УДК 621.391.96

Прудиус Іван [1], Лазько Оксана [2], Лазько Леонід [1], Синявський Андрій [1]

[1] ДУ "Львівська політехніка", кафедра радіотехнічних пристроїв

[2] ДУ "Львівська політехніка", кафедра теоретичної радіотехніки та радіовимірювань

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА НАЯВНОСТІ НЕГАУССІВСЬКОЇ ВИПАДКОВОЇ СКЛАДОВОЇ

В статті розглянуто підхід до відновлення зображень з негауссівською випадковою адитивною складовою методом максимуму правдоподібності. Запропонований метод базується на оцінюванні статистичних моментів шуму та максимізації функції правдоподібності, апроксимованої рядом Грамма-Шарльє.

At the paper approach to image restoration at the presence of essential additive nongauss component by maximum likelihood method is presented. This method helps to estimate statistical moments of high order of noise component and likelihood function approximation by Gram-Charlier series.

Покращання якості зображень є актуальним завданням в багатьох галузях науки та техніки. Це питання набуває особливої ваги при візуальному аналізі та розпізнаванні зображень космічних об'єктів, реставрації зображення в томографії, неруйнівному контролі та в інших сферах, де необхідно компенсувати негативний вплив системи формування зображення.

Більшість реальних систем можна наближено описати лінійною моделлю. Для таких систем задача відновлення зображення формулюється як розв'язок рівняння Фредгольма першого роду. Формування зображення в операторному вигляді можна подати так:

$$G=\boldsymbol{H}F+n\,, \tag{1}$$

де H – лінійний спотворювальний оператор, який відповідає системній функції; G – результат вимірювань; F – правдиве зображення; n – випадкова складова.

Відомі детерміністичні методи відновлення [1], які передбачають відсутність похибок у вихідних даних або їх незначний рівень та гауссівську природу. За наявності значної випадкової складової розв'язок задачі може як завгодно відрізнятись від правдивого. Здебільшого інформація про закон розподілу шуму невідома, а припущення про гауссівський характер – некоректне.

Наявність значних випадкових складових у реальних зображеннях та сигналах вказує на доцільність використання статистичних підходів [2, 3] до розв'язання задачі. Якщо відсутня апріорна інформація про статистичні властивості розв'язку, доцільно скористатись оцінюванням значень елементів зображення методом максимуму правдоподібності [3].

Для аналітичного запису функції правдоподібності необхідно знати закон розподілу випадкової складової, яка з'являється під час формування зображень. При гауссівському характері складової шуму задача розв'язується методом найменших квадратів $H^T G = H^T H \cdot F$, де $(\ )^T$ – операція транспонування.

Для визначення закону розподілу випадкової складової та запису його в аналітичному вигляді пропонується оцінювати статистичні моменти на однорідній ділянці зашумленого зображення. Тоді закон розподілу випадкової складової може бути апроксимований рядом Грамма-Шарльє [4,5].

$$p_{GS}(n) = p_N(n) - \frac{A}{3!} p_N(n)^{(3)} + \frac{E}{4!} p_N(n)^{(4)} - \dots \tag{2}$$

де $p_N(n)$ – нормальний закон розподіл; $p_{GS}(n)$ – закон-розподіл, апроксимований рядом Грамма-Шарльє; A – асиметрія; E – ексцес. Якщо відсутні апріорні дані про характер розподілу параметрів елементів F, доцільно застосувати метод максимуму правдоподібності, який полягає у максимізації функції правдоподібності:

$$p(G \mid F) = \prod_{i=1}^{N^2} p_{GS}\left(g_i - \sum_{j=1}^{N^2} h_{i,j} \cdot f_j \right) \tag{3}$$

де g_i – елементи виміряного зображення; $h_{i,j}$ – елементи матриці H; f_j – елементи правдивого зображення, $N \times N$ – розмірність зображення.

Максимум функції буде спостерігатись, якщо виконується умова:

$$\frac{\partial}{\partial F} ln(\, p(G|F\,))\Big|_{F=\hat{F}_{ml}} = 0 \tag{4}$$

де $\widehat{F}_{ml}$ – зображення, за якого значення функції правдоподібності максимальне.

Після ряду перетворень одержуємо функціонал, який містить, окрім квадратичних складових, складові з вищими показниками степеня:

$$\Omega(A, E, F) = \|G - HF\|^2 + \left\| R((G - HF)^n, A, E) \right\| \tag{5}$$

де $R\Big((G - HF)^n, A, E\Big) = \frac{A}{4+E} H^T - \frac{A}{4+E} H^T (G - HF)^2 - \frac{E}{12+3E} H^T (G - HF)^3 + \dots$

Потенційна точність розв'язку задачі (1) може бути знайдена з нерівності Рао-Крамера:

$$e\left[\widehat{f}_{i\,ml} - f_i\right]^2 \geq \frac{1}{I_{i,i}}, \tag{6}$$

де $I_{i,i} = -e\left[\frac{\partial^2 ln\big(p(G \mid F)\big)}{\partial f_i^{\,2}}\right]$ – діагональні елементи матриці Фішера. Для даного методу розв'язання задачі максимізацією апроксимованої функції правдоподібності можна визначити дисперсію оцінки або точність відновлення зображення. Такий вираз не буде суперечити частковому виду задачі (2) для гауссівського *(A=0;E=0;)* закону розподілу випадкової складової *n,* точність відновлення при якому буде визначатися відношенням:

$$e\left[\widehat{F}_{ml} - F\right]^2 \geq \sigma^2 \big/ \|h\|^2 \tag{7}$$

де h – системна функція.

Якщо розподіл імовірностей випадкової складової відрізняється від нормального, таких, як гостро- та плосковершинність, функціонал (5) змінює свою крутизну в околі точки розв'язку.

За наявності відхилень типу асиметричності розв'язок на основі квадратичного функціоналу одержаного зміщення через відхилення максимуму закону розподілу імовірностей. Таке зміщення може призвести до значних відхилень отриманого розв'язку від правдивого (зміщення від правдивого розв'язку). Мінімізацією виведеного функціоналу (5) компенсується відхилення його розв'язку за наявності асиметричності.

Використання методу максимуму правдоподібності для оброблення зображень на основі функціоналу (5) перевірено на тестовому зображенні, зручному для оцінки просторової роздільної здатності у різних напрямках. Тестове зображення подано на рис.1. Як випадкова складова згенеровано шум, гістограму якого наведено на рис.2. Розмите та зашумлене зображення, яке втратило свою структуру, показано на рис.3.

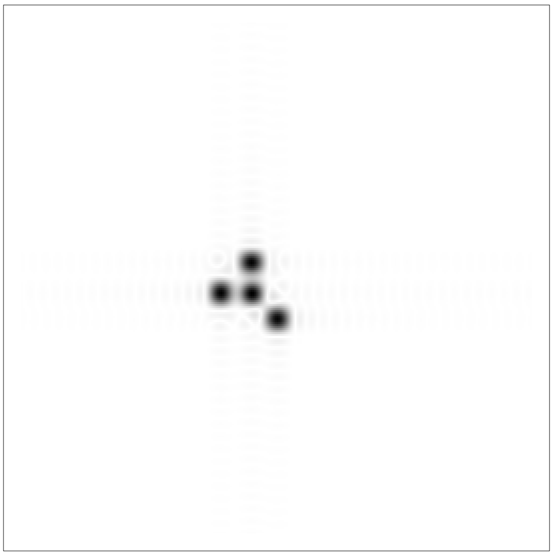

Рис. 1. Тестове зображення.

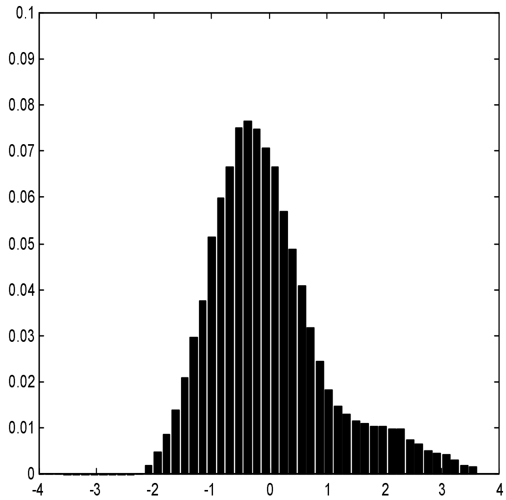

Рис. 2. Розподіл імовірностей появи випадкових складових сигналу.

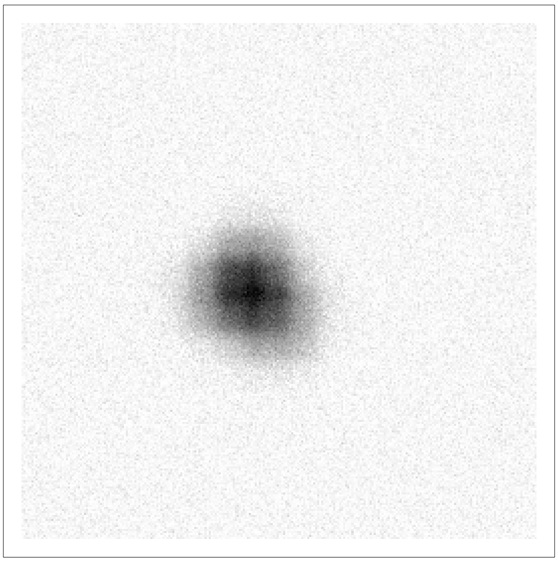

Рис. 3. Спотворене зображення.

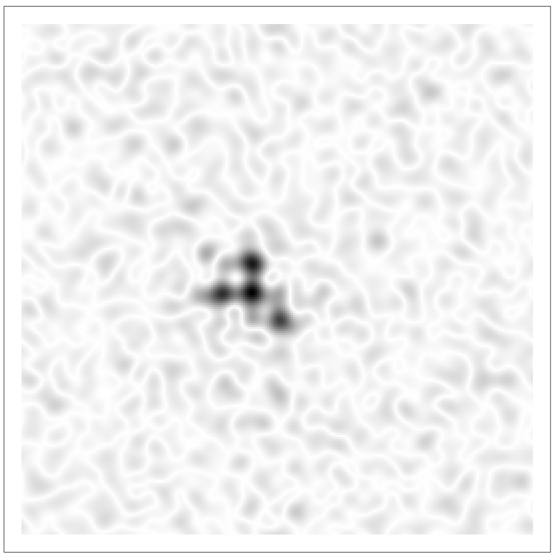

Рис. 4. Відновлене зображення.

Якість даного зображення покращувалась на основі мінімізації побудованого функціоналу за допомогою ітераційного алгоритму розв'язання задач оптимізації. Зображення, для якого значення функціоналу набуває мінімуму, показано на рис.4. Як видно, за допомогою даного методу вдалось відновити структуру зображення.

У наведеному прикладі відомі правдиве зображення та системна функція, тому оцінити результат нескладно.

Для прикладу оцінимо також реальне спотворене зображення (рис.5.), якщо відома системна функція та невідомий характер шуму.

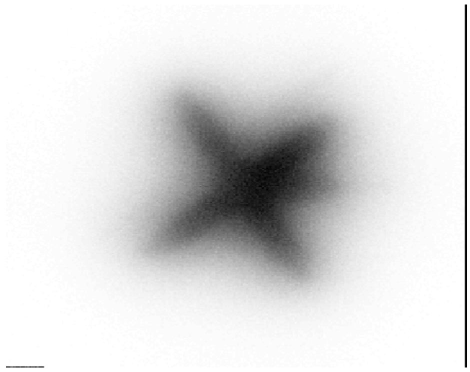

Рис. 5. Розмите та зашумлене зображення.

Рис. 6. Відновлене зображення.

Властивості шуму оцінено на однорідній ділянці зображення. Розподіл імовірностей шуму відрізняється від нормального і має коефіцієнти A=-1; E=2, тобто є гостровершинним та має зміщений максимум. Внаслідок оброблення отримано зображення супутника (рис.6).

Апроксимація закону розподілу імовірностей негауссівської випадкової адитивної складової зображень рядами Грамма-Шарльє дала можливість записати функціонал правдоподібності для негауссівського шуму в аналітичному вигляді. В результаті аналізу з'ясовано, що використання квадратичних функціоналів коректне лише при гауссівському шумові. При негауссівських шумах у функціоналі з'являються члени з вищими показниками степеня. За допомогою запропонованого методу отримано кращі результати відновлення як тестових, так і реальних зображень порівняно з припущенням про гауссівську природу шуму.

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. 2. Тихонов В., Харисов В. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие М., 1991. 3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. 1989. 4. Недоступ Л.А., Лазько О.В., Бобало Ю.Я. Modeling of the distribution of product parameters using Gram-Charlier and Edgeworth series // Electronics and Electrical Engineering. 1999. № 4(22). С.54-57. 5. Недоступ Л.А., Лазько О.В., Бобало Ю.Я Дослідження деяких моделей квазінормальних розподілів РЕА // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 352. С. 3-9.