

Висновки

На підставі виконаної роботи можна зробити такі висновки:

1. На значення коефіцієнта тертя між зубцями коліс впливають зовнішні динамічні навантаження. Зі збільшенням цих навантажень коефіцієнт тертя збільшується.
2. При збільшенні величини відскоку зубця колеса при ударі збільшується значення коефіцієнта тертя, що підвищує інтенсивність зношування зубців передачі.
3. Зі збільшенням ударного навантаження на зубці коліс збільшується величина відскоку. Наприклад, при збільшенні ударного навантаження у 2,3 рази коефіцієнт тертя збільшується у 1,5 рази.
4. Бажано продовжити роботу в цьому напрямку з метою уточнення отриманих залежностей для визначення коефіцієнта тертя між зубцями коліс передачі від дії динамічних навантажень при перехідних процесах з використанням останніх досягнень в трибології.

1. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М., 1977. – 526 с. 2. Васильева О.Е. Забезпечення міцності та зносостійкості циліндричних зубчастих передач редукторів загального призначення з урахуванням дії зовнішніх динамічних навантажень: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.02.02 / НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2002. – 20 с. 3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М., 1976. – 608 с. 4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М., 1962. – 872 с. 5. Тайц Б.А. Точность и контроль зубчатых колес. – М., 1972. – 368 с.

УДК 621.789.1+272.5

М.Л. Кукляк, Г.В. Гаврилов, В.В. Ступницький, Я.С. Щадило
Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра технології машинобудування

МІЦНІСТЬ СТРИЖНІВ В УМОВАХ КРУЧЕННЯ

© Кукляк М.Л., Гаврилов Г.В., Ступницький В.В., Щадило Я.С., 2003

Для подальшого підвищення міцності та збільшення терміну служби торсійних валів крім комплексного зміцнення, вдаються до застосування так званих «природно завитих» валів.

Розрахунки тримкої здатності таких конструктивних елементів вимагають інформації про жорсткість і напруження, які виникають у них під час роботи. Показано, що міцність суттєво залежить від нахилу ребер, чи взагалі волокон, закручених некруглих профілів, від геометричної форми поперечного перерізу стрижня.

For the further increase of bearing{*carrying*} ability and the increases of service life torsion of shaft, except for complex hardening, are done{*made*} attempts of application, so-called «naturally twirled» (open-ended structure) shaft, which under the form remind spiral drills.

The accounts of bearing{*carrying*} ability of such constructive elements require {*demand*} the information on rigidity and pressure{*voltage*}, which arise in them in an operating time. Is shown, that durability essentially depend on an inclination of edges, or in general of fibres twirled not round structures, from the geometrical form of cross section of a core.

Загальна характеристика проблеми. Надійність роботи машин і устаткування залежить від низки факторів, які можна умовно поділити на суб'єктивні та об'єктивні. Суб'єктивні фактори залежать від індивідуальних особливостей виконавця-конструктора,

виробника, експлуатаційника. Об'єктивні фактори визначаються експлуатаційним терміном і випадковим впливом довкілля.

До числа суттєвих суб'єктивних факторів відносять вибір конструктивного вирішення під час проектування машин і комплектувальних виробів, добір матеріалів деталей, визначення раціональних робочих режимів, організації технологічного обслуговування та ремонту машин. Об'єктивні фактори – різні кліматичні, непрямі, біологічні, механічні тощо впливи. За ознаками виникнення фактори можна розділити на конструктивні, технологічні і експлуатаційні. Конструктивні фактори зв'язані з розробленням і проектуванням машин і елементів.

Технологічні фактори визначаються процесом виготовлення виробів. Експлуатаційні фактори впливають на надійність машин під час їх роботи. За характером впливу на надійність машин фактори можуть понижувати або підвищувати рівень надійності.

Розрахунковий рівень фізико-механічних параметрів, зокрема границі пропорційності, величини податливості, надійності, які закладено в машину на стадії її проектування, повинні бути забезпеченими під час виготовлення деталей і елементів, складання і регулювання машин. Трапляються випадки, коли технологічний процес виготовлення виробів не забезпечує заданих рівнів цих та інших параметрів. У такому разі вдаються до конструктивних вирішень.

Зниження рівня надійності машин на стадії проектування може бути наслідком таких причин:

- деталі виготовлені з матеріалів, що мають дефекти, або із матеріалів, що не забезпечують задану міцність;
- прийнятий технологічний процес виготовлення деталей і їх поверхневого оброблювання не може забезпечити заданий рівень експлуатаційних властивостей;
- в технологічному процесі виготовлення деталей допущені порушення внаслідок поганої організації виробництва;
- напружений стан деталі, що проявляється під час експлуатації, не адекватний силовим полям, які супроводжували процес пластичного гарячого чи холодного деформування під час виготовлення заготовки (кування, штампування, прокатування, екструзія, кручення тощо)

Деталі, які працюють в умовах кручення, трапляються часто; серед них вали редукторів, осі рухомого залізничного складу, трансмісійні вали, елементи просторових конструкцій, різальні інструменти, елементи пружних підвісок технологічного устаткування та транспортних машин тощо.

Вали переважно проектують круглого перерізу, проте нерідко можна спостерігати відхилення від цього правила (трефи валків вальцювальних станів, стрижні інженерних споруд (як мости, вежі тощо). Зрозуміло, що доцільним є розгляд тих форм поперечного перерізу, які знаходять найбільше зацікавлення в техніці. Вали коробок швидкостей, транспортних засобів, трансмісійних передач нерідко виконують з мінливим перерізом.

Порівняно рідше доводиться виконувати розрахунки на кручення криволінійних стрижнів, до яких належать звичайні гвинтові пружини. Відомо, що стрижень, з якого виготовлена гвинтова пружина й працює в умовах її розтягу чи стиску поздовжніми силами, сприймає переважно навантаження крученням. Тут напруження від зсуву і згину відіграють другорядне значення. Це стосується як статичного, так і динамічного навантаження. Останні з них здебільшого протікають із різкою зміною навантаження, що межує з ударами, коливаннями та появою резонансу.

Питанням міцності та жорсткості осевих різальних інструментів, міцності й податливості елементів підвісок вібраційних і транспортних машин належить особливе місце під час проектування й пошуку їх оптимальних параметрів. Суттєві труднощі, що виникають при цьому, стосуються визначення міцності та жорсткості, поперечного перерізу осевих різальних інструментів, пружних елементів незамкнутого профілю тощо.

Аналіз проблеми міцності в умовах кручення. Під дією зовнішніх навантажень у кожній точці тіла виникає різна за величиною інтенсивність внутрішніх сил, тобто різний напружений стан, який характеризується сукупністю всіх векторів напружень, що діють на площинках разом з розглядуваною точкою.

Для оцінки напруженого стану в будь-якій точці тіла, а, отже, напружений стан всього тіла, достатньо знати деяку сукупність напружень, що діють на певних площинках. На гранях виділеного з тіла безмежно малого елемента у формі паралелепіпеда з ребрами dx , dy , dz і гранями, паралельними осям x , y , z ортогональної системи, побудовано по три складових напружень (рис. 1).

Оскільки елементарний об'єм знаходиться в рівновазі, то сума проекцій сил на осі x , y і z та сума їх моментів навколо цих осей дорівнює нулю. Внаслідок перетворень отримуємо три диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

де σ і τ – нормальні і дотичні напруження являються неперервними функціями координат x , y , z , які діють на відповідних гранях елементарного прямокутного паралелепіпеда; X , Y , Z – об'ємні сили, які можуть діяти на паралелепіпед.

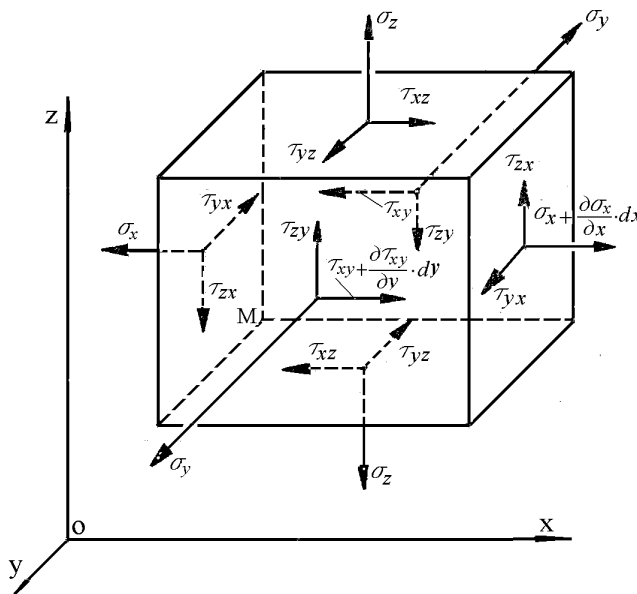


Рис. 1. Нормальні та дотичні напруження на елементарному паралелепіпеді

Під дією зовнішніх навантажень у кожній точці тіла виникає різна за величиною інтенсивність внутрішніх сил, тобто різний напружений стан, який характеризується сукупністю всіх векторів напружень, що діють на площинках разом з розглядуваною точкою.

Якщо компонент нормального напруження $\sigma_z = 0$, то дотичних напружень з індексом z немає, тобто

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Розглянемо кручення стрижня довільного поперечного перерізу. Приймаємо, що матеріал тіла ізотропний. Нехай один кінець стрижня закріплений, а вісь z паралельна до осі стрижня. Стрижень скручується моментом M . Прийmemo також до уваги допущення Сен-Венана в теорії пружного кручення, що поперечні перерізи зазнають жорсткого повороту в своїй площині, але деплануються в напрямку осі z за такими переміщеннями (рис. 2):

$$u = -\Theta yz, \quad \vartheta = \Theta z, \quad w = \theta \varphi(x, y), \quad (3)$$

де Θ – відносний кут закручування (на одиницю довжини стрижня), а $\theta \cdot \varphi(x, y)$, – невідома функція кручення [2].

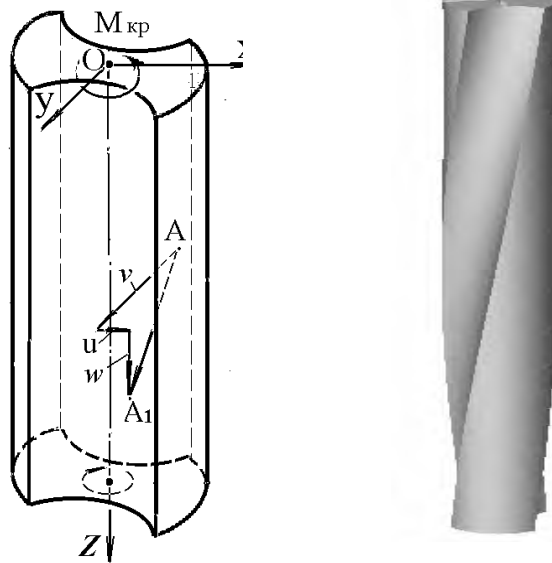


Рис. 2. Кручення стрижня незамкнутого профілю

За такого вибору переміщень об'ємне розширення

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

тобто об'єм стрижня під час кручення не змінюється.

Із трьох основних рівнянь (2) теорії пружності і за умови відсутності об'ємних сил, а в задачах на кручення існують лише такі випадки [2, 5],

$$\Delta^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0;$$

$$\vartheta$$

$$\Delta^2 \vartheta + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0; \quad (5)$$

$$\Delta^2 \omega + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0;$$

два перших задовольняються тотожно, а останнє дає

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Цей вираз означає, що функція кручення $\varphi(x, y)$ повинна задовольняти рівняння Лапласа і граничні умови на контурі.

Беручи до уваги співвідношення (3) та перейшовши від переміщень до напружень, легко переконатись, що всі нормальні напруження перетворюються в нуль, тобто

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0;$$

а дотичні будуть

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Умови рівноваги на поверхні відповідно до [1, 2, 5] можна записати як

$$\begin{aligned} \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= X; \\ \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= Y; \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n &= Z, \end{aligned} \quad (8)$$

де X, Y, Z – зовнішні сили (чи моменти), прикладені до поверхні тіла і зараховані до одиничної площі; l, m, n – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла в розглядуваній точці.

Із системи (8) два перші рівняння на боковій поверхні паралелепіпеда задовольняються тотожно, а останнє після перетворень дає

$$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}. \quad (9)$$

Беручи до уваги рівність (9) і підставивши значення дотичних напружень із (7), отримуємо граничні умови для функції кручення $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = y dy + x dx \quad (10)$$

або

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, n) = y \cos(x, n) + x \cos(y, n). \quad (11)$$

Система рівнянь (7) позбавлена координати z і задача кручення некруглого стрижня перетворилась із просторової у плоску [3].

Напруження в будь-якому поперечному перерізі стрижня статично еквівалентні парі сил, момент якої можна знайти з виразу, за умови, що визначено функцію кручення.

Якщо функція кручення $\varphi(x, y)$ знайдена, то крутний момент записується як

$$M = \iint (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx \cdot dy = G\theta \iint \left[\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x^2 \right) - \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y^2 \right) \right] dx dy = G\theta I_k, \quad (12)$$

де

$$I_k = \iint \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dx dy - \quad (13)$$

являє собою геометричну жорсткість в умовах кручення.

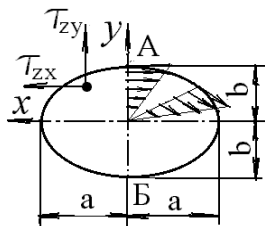
Крутильну жорсткість можна подати як $C = GI_k$.

Крутний момент M переважно задають, тому відносний кут закручування

$$\theta = \frac{M}{GI_k},$$

Знаючи θ , можна визначити напруження τ_{xz} і τ_{zy} , скориставшись співвідношеннями (7) [2].

Кручення стрижня еліптичного перерізу. Нехай поперечний переріз стрижня буде еліпс (рис. 3), півосі якого a і b .



Його рівняння описується відомою залежністю

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рис. 3. Кручення стрижня еліптичного перерізу

Як частковий розв'язок рівняння (6) для функції φ еліптичного стрижня відповідно до [2] приймемо такий вираз

$$\varphi = Axу, \quad (14)$$

де A – деяка постійна величина.

Тоді напруження за формулою (7) будуть такими:

$$\tau_{xz} = G\theta(A-1)y, \quad \tau_{zy} = G\theta(A+1)x.$$

Підставивши значення цих напружень у граничні умови за (9), можна визначити постійну величину A .

$$A = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Значення постійної A , підставлене у вираз (14), надає функції кручення φ такого вигляду:

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot xy. \quad (15)$$

Неважко переконатись, що функція (15) задовольняє умови (10), а складові дотичного напруження τ_{xz} і τ_{zy} набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) = G\theta \left[\left(-\frac{a^2 xy - b^2 xy}{a^2 + b^2} \right) \partial x - y \right] = \\ &= G\theta \left[-\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right] \cdot y = -\frac{2G\theta a^2}{a^2 + b^2} \cdot y;\end{aligned}\quad (16, a)$$

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \right) = G\theta \left[\left(-\frac{a^2 xy - b^2 xy}{a^2 + b^2} \right) \partial y + x \right] = \\ &= G\theta \left[\frac{-1}{a^2 + b^2} (a^2 - b^2) + 1 \right] x = \frac{2G\theta b^2}{a^2 + b^2} \cdot x;\end{aligned}\quad (16, b)$$

Дотичне напруження

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2G\theta}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}.\quad (17)$$

Складові дотичного напруження [5] можна подати через крутний момент як

$$\tau_{zx} = -\frac{2M_k}{\pi a b^3} \cdot y; \quad \tau_{zy} = +\frac{2M_k}{\pi b a^3} \cdot x.$$

Відповідно до (17) найбільші напруження будуть на контурі в кінці малої півосі еліпса, тобто за умови, коли $x = 0$ і $y = b$, і опишуться залежністю

$$\tau_{\max} = \frac{2G\theta a^2 b}{a^2 + b^2}.\quad (17, a)$$

Під час кручення стрижня некруглого перерізу його точки внаслідок деформування не лежать в одній площині. Вони набувають не тільки поворотних зміщень, але й зміщень вздовж осі z , що узгоджується з гіпотезою Сен-Венана, і адекватно відображає процес моделювання за допомогою методу скінченних елементів та віртуального твердотілого моделювання (рис. 4). Відправні параметри для моделювання: матеріал стрижня – 45ХНМФА з механічними характеристиками $\sigma_b = 2230$ МПа, $\sigma_{\text{плі}} = 1980$ МПа, еліпс з осями $2a = 16$ мм, $2b = 9$ мм; модуль пружності $E = 2,040 \times 10^5$ МПа, модуль пружності другого роду $G = 0,815 \times 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$.

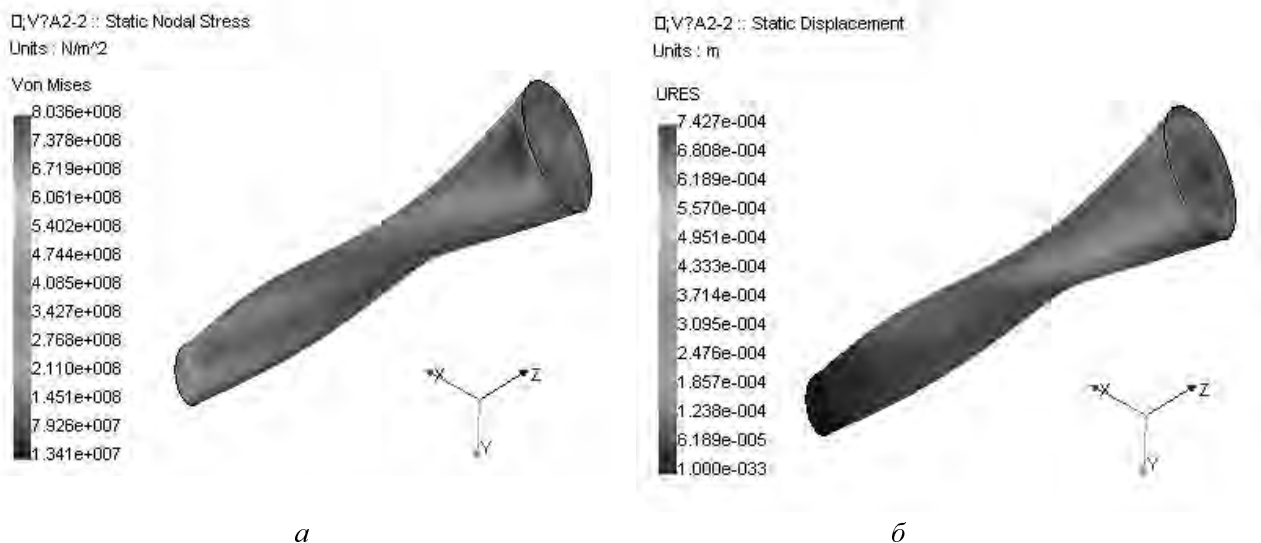


Рис. 4. Розподіл напружень (а) та деплацації (б) в стрижні еліптичного перерізу

Переміщення точок у напрямку осі z (депलाція перерізу) можна визначити за формулами (3) і (15)

$$w = -\theta \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot xy,$$

або за рівністю [5] через крутний момент

$$w = \frac{M_k}{G \pi a^3 b^3} xy.$$

Кут закручування на одиницю довжини моментом M_k можна оцінити як:

$$\theta_M^k = \frac{M}{GI_p}; \quad (\text{для круглого вала } I_p = \frac{\pi d^4}{32});$$

для попередньо закрученого вала незамкнутого профілю

$$\theta_M = \frac{M}{GI_k} = \frac{M}{GI_p} \cdot \frac{I_p}{I_k} = \theta_M^k \cdot \frac{I_p}{I_k}. \quad (\text{для еліптичного вала } I_k = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}).$$

Відповідно до залежностей (13) і (15) жорсткість еліптичного стрижня в умовах кручення можна представити в такому вигляді:

$$I_k = \frac{2G}{a^2 + b^2} \iint (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy = \frac{2G}{a^2 + b^2} [a^2 I_x + b^2 I_y],$$

де I_x і I_y – моменти інерції еліпса відносно його осей.

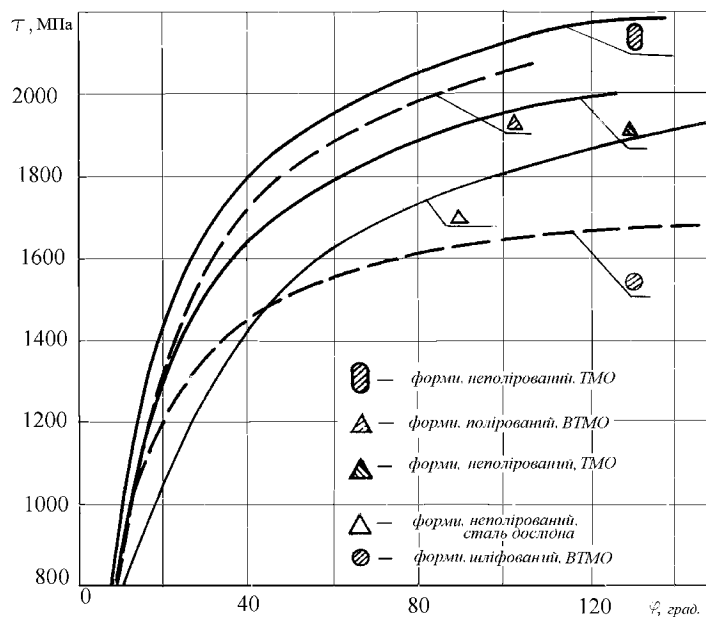


Рис. 5. Вплив форми поперечного перерізу та технологічного процесу на статичну міцність стрижнів

На рис. 5 показано результати статичних випробувань крученням стрижнів різного профілю в поперечному перерізі [7]. Досліди показали, що найвищу міцність мають вали еліптичного профілю за умови еквівалентних площ поперечного перерізу і однакового попереднього кута закручування. Оптимальний кут нахилу гвинтоподібного стрижня відповідає 45° .

Траєкторії напружень в контурі еліпса можна визначити, користуючись рівнянням (9), звідки знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{xz}} = \frac{2G\theta b^2 x}{a^2 + b^2} : \left(-\frac{2G\theta a^2}{a^2 + b^2} \cdot y \right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \quad (16)$$

Із співвідношення (16) можна записати, що

$$a^2 y dy = -b^2 x dx.$$

Інтегруючи останній вираз, отримаємо рівняння траєкторії, яка є еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k.$$

Ці траєкторії подібні до граничних еліпсів і розташовуються з ними симетрично.

Граничні умови (10) можна суттєво спростити, якщо функцію ϕ розглядати як дійсну частину деякої аналітичної функції Φ комплексної змінної $x + iy$, тобто

$$\Phi = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Функцію Φ називають потенціалом кручення. Внаслідок відомих співвідношень Коші–Рімана, які подаються у такому вигляді

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

гранична умова (10) набуде вигляду

$$\partial \psi = y dy + x dx.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, отримуємо вираз

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$$

або

$$\psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C.$$

де $C = C_1 + C_2$ – сумарна постійна інтегрування по x і по y .

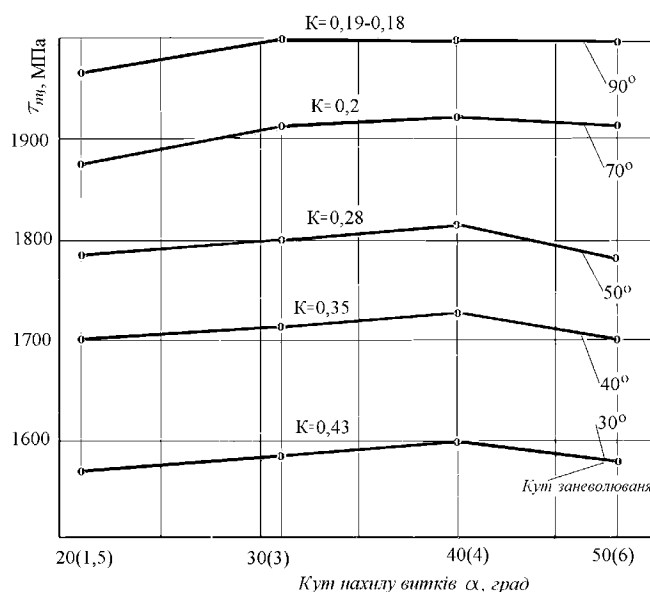


Рис. 6. Зміна пружних властивостей стрижня залежно від вихідного кута закручування та кута заневолювання

На рис. 6 зображені результати статичних випробувань попередньо закручених еліптичних стрижнів після комплексного зміцнення із застосуванням термомеханічного зміцнення та об'ємного нагартування в широкому діапазоні кутів та коефіцієнтів заневолювання.

Висновки

1. Для оцінки дотичних напружень від крутного моменту природно закрученого стрижня необхідно знати функцію кручення $\varphi(x, y, z)$ і його геометричну жорсткість. Порівнюючи кут закручування на одиницю довжини стрижня, можемо оцінити амортизаційні характеристики природно завитого стрижня.

2. Доцільно дослідити залежність $\beta = \frac{I_p}{I_k}$ від відправного кута ω закрученого вала і співвідношення між осями a і b еліпса. Якщо виявиться, що $\beta > 1$, то жорсткішими будуть вали за менших значень ω , тобто торсіон буде краще амортизувати, працюючи як гвинтова пружина в умовах закручування.

3. Експериментально встановлено, що найкращі властивості з огляду статичних випробувань в умовах кручення показали попередньо закручені вали (рис. 4).

4. Шляхом порівнянням кута закручування на одиниці довжини стрижня можна оцінити амортизаційні характеристики природно завитого стрижня.

Міцність, крутильна жорсткість суттєво залежать від нахилу рівців чи ребер, а загалом волокон, закручених некруглих профілів, від геометричної форми поперечного перерізу стрижня за умови еквівалентних площ.

5. Застосування наступних операцій об'ємного холодного нагартування (заневолювання) сприяє подальшому підвищенню границі пружності ($\tau_{пл}$) в широкому діапазоні коефіцієнтів заневолювання ($k=0,43 - 0,18$, рис. 5) із збереженням достатнього резерву пластичності.

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с. 2. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – М.: Из-во Академии наук СССР, 1955. – 392 с. 3. Алексеев И.В. Расчет на прочность и жесткость при кручении осевого режущего инструмента методами математического моделирования. Учеб. пособие/ – Уфа: Уфимск. авиац. ин-т, 1990. – 91 с. 4. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1971. – 424 с. 5. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – С. 608. 6. Мастеров В.А., Берковский В.С. Теория пластической деформации и обработка металлов давлением. – М.: Металлургия, 1971. – 295 с. 7. Кукляк М.Л. Методи підвищення довговічності пружних елементів машин. – Львів: Світ, 1997. – 206 с. 8. Унсов Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теория пластических деформаций металлов. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.