

$$C_1 \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} (h_k - h_{k-1}) + C_2 \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} \left(\frac{h_k^2}{2} - \frac{h_{k-1}^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\int_{T_0(z)}^{T(z)} \alpha_k(T) dT \right] dz, \quad (8)$$

$$C_1 \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} \left(\frac{h_k^2}{2} - \frac{h_{k-1}^2}{2} \right) + C_2 \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} \left(\frac{h_k^3}{3} - \frac{h_{k-1}^3}{3} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{1-\nu_k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\int_{T_0(z)}^{T(z)} \alpha_k(T) dT \right] z dz, \quad (9)$$

Постійні коефіцієнти C_1 і C_2 мають певний фізичний зміст: C_1 являє собою лінійну відносну деформацію (розтяг-стиск) пластини при $Z=0$; а C_2 – кривину згину пластини, що визначає її рівноважний напружено-деформований стан. Розв'язавши систему рівнянь (8) і (9), отримаємо постійні C_1 і C_2 , які підставляємо в (3) і (4). В результаті одержуємо співвідношення для визначення деформації та напруження в кожному шарі для даної інтегральної структури.

Розглянутий метод реалізований у вигляді програми на MATHCAD для розрахунку НДС багатошарової системи між'єднань для багатокристалльного модуля. Запропонований метод дає змогу визначити напружено-деформований стан в будь-якій багатошаровій структурі.

1. Боли Б. и Уейнер Дж. Теория температурных напряжений. М., 1964. 2. Хуторянская Д.Г. Определение напряженного состояния многослойных вязкоупругих плит при нестационарном и неоднородном по толщине температурном поле // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1977. 3. Kitazawa I, Hibino Y. A Steady on Thermal-Stress-Reliability of Si Based PLC Substrate // IEEE Trans. Comp., Packag., Manufakt. Technol. 1997. Vol. 20. №7. P. 327 – 333.

УДК 621.319.837

Кобасяр Михайло, Русин Богдан

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ СХЕМИ ЗНІМАННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ ДАНИХ НА ЯКІСТЬ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

© Кобасяр Михайло, Русин Богдан, 2000

У роботі проведена оцінка необхідної кількості проєкційних даних для реконструкції зображень. Досліджено вплив параметрів схеми знімання проєкційних даних при їх зашумленні і обмеженні динамічного діапазону на якість реконструкції.

In the work is carried out the estimation of the necessary amount of the projection data for reconstruction of the images. It has been investigated the influence

of the noise of them and limited dynamic range of the scheme parameters on the quality of reconstruction.

Основна мета, яка ставиться у задачах реконструкції, – отримання зображення розподілів фізичного параметра $f(x, y)$ (наприклад, коефіцієнта поглинання у рентгенівській комп'ютерній томографії [1,5-7]) за вимірними вздовж M траєкторій проекційними даними $p_\theta(v)$

$$p_\theta(v) = \int_{((x,y),v)=l} f(x, y) du, \quad (1)$$

де θ – кут, під яким отримана проекція.

Інтеграл у виразі (1) називають променевою сумою. Повну систему променевих сум для даного кута θ називають проекцією.

Для заданих траєкторій $p_\theta(v)$ ми можемо скласти систему рівнянь із M лінійних рівнянь і розв'язати її відносно невідомого об'єкта $f(x, y)$.

Для складання системи лінійних рівнянь широко використовують підхід, який полягає на розкладі її у ряди [2,6]. Об'єкт, що реконструюється, апроксимується масивом елементів із рівномірною густиною. Для того, щоб виключити обробку нескінченної кількості даних, як правило, обмежують просторову роздільну здатність, вибираючи розмір елемента зображення таким, що дорівнює a . Тоді загальна кількість елементів у прямокутній області розміром N буде дорівнювати $N \times N$.

Склавши рівняння для кожного променя, отримаємо систему із M рівнянь для $N \times N$ невідомих

$$p_{lk} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_{ij} \cdot \Delta l_{ij}^{lk}, l = 0, \dots, N_p - 1, k = 0, \dots, N_{di}^k, \quad (2)$$

де p_{lk} – променева сума для k -го зміщення відносно центру координат (x, y) l -ї проекції; f_{ij} – середнє значення $f(x, y)$ для комірки (i, j) ; Δl_{ij}^{lk} – довжина відрізка променя у межах комірки; N_{di}^k – кількість променевих сум (зміщень) для k -ї проекції (максимальне значення N_d отримується для кутів, кратних 45 [8]); N_p – загальна кількість проекцій.

Постановка задачі

Задача визначення функції $f(x, y)$ зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь (2). Однак залишається ряд проблем, найголовніша із яких, на нашу думку, – необхідна кількість проекційних даних. З математичної точки зору, – обчислення достатньої кількості незалежних рівнянь, що визначається геометрією сканування, для однозначного відновлення f . На практиці фізичні (наприклад, доза опромінення у рентгенівській комп'ютерній томографії), економічні та інші обмеження не дають змоги отримати велику кількість проекційних даних [7]. Крім того, значення p_{lk} ніколи не відомі точно, що пов'язано з наявністю у системі вимірювань різних джерел шумів, похибками вимірювання, а також з апроксимаціями при складанні дискретної моделі. Тому, у загальному випадку, система (2) є несумісною. Крім цього, проекційні дані можуть містити і систематичні

помилки, наприклад, сума променевих проекцій не дорівнює точно загальній густині перерізу. Помилки можуть виникати і у заданні напрямку променів тощо.

Незважаючи на те, що кількість проекцій скінченна, відновлення можна виконати і при обмеженій кількості проекцій. Наприклад, для двомірної функції при круговій симетрії усі проекції ідентичні, тому функція $f(x, y)$ може бути точно відновлена за однією проекцією. Аналогічно, якщо функція $f(x, y)$ є функцією із розподіленими змінними вигляду $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, її можна відновити за двома проекціями, отриманими по нормалях до осей координат. Це випливає з того, що у даному випадку $p_x(y)$ пропорційне $f_2(y)$, а $p_y(x)$ пропорційне $f_1(x)$.

Класи кругосиметричних функцій або функції з розділеними змінними - це часткові випадки функцій. Існує загальніший клас функцій, які можна реконструювати за обмеженою кількістю проекцій. До них належать функції, що мають обмежену ширину спектра і скінченний порядок. Такі функції можна зобразити за допомогою однієї проекції [3]. Відомі алгоритми у випадку ідеальних проекційних даних можуть реконструювати функцію точно. Проте шуми у проекційних даних, обмеження динамічного діапазону та інші чинники погіршують точність відновлення і дають змогу отримати лише оцінку шуканої функції розподілу навіть при достатньо великій кількості проекцій.

Виходячи з вищенаведених факторів, необхідно визначити залежність якості реконструкції від параметрів схеми знімання проекційних даних (зокрема, кількості проекцій та кількості променевих сум у цих проекціях) при різних параметрах вимірювальної системи (зокрема, від шуму та розрядності АЦП).

Аналіз необхідної кількості проекційних даних

Проекції повинні бути рівномірно розподілені на кутовому інтервалі $[0, \pi)$. Якщо вони зосереджуватимуться у вузькому інтервалі, отримані дані не будуть незалежними.

Необхідну кількість проекцій, яка гарантує задану точність розв'язку, можна оцінити на основі Фур'є-аналізу [1].

Припустимо, що зображення не містить частот, більших за максимальну частоту V_m . Це припущення веде до трьох основних висновків:

- 1) зображення може бути відновлене за масивом точок з інтервалами $a = \frac{1}{V_m}$;
- 2) проекції можна вибирати з однаковим інтервалом;
- 3) перетворення Фур'є можна замінити рядом Фур'є.

На основі викладеного визначимо кількість дискрет у проекції N_d і кількість проекцій N . Якщо R – радіус області визначення зображення, тоді $2R = N_d \cdot a$, звідки, враховуючи (1), знайдемо

$$N_d = 4V_m \cdot R \quad (3)$$

Проекції визначаються із кроком $\Delta\theta = \frac{\pi}{M}$, тоді маємо $R \cdot \Delta\theta = a$, звідки

$$N_p = 2\pi \cdot V_m \cdot R \quad (4)$$

Відзначимо, що цей метод оцінки потребує завищеної кількості проєкцій.

Можна також оцінити мінімальну кількість проєкцій $N_{p \min}$, необхідну для відновлення зображення. Вище було показано, що якщо необхідна просторова здатність зображення дорівнює a , кожна проєкція містить N_d незалежних значень даних. Оскільки загальна кількість значень функції, обмежених кругом із радіусом R , які ми повинні відновити, дорівнює $N^2 \approx \pi \frac{N_p^2}{4}$, мінімальна кількість проєкцій, яка необхідна для відновлення

$$N_{p \min} \approx \pi \frac{N_d}{4} \quad (5)$$

Врахувавши рівняння (4) і (5), отримаємо

$$\frac{N_p}{N_{p \min}} = 2 \quad (6)$$

Одержані співвідношення стосуються ідеальних проєкційних даних і не враховують шум.

Кількісні критерії оцінки якості зображення

Нині не існує універсального якісного критерію, на який можна було б спиратися при розв'язанні задач реконструкції зображень за їх проєкціями. Пов'язано це із тим, що остаточна реакція спостерігача дуже складна. Тому неможливо встановити об'єктивний критерій. Оцінюючи якість зображення, користуються окремими частковими критеріями, кожен з яких відображає певну особливість зображення, залежно від того, яку інформацію бажано виявити на зображенні. Такими критеріями є, наприклад, середньоквадратичне відхилення, відношення сигнал/шум тощо. Певною їх перевагою є простота обчислення. Крім того, вони добре узгоджуються із суб'єктивними оцінками якості [4].

Говорячи про якість отриманого зображення, ми, насамперед, думаємо про те, наскільки воно схоже на дійсне. Довільне випадкове зображення флюктує відносно свого середнього значення. Якщо величина флюктуацій невелика, то одержані випадкові зображення схожі на своє середнє значення. Для того, щоб кожне отримане випадкове зображення було схоже на оригінал, недостатньо, щоб воно мало відрізнялося від середнього, вимагається, щоб і середнє значення мало відрізнялося від оригіналу.

Результати проведених досліджень

Досліджена залежність якості реконструкції складноструктурованих зображень від кількості ракурсів N_p та кількості дискрет у цих проєкціях N_d . Якість реконструйованих зображень оцінювалася середньоквадратичною похибкою. Дослідження проводилися при різних параметрах середнього значення m та середньоквадратичного відхилення δ нормального закону розподілу шуму, який вносився у проєкційні дані. У всіх наведених графіках, крім рис.3, розмір зображення, що реконструюється, – 128×128 . Зображення наведено на рис.1,а, а приклад проєкційних даних (радонівський образ) – при $N_p = 200$ і $N_d = 100$ на рис.1, б.

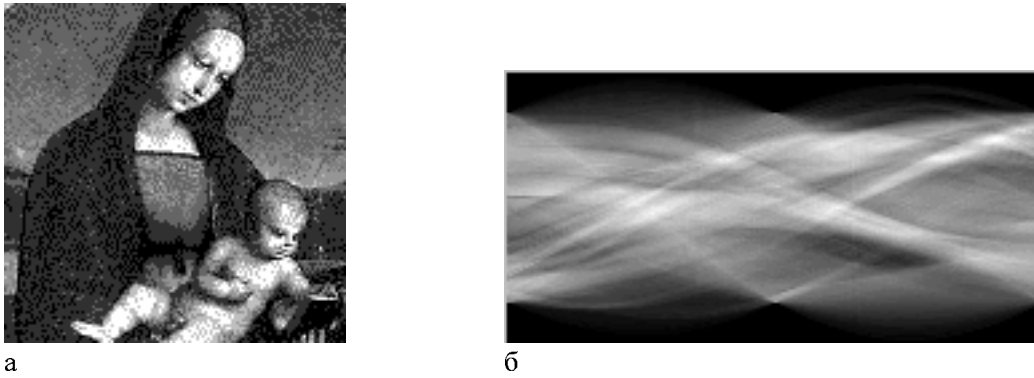


Рис.1. Вхідне зображення (а) та його радонівський образ (б)
при $N_p = 200$ і $N_d = 100$.

При зміні кількості ракурсів (рис.2) вплив шуму призводить до погіршення якості реконструкції зображень для даного значення проєкційних даних на 5-7%. Згідно з формулою (4), для заданої похибки реконструкції необхідно 200 проєкцій, а з графіка бачимо, що ця величина лежить в межах 185-200 (залежно від рівня шуму). На рис.5-6 наведено приклади реконструйованого зображення, які підтверджують зроблені висновки.

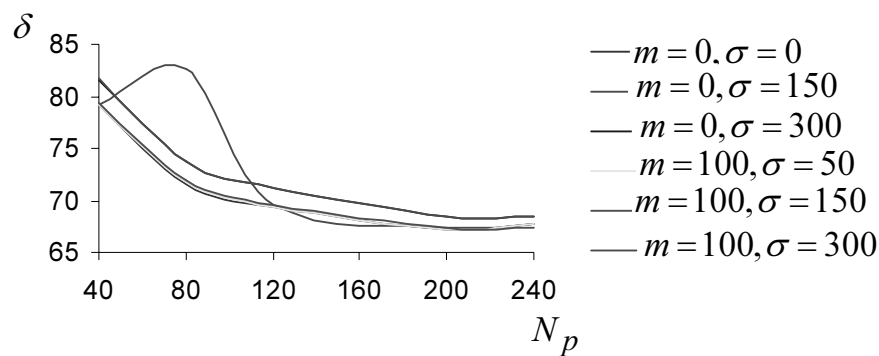


Рис.2. Залежність похибки реконструкції від кількості ракурсів
при $N_d = 100$ і різних параметрах шуму.

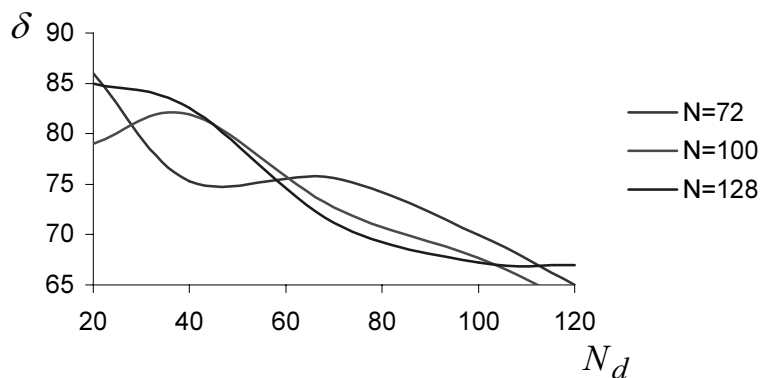


Рис.3. Залежність похибки реконструкції від кількості зміщень
при $N_p = 200$ і різних розмірах зображення.

Зміна кількості зміщень у проєкціях для різних значень шуму показала, що оптимальне значення похибки досягається при $N_d = 80 - 110$ (розрахункове значення – 128), а подальше збільшення кількості зміщень призводить до зростання похибки, що пояснюється появою несумісності системи рівнянь (2) при внесеному шумі. Якщо подати ці залежності для різних розмірів зображень (рис.3), то побачимо, що лише для зображення 128×128 пікселів досягається необхідне значення похибки при 10 % зменшенні кількості дискрет у проєкції порівняно із розрахунковим значенням. Для зображень меншого розміру необхідне значення похибки досягається при 40-80 % перевищенні теоретично розрахованого значення кількості зміщень у проєкції. Як бачимо, відповідно на рис.5,а, рис 5,б та рис.6,а, рис.6,б при недостатній кількості дискрет виникають геометричні спотворення у вигляді концентричних кіл, симетричних до центру зображення. Подальше зменшення кількості дискрет у проєкціях веде до того, що зображення має вигляд суцільних концентричних кіл.

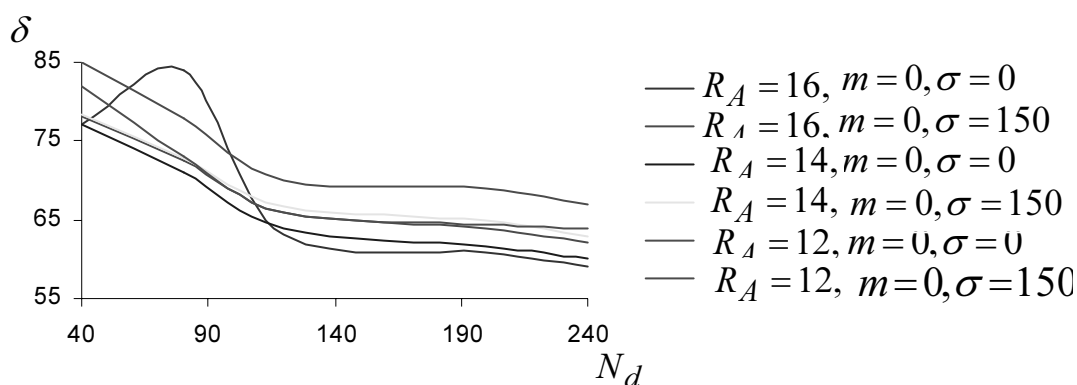


Рис.4. Залежність похибки реконструкції від кількості ракурсів при $N_d = 100$ та різних параметрах шуму та розрядності АЦП.



Рис.5. Реконструйоване зображення при $m = 0$, $\delta = 0$: а) $N_p = 200$, $N_d = 100$; б) $N_p = 140$, $N_d = 100$; в) $N_p = 200$, $N_d = 70$.

Дослідження впливу розрядності АЦП свідчить про високу чутливість проєкційних даних до її зменшення. Як і кількість зміщень у проєкціях, так і кількість самих проєкцій (рис.4.) дуже чутливі до зменшення розрядності АЦП. Подальше збільшення проєкційних даних не веде до покращання результатів реконструкції. Це пояснюється тим, що отримана під час ітераційного процесу невідповідність між реальними та обчисленими для поточного наближення проєкційними даними прямує до нуля.



Рис.6. Реконструйоване зображення при $m = 100$, $\delta = 300$: а) $N_p = 200$, $N_d = 100$;

б) $N_p = 140$, $N_d = 100$; в) $N_p = 200$, $N_d = 70$.

Висновки

1. При малих рівнях шуму у проєкційних даних можна брати кількість ракурсів, на 5-10 % меншу від розрахованого значення, що дасть змогу зменшити час обчислень на 3-7 %.
2. Зменшення кількості дискрет порівняно з розрахунковим веде до появи геометричних спотворень. Для зображень, не більших за 100×100 пікселів, кількість зміщень повинна бути на (40-80)% більшою за розрахункові значення.
3. Висока чутливість проєкційних даних до обмеження діапазону їх зміни та неможливості отримання реконструйованого зображення із заданою якістю при обмеженні цього діапазону ставлять жорсткі вимоги до розрядності АЦП. Задану якість реконструкції можна одержати при 12-розрядному АЦП.

1. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. М., 1989.
2. Мерсеро, Отпенхайм. Цифровое восстановление многомерных сигналов по их проекциям // ТИИЭР. 1974. Т.62. № 10. С.29-51.
3. Mersereau R. M. The digital reconstruction of multi-dimensional signals from their projections, Sc. D. dissertation, M.I.T., Dept. of Elec. Eng., 1973.
4. Роуз А. Зрение человека и электронное зрение. М., 1977.
5. Русын Б.П. Синтез трехмерных сцен при вычислительной томографии // В кн.: "III Всесоюзный симпозиум по вычислительной томографии". М., 1987.
6. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М., 1983.
7. Применение реконструктивной вычислительной томографии в рентгенодиагностике / Л.Аксин, П.Арджер, Р.Зиммерман // ТИИЭР. Т.71. № 3. 1983. С.8-13.
8. Belyaev V., Kobasyar M., Rusyn B. The use of symmetry properties in realization of Radon transformations // Proceedings of International Conference on Modern Problems of Telecommunications, Computur Science and Engineers Trainin. Lviv, 2000. P.134-135.