

Лабораторії №№ 2,3,4,8,9,14 вимоги міжлабораторного експерименту не виконали.

Вказаним лабораторіям на підставі акту ДМН згідно з п.7.3 ПМУ16-2000 [7] вноситься пропозиція щодо анулювання атестату акредитації на право проведення вимірювань.

Проведений аналіз дає змогу зробити такі висновки:

- проведення міжлабораторного експерименту слід вважати основним елементом робіт з акредитації вимірювальних лабораторій на етапі підготовки та в акредитаційному періоді;
- використання ДСЗУ під час експерименту дає змогу максимально охопити галузь акредитації вимірювальних лабораторій;
- підготовка проби з використанням ДСЗУ гарантує конфіденційність та об'єктивність вимірювань під час міжлабораторного експерименту.

1. Закон України "Про метрологію та метрологічну діяльність", №113/98-ВР від 11.02.1998 р. 2. Сидорко І.І. Проведення міжлабораторного експерименту як елемент здійснення державного метрологічного нагляду та контролю // Український метрологічний журнал. 2001. Вип.2. – С. 7-9. 3. Правила акредитації на право проведення метрологічних робіт (ПМУ18-2000), затверджені наказом Держстандарту України 04.12.00 р. за №687 та зареєстровані в Міністерстві юстиції України 12.03.01р. за №211/5402. 4. ГОСТ 8.315-97 Стандартные образцы состава и свойств веществ и материалов. Основные положения. 5. Інструкція про порядок перевірки точності результатів вимірювань у вимірювальних лабораторіях (ПМУ15-99), затверджена наказом Держстандарту України 12.08.99р. за №99, затверджена Мінюстом України 2.12.99р. за №833/4126. 6. ISO/IEC Guide 43-: 1997 Proficiency testing by interlaboratory comparisons/ – Part 2. Selection and use of proficiency testing schemes by laboratory accreditation bodies/. 7. Інструкція про порядок здійснення державного метрологічного нагляду за забезпеченням єдності вимірювань (ПМУ16-2000), затверджена наказом Держстандарту України 17.05.00р. за №315 та зареєстрована в Міністерстві юстиції України 05.07.00р. за №393/4514.

УДК 536.3

РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУР З ТЕПЛОВИМИ ДЖЕРЕЛАМИ НА ПОВЕРХНІ

© Тарас Винник, Віктор Засименко, Дмитро Федасюк, 2001

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра "Метрологія, стандартизація і сертифікація",
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Наведено обґрунтування, алгоритм і математичну модель розподілу температури на поверхні за апіорно відомими залежностями випромінювальної здатності від температури.

Приводятся обоснования, алгоритм и математическая модель распределения температуры на поверхности за априорно известными зависимостями излучательной способности от температуры.

The grounding, algorithm and the mathematical model of the temperaturing area's distribution with aprior certain radiation emissivity are presented.

Вступ. Для вирішення ряду теплотехнічних задач конструювання і діагностики нагрівних приладів та елементів, а також метрологічних задач при вимірюванні і контролі температурних режимів важливе значення приділяється розрахунку температурних полів багатошарових структур [1, 2, 3].

Розподіл температури по поверхні такої структури, отриманий за допомогою тепловізора чи скануючого пірометра, як правило, подається в умовних значеннях температури. Введення поправок на випро-

мінювальну здатність є проблематичним, оскільки вона в загальному випадку є функцією від вимірюваної температури T і довжини хвилі. Якщо відсутня інформація про температуру, поправка здебільшого не усуває методичної похибки. В зв'язку з цим більшість тепловізорів не є засобами вимірювання всупереч стандарту на державну перевірочну схему [5]. Ця робота спрямована на вирішення проблеми вимірювання розподілу дійсних температур за наявності теплової картини інтенсивності випромінювання. Порівняння

вказаного розподілу з тепловізійною картиною, отриманою за допомогою скануючого пірометра або тепловізора відкриває перспективи їх метрологічного забезпечення.

Обґрунтування задачі. Для однозначного введення поправки на випромінювальну здатність як функцію температури T необхідно за наявності розподілу умовної температури знайти дійсне значення цієї температури хоч в одній із точок на поверхні досліджуваного тіла. Для цього достатньо використати п'яточкову термопару, [6], яка сама по собі є джерелом тепловиділення. Отже, завдання зводиться до розрахунку температурного поля багат шарової структури з джерелами тепловиділення на поверхні.

Залежність випромінювальної здатності твердих матеріалів від температури $\epsilon(T)$ значною мірою вивчена [7]. Очевидно, що якщо за допомогою інформації про випромінювальну здатність $\epsilon(T)$ і дійсну температуру T в одній із точок багат шарової структури знайти розподіл дійсних температур за координатами X, Y цієї поверхні, то така модель може бути метрологічною в основі перевірки тепловізорів і скануючих пристроїв.

У багатьох механічних конструкціях використовуються багат шарові структури з джерелами тепловиділення на поверхні. В цій статті розглядається задача про нестационарне температурне поле в багат шаровому паралелепіпеді з такими умовами теплообміну:

- джерела тепла знаходяться лише на верхній грані;
- на верхній та нижній гранях відбувається конвекційний теплообмін, а також наявне теплове випромінювання;
- початкова температура структури, а також температура довкілля – T_0 .

При загальноприйнятих допущеннях розглядається рівняння

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T, \quad (1)$$

де оператор Лапласа: $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, $\alpha = \frac{\rho c}{\lambda}$,

T – температура, відносна щодо температури довкілля, t – час, x, y, z – просторові координати, λ – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, ρ – густина.

Розв'язання задачі. Для розв'язання рівняння застосуємо наближення похідної по часу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \xi \cdot \left(\frac{T^{i+1} - T^i}{\tau} \right) + (1 - \xi) \cdot \left(\frac{T^i - T^{i-1}}{\tau} \right), \quad (2)$$

де $\xi \in [0; 1]$; τ – крок по часу. Відповідно до утвореної схеми створюються часові шари, на кожному з яких потрібно розв'язати стаціонарне рівняння:

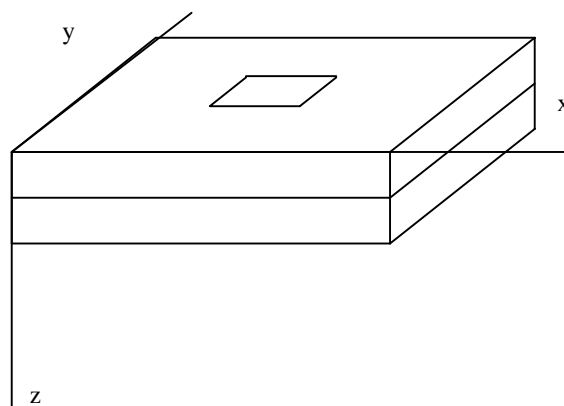
$$\alpha \left[\xi \left(\frac{T^{i+1} - T^i}{\tau} \right) + (1 - \xi) \left(\frac{T^i - T^{i-1}}{\tau} \right) \right] = \Delta T^{i+1}, \quad (3)$$

де T^{i-1}, T^i – відомі функції від просторових координат. Шуканим є температурне поле на $i+1$ – часовому шарі, тобто T^{i+1} . Провівши очевидні перетворення, отримаємо:

$$\frac{\alpha \xi}{\tau} T^{i+1} = \Delta T^{i+1} - \phi_{i+1}(x, y, z), \quad (4)$$

де $\phi_{i+1}(x, y, z) \equiv -\frac{\alpha}{\tau} \left[(2\xi - 1)T^i + (1 - \xi)T^{i-1} \right]$. Оскільки на кожному кроці невідомий тільки 1 часовий шар, то при подальших операціях індекс $i+1$ опускаємо: $T^{i+1} \equiv T$.

Для отримання розв'язку рівняння теплопровідності необхідно доповнити крайовими та початковими умовами. Оскільки T^{-1} у формулі (4) не задається, то на першому кроці ітерації приймаємо $\xi=1$. Систему координат вибираємо так, що осі OX і OY лежать в площині шарів, а вісь OZ спрямована вниз від верхнього шару, на якому розміщене джерело тепла:



Розташування теплового джерела на поверхні структури

Крайові умови: (по x , y) у разі умов ізотермічності на бічних гранях і (по x , y) у разі умов теплоізоляції на бічних гранях середовища відповідно:

$$T|_{x=0,l_x} = T|_{y=0,l_y} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,l_y} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0,l_x} = 0, \quad (5)$$

У напрямку Z : (по z , якщо $z=0$), застосовуючи закон Стефана-Больцмана, матимемо:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} + \alpha_l T|_{z=0} + \varepsilon(T+T_0) \cdot \sigma \cdot (T+T_0)^4 = Q(x,y,t), \quad (6)$$

і (по z , якщо $z=H_N$):

$$\lambda_N \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_N} + \alpha_N T|_{z=H_N} + \varepsilon(T+T_0) \cdot \sigma \cdot (T+T_0)^4 = 0, \quad (7)$$

де $Q(x,y,z,t)$ – функція розподілу теплового навантаження від поверхневого джерела. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$T = \sum_k \sum_l X_k Y_l Z_{kl} = \sum_l \sum_k T_{kl}(x,y,z)$$

Оскільки крайові умови по бічних гранях – умови першого роду, то фундаментальні розв'язки рівняння набувають вигляду: відповідно для ізотермічності та для теплоізоляції

$$\begin{aligned} X_k &= \sin \frac{k\pi x}{l_x}; \quad Y_l = \sin \frac{l\pi y}{l_y}, \\ X_k &= \cos \frac{k\pi x}{l_x}; \quad Y_l = \cos \frac{l\pi y}{l_y}, \end{aligned} \quad (8)$$

Введемо: $L = \left(\Delta - \frac{a\xi}{\tau} \right)$ – оператор. Тоді, здійснивши ряд перетворень, отримаємо:

нивши ряд перетворень, отримаємо:

$$Z_{kl}'' - \left[\left(\frac{k\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{l_y} \right)^2 + \frac{a\xi}{\tau} \right] Z_{kl} = \zeta_{kl}(Z), \quad (9)$$

де $\zeta_{kl} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \phi(x,y,z) X_k Y_l dx dy$. Після перетворення, використовуючи обчислені раніше функції T^{i-1}, T^i , матимемо:

$$\zeta_{kl}(Z) = \left[Z_{kl}^i (1-2\xi) + (\xi-1) Z_{kl}^{i-1} \right] \frac{a}{\tau}. \quad (10)$$

Позначивши $\gamma_{kl}^2 = \left(\frac{k\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{l_y} \right)^2 + \frac{a\xi}{\tau}$, отримуємо:

$$Z_{kl}'' - \gamma_{kl}^2 Z_{kl} = \zeta_{kl}(z), \quad (11)$$

Розв'язок одержаного звичайного неоднорідного рівняння із сталими коефіцієнтами подаємо у вигляді:

$$Z_{kl} = A_{kl} e^{-\gamma_{kl} z} + B_{kl} e^{\gamma_{kl} z} + R_{kl}(z), \quad (12)$$

де $R_{kl}(z)$ – частковий розв'язок рівняння (11).

Знаходження коефіцієнтів із врахуванням крайових умов. Для визначення загального розв'язку потрібно підібрати коефіцієнти так, щоб задовольнялись крайові умови по z згідно з виразом (6), де на верхній грані є конвекційний теплообмін з середовищем за наявності джерела тепловиділення, а також випромінювання нечорного тіла з випромінювальною здатністю, залежною від температури. Аналітичного розв'язку такої задачі немає, тому для розв'язання використовується послідовне наближення:

$$\begin{aligned} -\lambda \left. \frac{\partial T_n}{\partial z} \right|_{z=0} + \alpha T_n|_{z=0} &= Q(x,y,t) - \\ & - \varepsilon((T_{n-1} + T_0)) \cdot \sigma \cdot (T_{n-1} + T_0)^4, \end{aligned} \quad (13)$$

де T_n – обчислене значення температури у визначений момент часу при n -й ітерації. Для початку обчислювального процесу слід вважати, що випромінювальна компонента не враховується. Враховуючи вигляд ряду для T , отримаємо:

$$-\lambda \cdot Z'_{kl}(0) + \alpha \cdot Z_{kl}(0) = \Psi_{kl} - Z_{kl}(0)^4 \varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{kl} &= \frac{4}{l_x \cdot l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q(x,y,t) X_k(x) \cdot Y_l(y) dx \\ \varepsilon_{kl} &= \varepsilon_{kl}(z) \Big|_{z=0,h} = \left(\frac{4}{l_x \cdot l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varepsilon \left(\sum_{k,l=0} X_k(x) \cdot Y_l(y) \cdot Z_{kl}(z) \right) \right. \\ & \left. X_k^5(x) \cdot Y_l^5(y) dx \right) \Big|_{z=0,h}, \end{aligned} \quad (15)$$

де ε_{kl} – коефіцієнт розкладу в ряд Фур'є випромінювальної компоненти. На нижній грані джерел тепла немає, отже, теплообмін описується виразом:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} + \alpha T|_{z=0} + \varepsilon(T+T_c) \cdot \sigma \cdot (T+T_c)^4 = 0, \quad (16)$$

враховуючи (15):

$$\lambda \cdot Z'_{kl}(H_N) + \alpha \cdot Z_{kl}(H_N) + Z_{kl}(H_N)^4 \varepsilon_{kl} = 0.$$

Оскільки розглядається багаточарова структура, то накладають також умови неперервності теплового

потокy та температури при переходi з одного шару в iнший:

$$\lambda_m \frac{\partial T^m}{\partial z} \Big|_{z=h_m} = \lambda_{m+1} \frac{\partial T^{m+1}}{\partial z} \Big|_{z=0} ; T^m \Big|_{z=h_m} = T^{m+1} \Big|_{z=0} .(17)$$

Використовуючи розклад температури по елементарних функцiях, отримуємо:

$$\lambda_i Z_{kl}^{(m)}(h_m) = \lambda_{m+1} Z_{kl}^{(m+1)}(0) , \quad (18)$$

$$Z_{kl}^{(m)}(h_m) = Z_{kl}^{(m+1)}(0) , \quad (19)$$

Аргументи функцiї Z' вибранi так, щоб з кожним шаром пов'язувати свою систему координат. Результуючи вирази крайових умов, отримуємо для верхньої гранi i для нижньої гранi вiдповiдно:

$$A_{kl}^1 (\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)}) + B_{kl}^1 (-\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)}) = \Psi_{kl} + \lambda^{(1)} R_{kl}'^{(1)}(0) - \alpha^{(1)} R_{kl}^{(1)}(0) - Z_{kl}(0)^4 \epsilon_{kl} , \quad (20)$$

$$A_{kl}^N (-\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)}) e^{-\gamma_{kl}^{(N)} h_N} + B_{kl}^N (\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)}) e^{\gamma_{kl}^{(N)} h_N} = -\lambda^{(N)} R_{kl}'^{(N)}(h_N) - \alpha^{(N)} R_{kl}^{(N)}(h_N) - Z_{kl}(H_N)^4 \epsilon_{kl} , (21)$$

Зв'язок мiж шарами через неперервнiсть потокy та неперервнiсть температури виразиться як :

$$-A_{kl}^m e^{-\gamma_{kl}^{(m)} h_m} + B_{kl}^m e^{\gamma_{kl}^{(m)} h_m} + A_{kl}^{(m+1)} \frac{\lambda^{(m+1)} \gamma_{kl}^{(m+1)}}{\lambda^{(m)} \gamma_{kl}^{(m)}} - B_{kl}^{(m+1)} \frac{\lambda^{(m+1)} \gamma_{kl}^{(m+1)}}{\lambda^{(m)} \gamma_{kl}^{(m)}} = \frac{\lambda^{(m+1)} R_{kl}'^{(m+1)}(0)}{\lambda^{(m)} \gamma_{kl}^{(m)}} - \frac{R_{kl}'^{(m)}(h_m)}{\gamma_{kl}^{(m)}} , (22)$$

$$A_{kl}^m e^{-\gamma_{kl}^{(m)} h_i} + B_{kl}^m e^{\gamma_{kl}^{(m)} h_m} - A_{kl}^{(m+1)} + B_{kl}^{(m+1)} = 0 , \quad (23)$$

Об'єднавши (20)-(23), отримуємо систему рiвнянь (24) в матричному виглядi для визначення коефiцiєнтiв А та В. Ця система має 2N невимомих та 2N рiвнянь, де N – кiлькiсть шарiв у структурi, тобто є визначеною. Матриця коефiцiєнтiв є рядкового типу, отже, для розв'язання системи можна використати спецiальнi методи, характернi для такого типу матриць. У одношаровiй структурi умови неперервностi випадають, i залишаються лише умови конвекцiйного теплообмiну з довкiллям на верхнiй та нижнiй гранях та умови випромiнювання.

$$\begin{pmatrix} \lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)} & -\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -e^{-\gamma_{kl}^{(1)} h_1} & e^{\gamma_{kl}^{(1)} h_1} & \frac{\lambda^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)}}{\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)}} & -\frac{\lambda^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)}}{\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ e^{-\gamma_{kl}^{(1)} h_1} & e^{\gamma_{kl}^{(1)} h_1} & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -e^{-\gamma_{kl}^{(N-1)} h_{N-1}} & e^{\gamma_{kl}^{(N-1)} h_{N-1}} & \frac{\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)}}{\lambda^{(N-1)} \gamma_{kl}^{(N-1)}} & -\frac{\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)}}{\lambda^{(N-1)} \gamma_{kl}^{(N-1)}} \\ 0 & \dots & 0 & e^{-\gamma_{kl}^{(N-1)} h_{N-1}} & e^{\gamma_{kl}^{(N-1)} h_{N-1}} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)}) e^{-\gamma_{kl}^{(N)} h_N} & (\lambda^{(N)} \gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)}) e^{\gamma_{kl}^{(N)} h_N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_{kl} + \lambda^{(1)} R_{kl}'^{(1)}(0) - \alpha^{(1)} R_{kl}^{(1)}(0) - Z_{kl}(0)^4 \epsilon_{kl} \\ \frac{\lambda^{(2)} R_{kl}'^{(2)}(0)}{\lambda^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)}} - \frac{R_{kl}'^{(1)}(h_1)}{\gamma_{kl}^{(1)}} \\ R_{kl}^{(2)}(0) - R_{kl}^{(1)}(h_1) \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{(N)} R_{kl}'^{(N)}(0)}{\lambda^{(N-1)} \gamma_{kl}^{(N-1)}} - \frac{R_{kl}'^{(N-1)}(h_{N-1})}{\gamma_{kl}^{(N-1)}} \\ R_{kl}^{(N)}(0) - R_{kl}^{(N-1)}(h_N) \\ -\lambda^{(N)} R_{kl}'^{(N)}(h_N) - \alpha^{(N)} R_{kl}^{(N)}(h_N) - Z_{kl}(H_N)^4 \epsilon_{kl} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Знаходження часткових розв'язків. Для пошуку часткового розв'язку R можна використовувати відомі методи степеневих поліномів, але за рахунок великої кількості часових шарів їх потрібно апроксимувати поліномами іншого типу. Це спричиняє певну похибку, яка особливо відчутна при роботі джерел тепла в імпульсному режимі та при перехідних процесах. Тому використовуємо підхід із зміною часового кроку. Нехай маємо неоднорідну зміну часу, тобто крок по часу між шарами не є сталий. Тоді апроксимація похідної по часу буде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=t_{i+1}} = \xi \frac{T_{i+1} - T_i}{\tau_i} + (1 - \xi) \frac{T_i - T_{i-1}}{\tau_0}$$

Якщо крок по часу $\tau_i = k \cdot \tau_0 = k \cdot \tau$, матимемо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=t_{i+1}} = \frac{\xi}{k} \frac{T_{i+1} - T_i}{\tau} + (1 - \xi) \frac{T_i - T_{i-1}}{\tau}. \text{ Підставляємо в}$$

Рівняння

$$\frac{a\xi}{k} \frac{T_{i+1}}{\tau} - a \left[(1 - \xi) \frac{T_{i-1}}{\tau} + \left(\xi \left(1 + \frac{1}{k} \right) - 1 \right) \frac{T_i}{\tau} \right] = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

аналогічно до формул (11)-(14) отримуємо

$$Z'' - \left[\left(\frac{k\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{l_y} \right)^2 + \frac{a\xi}{k\tau} \right] Z = \varphi_{i+1}(z) \quad (\text{індекси } k, l -$$

опущені), де $\varphi_{i+1}(z) = \frac{a}{\tau} \left[(\xi - 1)Z_{i-1} + \left(1 - \xi \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) Z_i \right]$.

Оскільки кроки по часу від шару до шару різні, то відповідно, одержане рівняння набуває вигляду $Z'' - \beta_2^2 Z = A^* e^{\beta_1 z} + B^* e^{-\beta_1 z}$, а відповідно загальний розв'язок рівняння $Z = A e^{\beta_2 z} + B e^{-\beta_2 z} + C e^{\beta_1 z} + D e^{-\beta_1 z}$, де A, B - належать до загального розв'язку, а C, D - частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} Z^* &= C e^{\beta_1 z} + D e^{-\beta_1 z} \Rightarrow Z^{*''} - \beta_2^2 Z^* = \\ &= \beta_1^2 (C e^{\beta_1 z} + D e^{-\beta_1 z}) - \beta_2^2 (C e^{\beta_1 z} + D e^{-\beta_1 z}) = \\ &= (A^* e^{\beta_1 z} + B^* e^{-\beta_1 z}) \end{aligned}$$

$$\text{Отже: } C = \frac{A^*}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \quad D = \frac{B^*}{\beta_1^2 - \beta_2^2}, \text{ де}$$

$$\beta_i^2 = \left(\frac{k\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{l_y} \right)^2 + \frac{a}{\tau} \quad \beta_2^2 = \left(\frac{k\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{l_y} \right)^2 + \frac{a}{k\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1^2 - \beta_2^2 = \frac{a}{\tau} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \Rightarrow C = \frac{k}{k-1} \frac{\tau}{a} A^*, D = \frac{k}{k-1} \frac{\tau}{a} B^*. \quad (25)$$

З виразу (25) можна зробити висновок, що C і D не залежать від кроку по часу, оскільки $A^* = \frac{q}{\tau} \vartheta$, де ϑ - величина співвимірна з відповідними коефіцієнтами функцій Z_i, Z_{i-1} і, отже, $C = \frac{k}{k-1} \vartheta$. Як видно з формул, значення коефіцієнтів не залежить від $\frac{a}{\tau}$. Застосування цього підходу дає ряд переваг: 1) зникають похибки апроксимації полінома тригонометричними поліномами або числового інтегрування; 2) при $k \rightarrow 1$ (не враховуючи $\frac{k}{k-1} \rightarrow \infty$), відхилення є малими.

Слід зауважити, що цей розв'язок теж має свої недоліки. Під час розрахунку наступного шару постійно зростає кількість доданків з різними експонентами. Щоб цього уникнути, потрібно постійно апроксимувати доданки із новими експонентами. Доцільніше робити цю апроксимацію не поточною, а інтегрально за умови:

$$\chi(C, D) \equiv \int_0^{H_z} (A e^{\beta_1 z} + B e^{-\beta_1 z} - P e^{\beta_2 z} - Q e^{-\beta_2 z})^2 dz \rightarrow \min.$$

Умова виконується, якщо $\frac{\partial \chi}{\partial C} = \frac{\partial \chi}{\partial D} = 0$. Тобто:

$$\begin{aligned} \chi(C, D) &= K + \int_0^{H_z} (P^2 e^{2\beta_2 z} + Q^2 e^{-2\beta_2 z} + 2PQ - AP e^{(\beta_1 + \beta_2)z} - \\ &\quad - 2BP e^{(\beta_2 - \beta_1)z} - AQ e^{(\beta_1 - \beta_2)z} - 2BP e^{-(\beta_2 + \beta_1)z}) dz, \end{aligned}$$

де $K = \int_0^{H_z} (A e^{\beta_1 z} + B e^{-\beta_1 z})^2 dz$ - не залежить від C і D .

Застосувавши вказану умову, отримаємо:

$$\left\{ \begin{aligned} C \frac{e^{2\beta_2 H} - 1}{\beta_2} + D \cdot 2H &= \frac{2A}{\beta_1 + \beta_2} (e^{(\beta_1 + \beta_2)H} - 1) + \\ &\quad + \frac{2B}{\beta_2 - \beta_1} (e^{(\beta_1 - \beta_2)H} - 1) \\ C \cdot 2H - D \frac{e^{-2\beta_2 H} - 1}{\beta_2} &= \frac{2A}{\beta_1 - \beta_2} (e^{(\beta_1 - \beta_2)H} - 1) - \\ &\quad - \frac{2B}{\beta_1 + \beta_2} (e^{-(\beta_1 + \beta_2)H} - 1) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

При використанні цього підходу з'являються похибки, але кількість доданків мала, що спрощує обчислення і робить можливою велику кількість ітерацій.

Відповідно до запропонованої схеми алгоритм роботи такий:

- ініціалізація системи і формування характеристик шарів, топології нагрівних елементів, кроку по часу, довжини та ширини структури, умов теплообміну по осях x, y ;
- послідовний перехід з одного часового шару на інший, який передбачає: перерахунок кроку та компонент, які з ним пов'язані; ітеративне обчислення коефіцієнтів матриці (24); обчислення умов теплообміну з середовищем верхнього та нижнього шарів, випромінювання, та умов поширення теплового потоку між шарами за наявності двох і більше шарів; формування правої частини рівняння (24). Ця операція виконується для всіх функцій Z_{kl} . Ітеративний процес здійснюється доти, доки різниця для коефіцієнтів не буде меншою від наперед заданого значення ϵ ;
- обчислення температури в різних точках структури шляхом виклику функції обчислення.

Висновки

1. Межі застосування описаного методу розрахунку обмежуються часовими значеннями, які поки що визначаються числовим методом і порівнюються з існуючими системами моделювання, такими, як ANSYS,

або ж реальними результатами, тобто умови збіжності не визначені аналітично. Те саме стосується умов та швидкості збіжності ітераційного циклу для визначення впливу випромінювальних компонент.

2. Підтверджено, що при незначній випромінювальній здатності, тобто за наявності лише конвекційного теплообміну похибка розподілу не перевищувала 3% в діапазоні температур (200-300)⁰С. Очікується, що при врахуванні компонент випромінювання похибка становитиме (5-10)% для температур, вищих за 300⁰С .

3. Метод може бути застосований, якщо випромінювальна здатність залежить не тільки від температури, але і від довжини хвилі, що відзначається в реальних процесах теплового випромінювання.

1. Расчет температурных полей твердых тел и систем // Труды ЛИТМО под ред. Г.Н. Дульнева. – Л., 1976.
2. Брамсон М.А. Инфракрасное излучение нагретых тел. – М., 1965.
3. Госсорг Ж. Инфракрасная термография. Основы, техника, применение. – М., 1988.
4. Свет Д.Я. Оптические методы измерения истинных температур. – М., 1982.
5. ДСТУ 3194 – 95. Державна повірочна схема засобів вимірювання температури. Термометри за випромінюванням. – 1996.
6. Гордов А.Н. Основы пирометрии. – М., 1971.
7. Излучательные свойства твердых материалов / Справочник по общей ред. А.Е. Шейдлина, – М., 1974.