

Зауважимо, що визначені таким чином двобічні оцінки першої частоти  $\gamma_{1n}^2$  для  $n = 1, 4$  практично збігаються з наведеними вище в табл. 1.

### Висновки

На прикладі задачі про вільні коливання жорстко закріпленої круглої пластини встановлено:

1. Маючи три перші коефіцієнти відповідного частотного рівняння у вигляді характеристичного ряду, можна застосувати двобічні оцінки і таблиці Бернштейна-Керопяна.

2. Доцільність запропонованого способу підтверджена високою точністю його застосування до даної задачі.

1. Василенко Н.В. *Теория колебаний*. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с. 2. Бернштейн С.А., Керопян К.К. *Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции*. – М.: Госстройиздат, 1960. – 281 с. 3. Гащук П., Зорій Л.М. *Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем*. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 4. Гонткевич В.С. *Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник*. – К.: Наукова думка, 1964. – 288 с.

УДК 621.302

І.А. Вікович

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра нарисної геометрії і графіки

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ФЕРМОВО-РЕШІТЧАСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ НАЧІПНОЇ ШТАНГИ ОБПРИСКУВАЧА З ПІД'ЄДНАНИМ ТУПИКОВИМ ДІРЧАСТИМ ТРУБОПРОВОДОМ

© Вікович І.А., 2003

**Розроблена математична модель згинних коливань, консольно закріпленої, кінематично збуреної, фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача з під'єднаним тупиковим дірчастим трубопроводом.**

**The mathematical model of banding oscillations of consoley closed up, cinematically-exited, ферменно-trellised design of a sprayer hanging bar with connected holey deadlock by the pipeline is developed.**

### Вступ

У машинах для хімічного захисту рослин, зокрема у штангових обприскувачах, робочим елементом є подовгаста фермово-решітчаста конструкція начіпної штанги, до якої під'єднаний дірчастий тупиковий трубопровід з рухомою рідиною.

На дірчастому трубопроводі з відповідним кроком, на місцях розміщення отворів, встановлені розпилювачі для утворення факелу розпилення і рівномірного обприскування рослин. Рідина з ємності обприскувача подається насосом у трубопровід начіпної штанги у декілька атмосфер і при витіканні її через отвори або розпилювачі утворює реактивні пульсуючі сили, які впливають на динамічні характеристики начіпної штанги. Сама начіпна штанга обприскувача під час виконання технологічного процесу обприскування, внаслідок кінематичного збурення з боку рельєфу ґрунту, здійснює вертикальні та кутові рухи.

Найбільшою проблемою при проектуванні штангових обприскувачів є зменшення інтенсивності коливань начіпної штанги під час виконання технологічного процесу обприскування.

Тому розроблення математичних моделей і методів теоретичного дослідження коливань начіпної штанги, фермово-решітчастої конструкції, з під'єднаним дірчастим тупиковим трубопроводом є актуальною і разом з тим дуже складною проблемою. Необхідно відзначити, що такого типу математичні моделі в літературних джерелах не зустрічались.

### Постановка задачі

Для вирішення цієї проблеми вперше розроблена розрахункова схема (рис. 1) і математична модель згинних коливань фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача з пружно під'єднаним тупиковим дірчастим трубопроводом з їх кінематичним збуренням, зумовленим рельєфом поля, під час руху обприскувача при виконанні технологічного процесу обприскування.

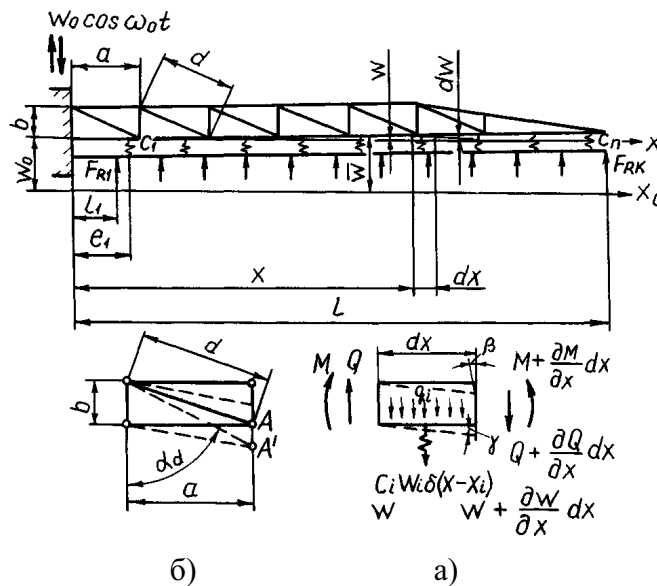


Рис. 1. Розрахункова схема згинних коливань, консольно закріпленої, кінематично збуреної, фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги з під'єднаним дірчастим тупиковим трубопроводом

Для виведення диференціальних рівнянь згинних коливань консольно закріпленої фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача, головні осі інерції довільного перерізу решітчастої конструкції якої лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах, скористаємось варіаційним принципом Остроградського-Гамільтона

$$\delta H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0, \quad (1)$$

де  $T$  і  $\Pi$  – кінетична і потенціальна енергія системи.

Диференціальні рівняння вимушених згинних коливань, консольно закріпленої, кінематично збуреної фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача одержимо на основі уточненої теорії Тимошенка, в якій врахуємо поперечні зсуви і інерції поворотів перерізів, вважаючи, що матеріал металоконструкції підпорядковується лінійному закону пружності.

Тоді потенціальну і кінетичну енергію системи можна записати у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l EJ_y(x) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l K'GF(x)\beta^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i [w(x,t) - w_i(x,t)]^2 \delta(x - x_i), \end{aligned} \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F(x) \left[ \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho J_y(x) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (3)$$

де  $\beta$  – середній кут зсуву,  $K'$  – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілення зсуву по перерізу, тобто від форми поперечного перерізу,  $G$  – модуль зсуву,  $F(x)$  – площа поперечного перерізу,  $\rho$  – густина матеріалу металокопункції,  $EJ_y(x)$  – жорсткість фермово-решітчастої копункції націпної штанги обприскувача при згині,  $w(x,t)$  і  $w_i(x,t)$  прогини поперечних перерізів фермово-решітчастої копункції і трубопроводу націпної штанги обприскувача на відстані  $x$  від консольного закріплення в довільний момент часу  $t$ ,  $\delta$  – символ дельта-функції Дірака.

У рівнянні (2) третій член враховує через пружні зв'язки  $c_i$ , взаємовплив коливань трубопроводу і фермово-решітчастої копункції націпної штанги (рис. 1).

Середньоквадратичне значення  $\beta$  згідно з [1]

$$\beta^2 = \frac{1}{F} \int (2\varepsilon_{13})^2 dF,$$

де  $\varepsilon_{13}$  – головні деформації (поздовжні відносні деформації в напрямі діагоналей квадратів, що лежать в площині зсуву) дорівнюють [13]

$$\varepsilon_{13} = \pm \frac{\tau}{2G},$$

$\tau$  – дотичні напруження.

Дотичні напруження визначаються за формулою Журавського [10]

$$\tau = \frac{QS}{J_y b},$$

де  $Q$  – поперечна сила,  $S$  – статичний момент інерції поперечного перерізу,  $b$  – ширина поперечного перерізу.

Отже, обернене значення коефіцієнта  $k'$  матиме вигляд [1]  $\frac{1}{k'} = \frac{F}{j_y^2} \int \frac{S^2 dF}{b^2}$ .

Підставляючи (2) і (3) в (1), варіюючи при цьому одержані вирази і виключаючи похідні, інтегруванням по частинах з урахуванням нижченаведених граничних умов та після диференціювання по  $x$  і  $t$  й скорочення на  $\delta w(x, t)$  одержимо диференціальні рівняння згинних коливань консольно закріпленої, кінематично збуреної, фермово-решітчастої копункції націпної штанги обприскувача

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ_y(x) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] \right] - \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \rho J_y(x) \left[ \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \beta \right] \right] + \\ & + \rho F(x) \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n c_i [w(x,t) - w_i(x,t)] \delta(x - x_i) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EJ_y(x) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right] - \rho J_y(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \beta \right) + k'GF(x)\beta = 0,$$

де  $\bar{w}(x,t) = w_0 + w(x,t)$  – сумарне переміщення перерізу фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача відносно початкового положення,  $w_0$  – переміщення консольно закріпленого кінця конструкції внаслідок кінематичного збурення обприскувача, зумовленого рельєфом ґрунту

$$\bar{w}(x,t) = w_0 + w(x,t) \quad (5)$$

$$w_0 = W_0 \cos \omega_0 t. \quad (6)$$

Альтернативні крайові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{w}(x,t)|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \beta = 0; \\ EJ_y(x) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] \Big|_{x=l} = 0; \quad k'GF(x)\beta = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причому між функціями  $\bar{w}(x,t)$  і  $\beta$  існує зв'язок

$$\frac{\partial}{\partial x} (k'GF(x)\beta) = \rho F(x) \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Згідно з розрахунковою схемою, наведеною на рис. 1, рівняння (4) необхідно розглядати сумісно з диференціальним рівнянням, що описує коливальний процес під'єданого дірчастого тупикового трубопроводу.

Спираючись на роботи [4 – 7] й [11] і враховуючи зв'язки елементів кріплення трубопроводу до фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача та фактор дії зосереджених реактивних пульсуючих сил, зумовлених витіканням рідини із дірчастого тупикового трубопроводу, можна безпосередньо записати нелінійне диференціальне рівняння згинних коливань консольно закріпленого, кінематично збуреного дірчастого трубопроводу, з урахуванням нелінійного закону пружності, у вигляді

$$\begin{aligned} E_t J_{yt} \frac{\partial^4 w_t}{\partial x^4} + \rho_p F_p \left\{ v^2(x,t) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + 2v(x,t) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x \partial t} + \left[ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v^2(x,t)) \right] \frac{\partial w_t}{\partial x} \right\} + \\ + (\rho_t F_t + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} + \pi R^2 p(x,t) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + k_T \frac{\partial w_t}{\partial t} + \\ + E_t J_{yt} \lambda_t \left[ \frac{\partial^4 w_t}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial^3 w_t}{\partial x^3} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \varepsilon c_i (w - w_i) \delta(x - x_i) = \\ = \sum_{j=1}^k \varepsilon F_{RK} \cos \omega t \cdot \delta(x - x_j) + \varepsilon W_0 (\rho_t F_t + \rho_p F_p) \omega_0^2 \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $E_t J_t$  – жорсткість трубної оболонки трубопроводу при згині,  $\rho_p$ ,  $\rho_t$  і  $F_p$ ,  $F_t$  – густини і площі поперечних перерізів просвіту труби та самої трубної оболонки відповідно,  $v(x,t)$  і  $p(x,t)$  – змінна швидкість руху рідини і змінний тиск в трубопроводі,  $R$  – внутрішній радіус труби,  $k_T$  – коефіцієнт, що враховує втрати,  $\omega$  – частота пульсуючих реактивних сил.

Параметр  $\lambda_t$  враховує відхилення нелінійного закону пружності матеріалу трубопроводу від закону Гука [2], а малий параметр  $\varepsilon$  свідчить про незначне відхилення від

лінійного закону,  $\lambda_t = 3a \cdot E_t \frac{J_{yt0}}{J_{yt}}$ ,  $a_0 = -\frac{2}{9} \cdot \frac{3k_t}{3k_t + G_t}$ ;  $G_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu E_t}{1 + \mu}$ ;  $k = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu E_t}{\mu - 2}$ ;

$J_{yt0} = \iint_{F_t} y^4 dt dz$ ,  $k_t$  – модуль стиску,  $G_t$  – модуль зсуву матеріалу трубопроводу,  $\mu$  – число

Пуассона,  $J_{t0}$  – осьовий момент інерції площі поперечного перерізу трубної оболонки.

Величини реактивних сил  $F_r$ , що виникають при витіканні струменя із отворів чи розпилювачів, розміщених на трубопроводі, можна визначити із рівнянь руху змінної маси Мещерського або із закону збереження кількості руху.

Використовуючи теорему про зміну кількості руху й рівняння Бернуллі та відповідні формули гідравліки [15], можемо знайти величину реактивної сили одного струменя у вигляді

$$F_R = 2S_0 p(x, t), \quad (10)$$

де  $S_0$  – площа поперечного перерізу отвору для струменя.

Зазначимо, що швидкість руху рідини у дірчастому тупиковому трубопроводі визначається залежністю

$$v(x, t) = \frac{Q_p}{F_p} \left( \frac{x_j}{l} \right)^{n_j} + \frac{Q_{p0}}{F_p}, \quad (j = 1, 2, 3 \dots k), \quad (11)$$

де  $Q_p$  і  $Q_{p0}$  – витрата рідини по всій довжині трубопроводу і на його початку,  $n_j$  – показник степеня, який характеризує витрати при витіканні рідини (визначається експериментально).

Зазначимо також, що у рівняннях (4) необхідно врахувати затухання, наприклад вважати конструкцію пружно-в'язким тілом Кельвіна-Фойхта, реологічне рівняння якого має вигляд  $\sigma = E\varepsilon + k\dot{\varepsilon}$  і тоді рівняння (4) будуть доповнені членом  $kJ_y(x) \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t}$ , або враховувати внутрішнє розсіювання в матеріалі, що виражається нелінійною залежністю [8, 9]

$$\bar{\sigma}(\varepsilon) = E \left[ \xi \pm \frac{3}{8} \delta(\xi_2) \left( \xi_2 \mp \xi - \frac{\xi^2}{\xi_2} \right) \right] \quad (12)$$

в яку безпосередньо входить декремент коливань як функція відповідних амплітуд деформацій  $\xi_2$ . При цьому рівняння (4) повинні бути доповнені деякими функціоналами

$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ Q \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]$  і  $\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right]$ , що враховують розсіювання енергій в циклічно

деформованому матеріалі відповідно за рахунок дії нормальних і дотичних напружень.

При врахуванні затухання можна використовувати залежності Н.Н. Давиденкова, Е.С. Сорокіна чи Я.Г. Пановка, але вищенаведені залежності – найприйнятніші.

Для виведення диференціальних рівнянь руху коливальної системи фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача при її сталому поперечному перерізі найзручніше скористатись принципом Даламбера. Для цього виділимо деякий елемент фермово-решітчастої конструкції у місці з'єднання пружного елемента  $c_i$  з фермово-решітчастою конструкцією і трубопроводом, рис. 1, а. Розглянемо сили, що впливають на поступальний рух: поперечні сили  $Q$ ,  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dt$ , точкову силу  $c_i(w - w_i) \delta(x - x_i)$ , зумовлену взаємодією пружного зв'язку фермово-решітчастої конструкції з трубопроводом, і сили

інерції виділеного елемента  $q_i = \rho F \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}$ . Проектуючи ці сили на вертикальну вісь  $z$  одержимо

$$-\rho F \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} dx - c_i (w - W_i) \delta(x - x_i) = 0. \quad (13)$$

Для складання диференціального рівняння руху з урахуванням інерції обертання елемента конструкції визначимо повний кут  $\frac{\partial w}{\partial x} = \beta + \gamma$  між віссю виділеного елемента і віссю  $x$  (рис. 2). Тут  $\beta$  – кут повороту поперечного перерізу фермово-решітчастої конструкції без врахування поперечних сил,  $\gamma$  – кут зсуву по нейтральній осі в тому ж поперечному перерізі. Тому

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta.$$

Між згинальним моментом, поперечною силою і кутами  $\beta$  та  $\gamma$  існують відомі залежності [10, 13, 8 – 9, 13, 14]

$$M = EJ_y \frac{d\beta}{dx}; \quad (14)$$

$$Q = -k' \gamma GF = -k' GF \left( \frac{dw}{dx} - \beta \right)$$

Момент інерції обертання маси виділеного елемента

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \int_F w^2 \rho dF dx = \rho J_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}. \quad (15)$$

На основі принципу Даламбера можна записати рівняння динамічної рівноваги виділеного елемента, завдовжки  $dx$ , при його обертанні під час згинних коливань у вигляді

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx - Q dx - \rho J_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} dx = 0. \quad (16)$$

Поділивши попередньо рівняння (16) на  $dx$  і використовуючи залежності (14), подамо його у вигляді

$$k' GF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) + EJ_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \rho J_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0. \quad (17)$$

Рівняння (13) з урахуванням (14) матиме вигляд

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - kG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^n c_i (w - w_i) \delta(x - x_i) = 0. \quad (18)$$

Виключаючи з рівнянь обертального (17) і поступального (18) рухів виділеного елемента  $dx$  кут  $\beta$ , одержимо диференціальне рівняння згинних коливань фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача з урахуванням інерції обертання і деформації зсуву та з урахуванням взаємовпливу пружних зв'язків під'єданого трубопроводу на коливальний процес

$$EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - \rho J_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{E}{k'G} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \sum_{i=1}^n c_i (w - w_i) \delta(x - x_i) + \rho^2 J_y k'G \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial t^4} = 0. \quad (19)$$

Рівняння (19) повинно бути доповнено членами  $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\Phi}(w)$  і  $\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}(w)$  [8,9]

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\Phi}(w) &= \pm \frac{n+1}{4n} E \int_F \delta \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=0} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=0} \right] \mp \\ &\mp n \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right)^n \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right)^{1-n} \Big|_{t=0} z^2 dF; \\ \varepsilon \bar{\Psi}(w) &= \pm \frac{k+1}{4k} \int_F \left\{ \frac{\rho F S_y(z)}{J_y b} \delta \left\{ \frac{\rho F S_y(z)}{G J_y b} \left[ \int_x^l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dx \right] \Big|_{t=0} \right\} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \left[ \int_x^l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dx \right] \Big|_{t=0} \mp k \int_x^l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dx - \left[ \int_x^l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dx \right]^k \left[ \int_x^l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dx \right]^{1-k} \right\} \right\} dF, \end{aligned} \quad (20)$$

де  $n$  – параметр форми петлі гістерезису,  $k$  – число циклів навантаження,  $S_y(z)$  – статичний момент інерції поперечного перерізу  $F(z)$ ,  $b$  – ширина перерізу по лінії, де визначаються дотичні напруження  $\tau$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр.

При перекошуванні решіток під час згинних коливань фермово-решітчастої конструкції відбувається стиск її стояків і видовження діагоналей, рис. 1, б [14]

$$AA' = \frac{Qb}{EF_c} + \frac{Qd}{EF_d \cos^2 \alpha_d}, \quad (21)$$

де  $F_c$  і  $F_d$  – площі поперечних перерізів стояків і діагоналей.

Оскільки  $\gamma = \frac{AA'}{a}$ , то на основі (14) можна записати, що

$$\frac{1}{k'G} = \frac{bF}{aEF_c} + \frac{dF}{aEF_d \cos^2 \alpha_d} = K_G. \quad (22)$$

Відповідно до рівнянь (5) і (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - W_0 \omega^2 \cos \omega_0 t; \\ \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial t^2} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}; \\ \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} + W_0 \omega^4 \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (23)$$

Диференціальне рівняння (19) з урахуванням (20), (22) і (23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} E J_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho J_y (1 + EK_G) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho^2 J_y K_G \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + \sum_{i=1}^n c_i (w - w_i) \delta(x - x_i) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\Phi}(w) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}(w) = \\ = \varepsilon W_0 (\rho F - \rho^2 J_y K_G \omega_0^2) \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (24)$$

Рівняння (24) записане з урахуванням того, що у (6) амплітуда  $W_0$  плоскопаралельних, вертикальних гармонічних коливань, заправленої, консольної фермово-решітчастої конструкції, пропорційна малому параметру  $\varepsilon$ .

Вводячи в диференціальні рівняння (24) і (9) відносні координати  $\xi = x/l$  та у рівняння (9) функціонали (20), можемо подати їх у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{l^4 \partial \xi^4} + (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^4 w}{l^4 \partial \xi^2 \partial t^2} + \alpha_4 \sum_{i=1}^n \varepsilon c_i (w - w_i) \delta l (\xi - \xi_i) + \\ & + \alpha_5 \frac{\partial^2}{l^2 \partial \xi^2} \varepsilon \bar{\Phi}(w) + \alpha_6 \frac{\partial}{l \partial \xi} \varepsilon \bar{\Psi}(w) = \alpha_7 \varepsilon W_0 (\rho F - \rho^2 J_y K_G \omega_0^2) \omega_0^2 \cos \omega t; \\ & \frac{\partial^4 w_i}{l^4 \partial \xi^4} + \beta_1 \left[ v^2(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_i}{l^2 \partial \xi^2} + 2v(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_i}{l \partial \xi \partial t} + \varepsilon \left[ \frac{\partial v(l\xi, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{l \partial \xi} (v^2(l\xi, t)) \right] \frac{\partial w_i}{l \partial \xi} \right] + \\ & + \beta_2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \beta_3 p(l\xi, t) \frac{\partial^2 w_i}{l^2 \partial \xi^2} + \beta_4 \frac{\partial w_i}{\partial t} + \beta_5 \frac{\partial^2}{l^2 \partial \xi^2} \varepsilon \bar{\Phi}(w_i) + \beta_6 \frac{\partial}{l \partial \xi} \varepsilon \bar{\Psi}(w_i) + \\ & + \beta_7 \varepsilon \left[ \frac{\partial^4 w_i}{l^4 \partial \xi^4} \frac{\partial^2 w_i}{l^2 \partial \xi^2} + 2 \left( \frac{\partial^3 w_i}{l^3 \partial \xi^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_i}{l^2 \partial \xi^2} - \beta_8 \sum_{i=1}^n \varepsilon c_i (w - w_i) \delta l (\xi - \xi_i) = \\ & = \beta_9 \sum_{j=1}^k \varepsilon F_{RK} \cos \omega t \cdot \delta l (\xi - \xi_j) + \beta_{10} \varepsilon W_0 (\rho_l F_l + \rho_p F_p) \omega_0^2 \cos \omega_0 t, \end{aligned} \right. \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\rho F}{E J_y}; & \alpha_2 &= \frac{\rho J_y (1 + E K_G)}{E J_y}; & \alpha_3 &= \frac{\rho J_y K_G}{E J_y}; \\ \beta_1 &= \frac{\rho_p F_p}{E_l J_{yl}}; & \beta_2 &= \frac{\rho_l F_l + \rho_p F_p}{E_l J_{yl}}; & \beta_3 &= \frac{\pi R^2}{E_l J_{yl}}; & \beta_4 &= \frac{K_T}{E_l J_{yl}}; \\ \beta_5 &= \beta_6 = \frac{1}{E_l J_{yl}}; & \beta_7 &= \lambda_l; & \beta_8 &= \beta_9 = \beta_{10} = \frac{1}{E_l J_{yl}}; \end{aligned}$$

Граничні умови інтегрування рівнянь (25) мають вигляд

$$\begin{aligned} [W(\xi l, t) = W_l(\xi l, t)]_{|\xi=0} &= 0; & \left[ \frac{\partial W(\xi l, t)}{l \partial \xi} = \frac{\partial W_l(\xi l, t)}{l \partial \xi} \right]_{|\xi=0} &= 0; \\ \left[ E J_y \frac{\partial^2 W(\xi l, t)}{l^2 \partial \xi^2} = E_l J_{yl} \frac{\partial^2 W_l(\xi l, t)}{l^2 \partial \xi^2} \right]_{|\xi=l} &= 0; \\ \left[ E J_y \frac{\partial^3 W(\xi l, t)}{l^3 \partial \xi^3} = E_l J_{yl} \frac{\partial^3 W_l(\xi l, t)}{l^3 \partial \xi^3} \right]_{|\xi=l} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Отже, система рівнянь (25) з граничними умовами (26) описують коливальний процес згинних коливань фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача і під'єднаного, за допомогою пружних зв'язків, дірчастого тупикового трубопроводу при кінематичному, вертикальному, гармонічному збуренні, консольно заправлених їх кінців.

### Аналіз задачі

Якщо начіпна штанга обприскувача здійснює кутові рухи, тобто коли вважати, що консольно заправлений кінець фермово-решітчастої конструкції з під'єднаним дірчастим тупиковим трубопроводом збурюється, наприклад, гармонічними кутовими поворотами з



відомою кутовою амплітудою  $\Theta_0$  і частотою  $\omega_0$ ,  $\Theta(t) = \Theta_0 \cos \omega_0 t$ , то сумарне переміщення перерізу, виділеного елемента завдовжки  $dx$  на відстані  $x$  від заправлення буде

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) + \Theta_0 x \cos \omega_0 t. \quad (26)$$

Тому в цьому випадку права частина першого рівняння (25) повинна мати вигляд

$$\alpha_7 \varepsilon W (\rho F - \rho^2 J_y K_G \omega_0^2) \omega_0^2 \xi l \cos \omega_0 t,$$

а останній член другого рівняння (25) потрібно замінити

$$\beta_{10} \varepsilon W_0 (\rho_l F_l + \rho_p F_p) \omega_0^2 \xi l \cos \omega_0 t.$$

Приймаючи  $\varepsilon = 0$ , можна знайти власні частоти вільних коливань даної механічної системи. Необхідно зауважити, що у нульовому наближенні ( $\varepsilon = 0$ ) аналітичне розв'язання системи двох диференціальних рівнянь (25) четвертого порядку надзвичайно трудомістке, а при ( $\varepsilon \neq 0$ ) розв'язати їх у замкнутому вигляді практично неможливо, навіть, наближеними методами. Тому при розв'язуванні даної складної крайової задачі необхідно застосовувати числові методи, які пов'язані також із серйозними труднощами.

Ця крайова задача розв'язана числовим методом за допомогою програми ANSYS для одночастотного режиму коливань у припущенні великої жорсткості пружних зв'язків між начіпною фермово-решітчастою штангою і під'єднаним до неї дірчастим трубопроводом. Результати числового розв'язку зображені на рис. 2 – 4.

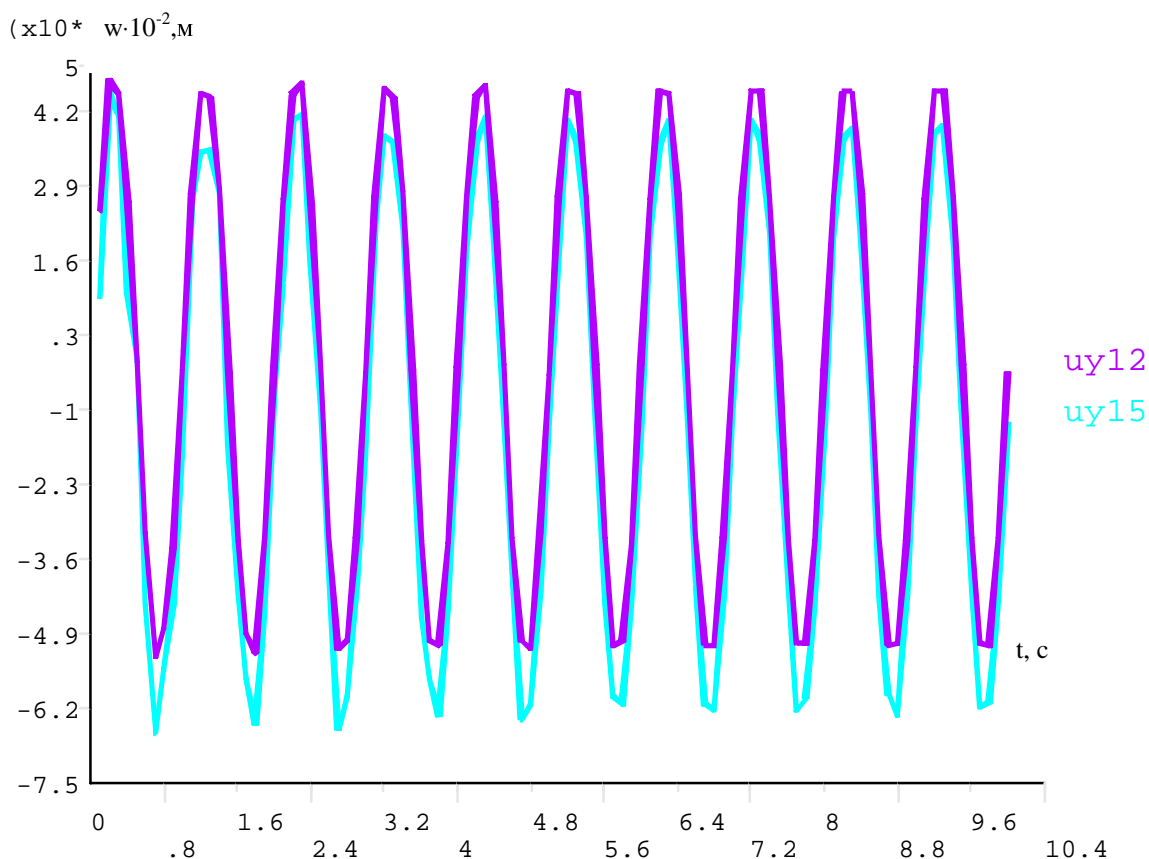


Рис. 2. Закон коливань кінця і середньої частини консольно закріпленої фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача під час експлуатації

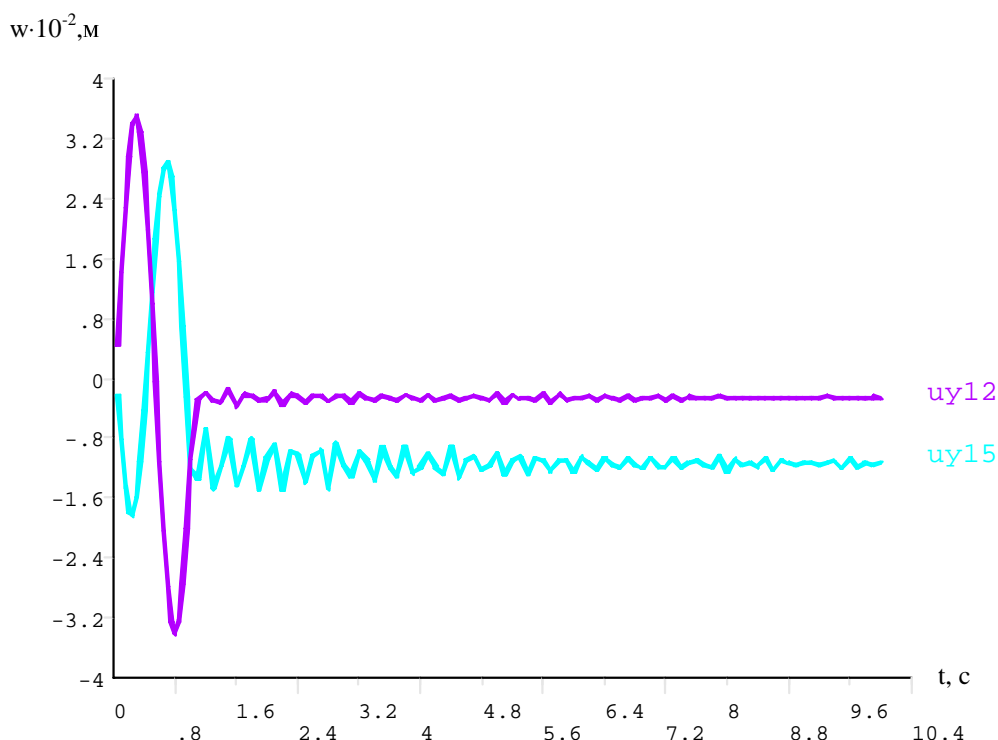


Рис. 3. Закон коливань кінця і середньої частини консольно закріпленої фермово-решітчастої конструкції націпної штанги обприскувача при наїзді на одиничну нерівність

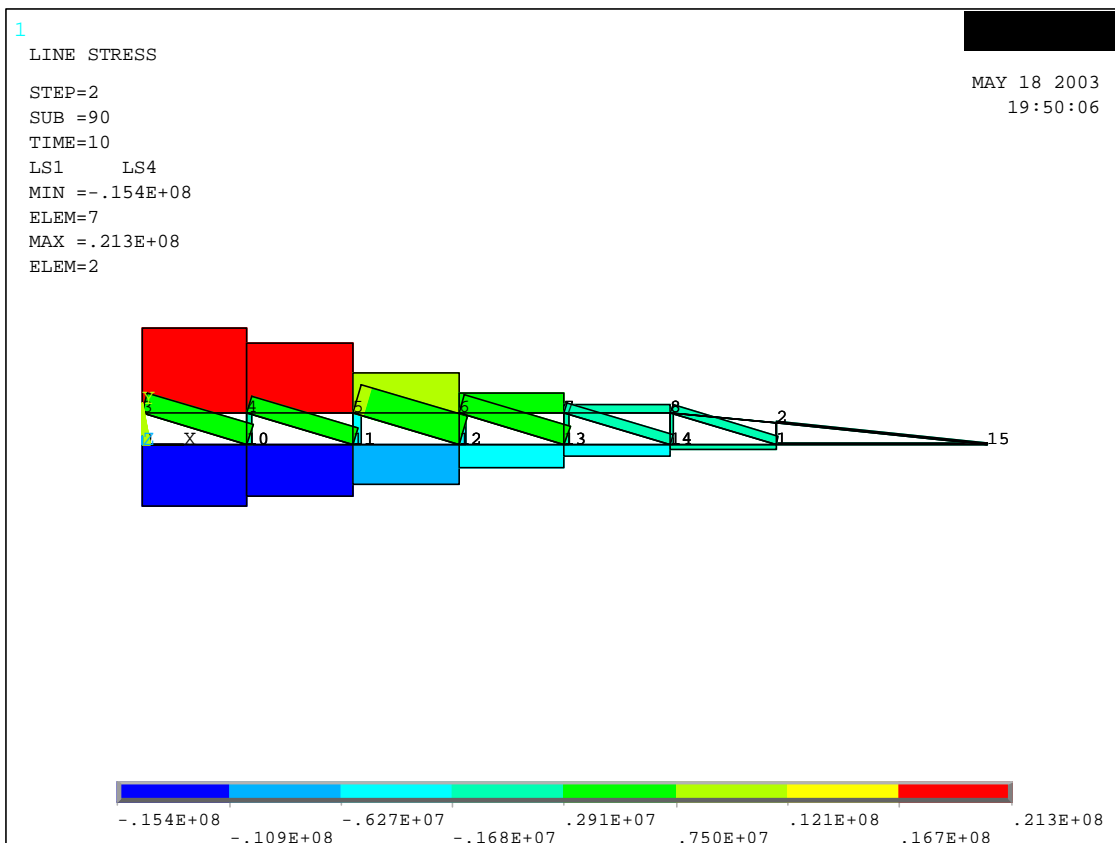


Рис. 4. Напруження у фермово-решітчастій конструкції націпної штанги обприскувача під час експлуатації

### Висновок

Отже, запропонована математична модель згинних коливань фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача з під'єднаним до неї дірчастим тупиковим трубопроводом дає змогу проводити аналіз динамічних процесів, які виникають у машинах для хімічного захисту рослин, враховувати їх при проектуванні цих машин, вибирати при цьому оптимальні геометричні та жорсткісні параметри робочих органів, а саме начіпних штанг обприскувачів.

1. *Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. – М.: Машиностроение. 1978. – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – 1978. – 352 с. – Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.В. Фролова. – 1981. – Т. 6. – 456 с.* 2. Каудерер Г. *Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.* 3. Лурье Ф.М., Григорьева Г.Н. *Влияние инерции вращения и сдвига на собственную частоту изгибных колебаний стержня // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. – № 2. – С. 51 – 54.* 4. Лю-Хун-Сунь, Моут Мл. *Динамика труб, по которым движется жидкость // Конструирование и технология машиностроения. Тр. амер. общ-ва инж.-механиков. Сер. В. – 1974. – № 2. – С. 211 – 217.* 5. Мухин О.Н. *Динамический критерий устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью // Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – № 3. – С. 154 – 155.* 6. Овчинников В.Ф. *Параметрические колебания трубопровода с учетом нелинейной связи движений трубки и жидкости // Динамика упругих и твердых тел взаимодействующих с жидкостью. Тр. IV семинара. Сб. статей под ред. И.М. Василина. – Томск: Изд-во:Томск. ун-та, 1981. – С. 140 – 148.* 7. Овчинников В.Ф., Л.В. Смирнов. *Динамические свойства трубопровода с движущейся жидкостью // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Физика и техника ядерных реакторов. Научно-техн. сб. – М., 1981. – Вып. 6(19). – С. 6 – 16.* 8. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. *Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наук. думка, 1981. – 218 с.* 9. Писаренко Г.С. *Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – К.: Наук. думка, 1985. – 240 с.* 10. Писаренко Г.С., Азарев В.А., Попков В.Г., Уманский Э.С. *Сопротивление материалов. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.* 11. Тармен, моут Мл. *Нелинейные колебания цилиндра с протекающей жидкостью // Конструирование и технология машиностроения. Тр. амер. общ-ва инж.-механиков. Сер. В.–М. – 1969. – № 4. – С. 233 – 242.* 12. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Цивер У. *Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.* 13. Фесик С.П. *Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Будівельник, 1982. – 280 с.* 14. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е перераб. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.* 15. Френкель Н.З. *Гидравлика. – Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1956. – 456 с.*