. 14. Филатов А. Н. О динамическом действии жидкости на цистерну при произвольном ускорении // Труды Ин-та матем. и механики АН УзССР. – Ташкент, 1957. – Вып. 21. – С. 107–111. 15. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 183 с.