ПРОБЛЕМИ ВИМІРЮВАНЬ В НАРОДНОМУ ГОСПОДАРСТВІ

УДК 531.7.08

ВИЗНАЧЕННЯ ВИМОГ ДО ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ В СИСТЕМАХ ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

© Володимир Поджаренко, Володимир Кучерук, Василь Кухарчук, Олеся Войтович, Володимир Севастьянов, 2001

Вінницький державний технічний університет, кафедра "Метрологія та промислова автоматика",
Хмельницьке шосе, 95, 21021, Вінниця, Україна

Розглянуто методику визначення необхідної точності вимірювань діагностувальних параметрів у системах технічної діагностики. Показано, що метрологічна вірогідність діагностики явно виражається не через метрологічну вірогідність діагностики окремих параметрів, а через їх ризики замовника та виробника. Для визначення ризиків виробника та замовника запропоновано використати функцію Іордана, за допомогою якої можна описати практично всі симетричні закони розподілу та узагальнити методику отримання необхідної точності вимірювань діагностувальних параметрів. Проведена апроксимація функцією Іордана ряду законів розподілу (нормальний, трикутний та прямокутний). Отримано аналітичні співвідношення для ризиків замовника та виробника, які є загальними для різних комбінацій законів розподілу ймовірностей діагностованих параметрів і розподілу ймовірностей їх випадкових похибок вимірювання.

Рассмотрена методика определения необходимой точности измерений диагностических параметров в системах технической диагностики. Показано, что метрологическая достоверность диагностики явным образом выражается не через метрологическую достоверность диагностики отдельных параметров, а через их риски заказчика и изготовителя. Для определения рисков изготовителя и заказчика предложено использовать функцию Иордана, с помощью которой можно описать практически все симметричные законы распределения. Использование функции Иордана позволяет обобщить методику получения необходимой точности измерений диагностических параметров. Проведена аппроксимация функцией Иордана ряда законов распределения (нормальный, треугольный и прямоугольный). Получены аналитические соотношения для рисков заказчика и изготовителя, которые являются общими для разных комбинаций законов распределения вероятностей диагностических параметров и распределения вероятностей их случайных погрешностей измерения.

The technique of necessary accuracy definition of the measurement of diagnostic parameters in the technical diagnostics systems is considered it is shown, that the metrological reliability of diagnostics is expressed not by the metrological reliability of diagnostics of separate parameters but by the risk of the customer and the risk of the manufacter. It is offered to use the Iordan function which can describe almost all symmetric distribution laws to define the risks of the customer and the manufacturer. Use of the Iordan function allows to generalize the technique of the necessary accuracy reception of measurements diagnostic parameters. The approximation by the Iordan function of a number of the distribution laws (Gauss, Triangular, Rectangular) is carried out. The analitical parities for the risks of the customer and the manufacturer which are general for different combinations of the probabilities distribution laws of the diagnostic parameters and probabilities distribution laws of their casual measurement errors are received.

Однією з основних характеристик систем технічної діагностики (СТД) при їх проектуванні є необхідна точність вимірювання діагностувальних параметрів. Точність вимірювання цих параметрів визначає інструментальну вірогідність діагностики, ймовірність правильної оцінки СТД технічного стану об'єкта діагностування (ОД) за діагностувальними параметрами (ДП) (за придатністю або непридатністю для використання за призначенням).

Для визначення необхідної точності вимірювання діагностувальних параметрів ОД використаємо теорію точності вимірювань [1, 2]. Необхідно мати повну інформацію про ОД: діагностувальні параметри; їх закони розподілу ймовірностей; допуски на параметри і ймовірності браку за діагностувальними параметрами p_i.

Приймемо, що ОД має, в загальному випадку, *n* незалежних ДП, тоді ймовірність браку:

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i), \qquad (1)$$

де p_i – ймовірність браку за ДП.

В результаті діагностики за наявності похибок вимірювань СТД є повна група несумісних подій: *А* – придатний ОД визнаний придатним; *Б* – непридатний ОД визнаний непридатним; *В* – придатний ОД визнаний непридатним; *Г* – непридатний ОД визнаний придатним.

Ймовірність $P(В) = \alpha$ величину ризик виробника (похибка 1-го роду), а ймовірність $P(Г) = \beta$ – величина ризику у замовника (похибка 2-го роду). Згідно з визначенням величина інструментальної метрологічної вірогідності діагностики:

$$Д = 1 - \alpha - \beta\ . \qquad (2)$$

Щоб визначити необхідну точність вимірювання по *і*-му ДП, необхідно визначити допустиму величину ризику виробника α або замовника β через величини α_i та β_i за цим параметром. Характеристики інструментальної вірогідності діагностики α і β через величини α_i та β_i знаходяться [2]:

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - \alpha_i), \qquad (3)$$

$$\beta = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - \alpha_i + \beta_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - \alpha_i)\ . \qquad (4)$$

Тоді з виразів (2, 3, 4) отримаємо:

$$Д = P + 2 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - \alpha_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - \alpha_i + \beta_i)\ . \qquad (5)$$

Інструментальна метрологічна вірогідність діагностики ОД явно виражається не через інструментальну метрологічну достовірність діагностики окремих параметрів $Д_i = 1 - \alpha_i - \beta_i$, а через їх характеристики α_i та β_i.

Найпридатнішим критерієм при заданні вимог до точності вимірювань є ризик виробника [2]. Критерій задання вимог до точності вимірювань СТД такий: точність вимірювань СТД повинна відповідати інструментальному ризику виробника α, якщо задані закони розподілу ймовірностей ДП ОД.

Щоб визначити необхідну точність вимірювань, необхідно розв'язати рівняння (3) відносно α_i. Для однозначного розв'язання рівняння (3), яке є рівнянням з *n* невідомими, необхідно накласти додаткові достатні умови. Такими умовами можуть бути *n* рівнянь, що визначають функціональну залежність величин α_i від коефіцієнтів впливу параметрів на ризик виробника. При пропорційній залежності величин α_i від коефіцієнтів впливу отримаємо систему *n* рівнянь:

$$\alpha_i = a \cdot \theta_i\ , \quad (i=1,2,..,n), \qquad (6)$$

де a – коефіцієнт пропорційності; θ_i – коефіцієнт впливу *і*-го параметра на α.

Підставивши рівняння (6) в (3), отримаємо:

$$\alpha = 1 - p - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i - a\theta_i)\ . \qquad (7)$$

За допомогою математичних перетворень можна одержати [2] розв'язок рівняння (7) відносно a:

$$a = \frac{-\sum_{i=1}^{n}(\theta_i + p_i\theta_i) + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i + p_i\theta_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2\left[\sum_{i=1}^{n}(p_i + \frac{p_i}{2})^2 + ln(1 - P - \alpha)\right]}}{\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2}\ . \qquad (8)$$

Коефіцієнти впливу θ_i визначаються з умови реалізації необхідної точності вимірювань за заданими α_i. При симетричних законах розподілу ймовірності ДП можуть бути прийняті такі коефіцієнти впливу:

$$\theta_i = \sqrt{p_i}\ . \qquad (9)$$

Визначивши a та θ_i, можна знайти α_i. Далі, згідно з [1], визначається необхідна точність вимірювань за кожним ДП, тобто визначаються допустимі випадкова та систематична складові похибки вимірювання. Щоб визначити допустиму випадкову похибку вимірювання, необхідно за кожним ДП задати частку ризику виробника λ_i, що зумовлена випадковою похибкою вимірювання при нульовій систематичній похибці.

Значення ризику виробника, зумовлене випадковою похибкою, визначається як $\alpha_{\Delta_i} = \alpha_i \lambda_i$. Знаючи значення середньоквадратичної похибки вимірювання Δ_i за кожним ДП, згідно з [1] можна визначити величину ризику замовника β за виразом (4) і значення метрологічної вірогідності діагностики за виразом (2) при реалізації в СТД необхідної точності вимірювань.

В загальному випадку, рівняння для ризиків виробника та замовника по кожному ДП записуються:

$$\alpha = \int_A^B f(x) \left[\int_{A-\Delta}^{A} \varphi(\Delta) d\Delta + \int_B^{B+\Delta} \varphi(\Delta) d\Delta \right] dx, \qquad (10)$$

$$\beta = \int_B^{B+\Delta} f(x) \left[\int_{B-\Delta}^{B} \varphi(\Delta) d\Delta \right] dx +$$

$$+ \int_{A-\Delta}^{A} f(x) \left[\int_A^{A+\Delta} \varphi(\Delta) d\Delta \right] dx, \qquad (11)$$

де $f(x)$ – густина розподілу ймовірностей ДП; $\varphi(\Delta)$ – густина розподілу ймовірностей випадкових похибок вимірювання ДП; Δ – границя допустимої похибки вимірювання ДП; A, B – границі допуску ДП.

Загальна кількість законів, яким підпорядковуються розподіли $f(x)$ та $\varphi(\Delta)$, порівняно велика. Для їх опису допускається використання нормального зрізаного, трикутного, рівномірного, трапецієподібного, Релея усіченого, антимодального І і ІІ законів розподілу [3]. В [1, 2] використовується лише нормальний закон розподілу.

Якщо припустити, що всі сім законів мають місце для ДП та похибок вимірювань, то кількість пар комбінацій становитиме7^2=49. Тому обчислення виразів (10), (11) для такої кількості комбінацій досить об'ємні.

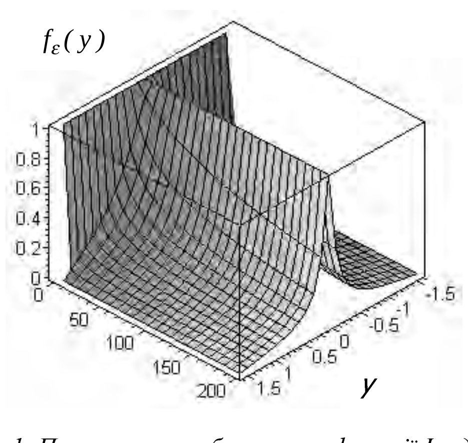


Рис. 1. Просторове зображення функції Іордана

Тому скористаємось так званою функцією Іордана [4]:

$$f_\varepsilon(y) = \frac{\cos y}{\sqrt{1+\varepsilon \cdot \sin^2 y}}. \qquad (12)$$

Основною властивістю цієї функції є те, що при зміні її параметра ε у діапазоні $-1 < \varepsilon \le \infty$ при зміні $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ форма функції змінюється від прямокутної до дельта-функції Дірака; при ε =0 функція Іордана набирає форму косинусоїди (рис.1), тобто цією функцією можна описати будь-яку симетричну функцію густини розподілу.

Для того, щоб функцію Іордана можна було використовувати для аналітичного опису функції густини розподілу ймовірності, необхідно її дещо перетворити, оскільки при будь-якому значенні СКВ випадкової величини визначений інтеграл функції густини ймовірності в нескінченних межах повинен дорівнювати одиниці. Можна довести, що необхідним умовам відповідає така функція, що залежить від параметрів *c* та ε :

$$\varphi_{\varepsilon,c}(y) = \frac{k \cdot \cos(cy)}{\sqrt{1+\varepsilon \cdot \sin^2(cy)}}, \qquad (13)$$

де

$$\begin{cases} k = c\sqrt{|\varepsilon|} \big/ 2\arcsin(\sqrt{|\varepsilon|}) & при \quad 1 \le \varepsilon < 0; \\ \quad c/2 & при \quad \varepsilon = 0; \\ c\sqrt{\varepsilon} \big/ 2\ln(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{1+\varepsilon}) & при \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$c = \sigma(\varepsilon)/\sigma;\ \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x^2 \varphi_\varepsilon(x) dx},\ \varphi_\varepsilon(y) = \varphi_{\varepsilon,c}(y)$$

при *c*=1; σ – реальне СКВ похибки при будь-якому виді закону розподілу. Вид закону розподілу визначається значенням ε .

Графіки функції $\varphi_{\varepsilon,c}(y)$ при певних значеннях ε та *c*=1 наведені на рис.2. Видно, що змінюючи ε в широких межах, можна змінювати вид густини ймовірностей від "тупих" до досить "гострих" функцій.

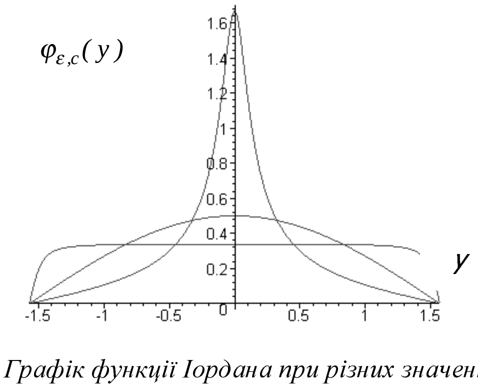


Рис. 2. Графік функції Іордана при різних значеннях ε

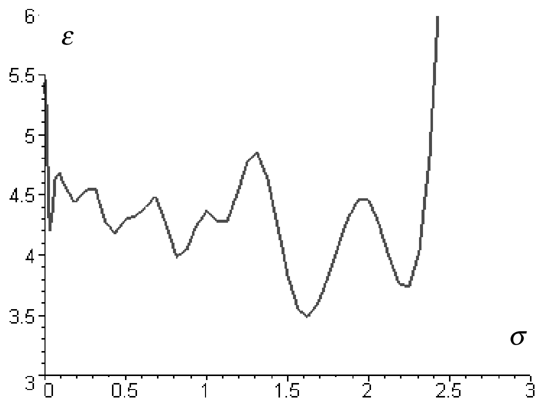
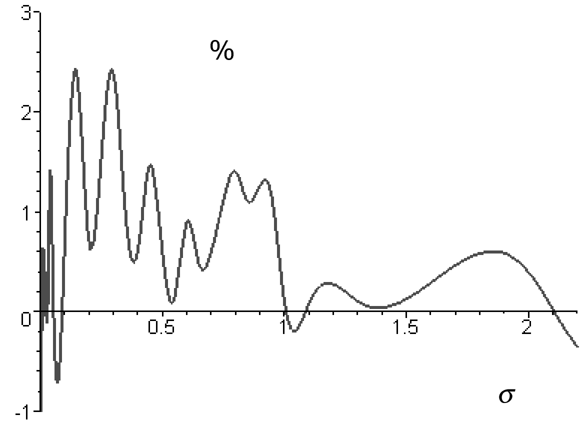
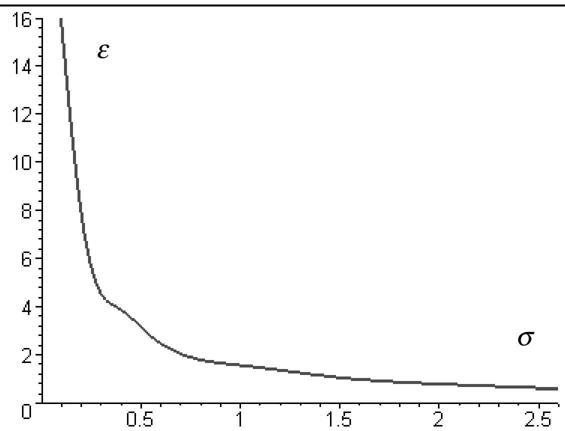
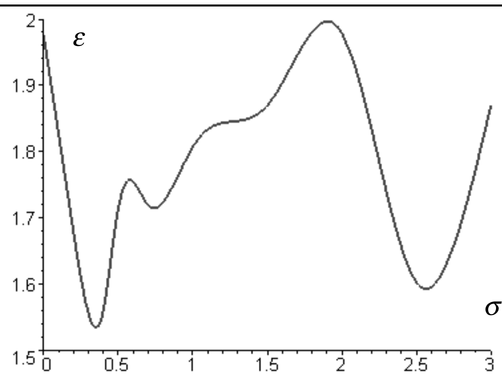
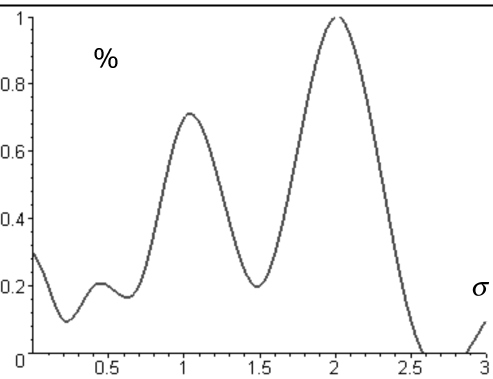
<table>
<tr><th>Залежність $\varepsilon(\sigma)$</th><th>Відн. похибка апроксимації</th></tr>
<tr><td colspan="2">Для нормального закону розподілу $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$ при $M_x=0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для прямокутного (рівномірного) закону розподілу $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, при\ x\in(-a;a)\\ 0, при\ x\notin(-a;a)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>0.1% у всьому діапазоні σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для трикутного (Сімпсона) закону розподілу $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), при\quad x\in(-a;a)\\ 0, при\ x\notin(-a;a)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Рис. 3. Результати апроксимації нормального, трикутного і прямокутного законів розподілу функцією Іордана

Було проведено ряд досліджень за допомогою пакета програм Table Curve, який призначений саме для апроксимації ряду даних певною функцією. Отримані залежності значення ε від реального СКВ σ заданих функцій розподілу густини ймовірності, а також залежності похибки апроксимації від σ. Досліди проведені для нормального, прямокутного та трикутного (Сімпсона) законів розподілу (рис. 3). Для нормального закону розподілу функція $\varepsilon(\sigma)$ має досить невизначений характер, це можна пояснити тим, що апроксимація була проведена для повного нормального закону, можливо, кращі результати можна отримати для зрізаної функції. Залежність $\varepsilon(\sigma)$ для даних, розподілених за трикутним законом розподілу, має схожий характер.

Для прямокутного закону розподілу залежність $\varepsilon(\sigma)$ має степеневий характер, і описується досить просто за допомогою функції $y = A \cdot x^B$. Похибка апроксимації в цьому випадку має рівномірний характер та становить 0.1 %.

Опишемо густину розподілу ймовірностей ДП $f(x)$ та густину розподілу ймовірностей випадкових похибок вимірювання ДП $\varphi(\Delta)$ за допомогою функції Іордана (13):

$$f(x) = \frac{k_1 \cdot cos(c_1 x)}{\sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2(c_1 x)}}; \; \varphi(\Delta) = \frac{k_2 \cdot cos(c_2 \Delta)}{\sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2(c_2 \Delta)}}, \quad (14)$$

де k_1, k_2, c_1, c_2 – коефіцієнти k і c для густин розподілу $f(x)$ і $\varphi(\Delta)$ відповідно.

З використанням пакета прикладних програм Maple [5] отримано аналітичні залежності для ризиків α (10) і β (11) при підстановці в них функцій Іордана (14):

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \Bigg[& ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin((A-\Delta)c_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2((A-\Delta)c_2)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin(Ac_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2(Ac_2)}}\right] - \\ & - ln\left[\sqrt{\varepsilon_2}\, sin((B+\Delta)c_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2((B+\Delta)c_2)}\right] + \\ & ln\left[\sqrt{\varepsilon_2}\, sin(Bc_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2(Bc_2)}\right] \times \\ & \times ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin(Ac_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2(Ac_1)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin(Bc_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2(Bc_1)}}\right]\Bigg]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\beta = \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \Bigg[& ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin((B-\Delta)c_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2((B-\Delta)c_2)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin(Bc_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2(Bc_2)}}\right] \times \\ & ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin(Bc_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2(Bc_1)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin((B+\Delta)c_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2((B+\Delta)c_1)}}\right] - \\ & - ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin(Ac_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2(Ac_2)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, sin((A+\Delta)c_2) + \sqrt{1+\varepsilon_2 sin^2((A+\Delta)c_2)}}\right] \\ & \times ln\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin(Ac_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2(Ac_1)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\, sin((A-\Delta)c_1) + \sqrt{1+\varepsilon_1 sin^2((A-\Delta)c_1)}}\right]\Bigg]. \end{aligned} \quad (16)$$

Висновки. Розглянуто методику визначення необхідної точності вимірювань ДП у системах технічної діагностики. Показано, що метрологічна вірогідність діагностики явно виражається не через метрологічну вірогідність діагностики окремих параметрів $Д_i = 1 - \alpha_i - \beta_i$, а через їх характеристики α_i та β_i.

Для визначення ризиків виробника α_i та замовника β_i запропоновано використати функцію Іордана, за допомогою якої можна описати практично всі симетричні закони розподілу. Використання функції Іордана дає змогу узагальнити методику отримання необхідної точності вимірювань ДП.

Проведена апроксимація функцією Іордана ряду законів розподілу (нормальний, трикутний та прямокутний). Відносна похибка апроксимації для нормального закону розподілу не перевищує 2.5%, для прямокутного закону розподілу – 0.1%, а для трикутного – 1%. Експерименти показали, що для нормального зрізаного закону розподілу похибка розподілу менша за 2.5%.

Отримано аналітичні співвідношення для α_i і β_i, які є загальними для різних комбінацій законів розподілу ймовірностей діагностованих параметрів і розподілу ймовірностей їх випадкових похибок вимірювання.

1. Дунаев Б.Б. Точность измерений при контроле качества. – К., 1981. 2. Дунаев Б.Б. Определение требований к точности измерений в системах контроля. / В кн.: “Точность и надежность кибернетических систем”. Вып. 2, 1974. – С. 90-94. 3. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л., 1991. 4. Земельман И.А. О классификации погрешностей измерений. // Измерительная техника. 1985. №6. – С.3-5. 5. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. – М., 1998.