1. Розраховують робоче значення критерію Рейнольдса $Re_p = 2B$.

2. Розраховують оптимальні значення критерію Архімеда $Ar_{ОПТ}$ для П- або Т-режиму осадження диспергованої частинки.

3. З рівності (7) визначають оптимальні значення товщини Л-плівки $\delta_{ОПТ.}$

4. За відомими параметрами $Ar_{ОПТ}$ та $\delta_{ОПТ.}$ з рівності (8) визначають оптимальні значення діаметра подрібненої твердої або диспергованої рідкої фази $d_{ОПТ.}$

Висновки

1. Швидкість проходження процесу екстракції в системі тверде тіло – рідина а також рідина – рідина залежить від низки вказаних фізичних характеристик екстрагента і диспергованої фази.

2. Виведений критерій оптимального проходження процесу екстракції в полі гравітаційних сил за допомогою методу розмірностей.

3. Виведена формула для розрахунку оптимальних параметрів Л-плівки, що виникає при осадженні диспергованої частинки в суцільному рідкому середовищі (екстрагенті).

УДК 631.62

П.І. Ванкевич, Л.М. Зорій, А.О. Добрянська, Ю.І. Бондар
Львівський державний аграрний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОБІЧНИХ ОЦІНОК ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

Побудовано частотне рівняння задачі про вільне коливання жорстко закріпленої круглої пластини у вигляді характеристичного ряду. Встановлено доцільність застосування двобічних оцінок і таблиць Бернштейна-Керопяна до даної та споріднених задач.

The frequency equation of a problem about free oscillation of a hard-mounted circular plate by the way of characteristic number(series) is constructed. The expediency of application of two-sided estimations and tables Bernshtein-Keropjan to given and related problems is established.

Вступ

Багато задач сучасної техніки пов’язано з дослідженням впливу різноманітних факторів на динамічну поведінку багатопараметричних деформівних систем, що є елементами механізмів, машин, приладів тощо. Забезпечення надійності, довговічності та економічності вказаних елементів, розширення діапазону їхніх можливостей і призначень, можливості ефективної вібродіагностики належать до найактуальніших питань. При цьому, зокрема, важливу роль мають власні частоти коливних систем.

Одним з раціональних способів визначення нижчих частот стрижневих систем є застосування відомих двобічних оцінок і таблиць Бернштейна-Керопяна [2]. Нижче на прикладі задачі про коливання круглої пластини встановлено, що вказаний спосіб можна й доцільно використовувати до інших класів коливних систем.

1. Вихідні співвідношення. Вільні поперечні коливання пружної пластини радіуса R у полярній системі координат (r, φ) описуються відомим диференціальним рівнянням та відповідними граничними й початковими умовами [1]

$$D\Delta_r \Delta_r W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0; \qquad (1)$$

$$\Delta_r = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

де D, ρ, h – циліндрична жорсткість, питома густина й товщина пластини; $W=W(r, \varphi, t)$ – її динамічний прогин. Якщо, зокрема, пластина закріплена жорстко, то граничні умови є такими:

$$W(R,\varphi,t) = 0, \ \frac{\partial W}{\partial r}(R,\varphi,t) = 0; \qquad (2)$$

Крім цього, для суцільної круглої пластини має виконуватися умова обмеженості розв'язків:

$$W(0,\varphi,t) \prec \infty \qquad (r = 0). \qquad (3)$$

Підставивши в співвідношення (1) – (3)

$$W = w(r)\cos n\varphi e^{i\omega t} \quad (i = \sqrt{-1}),\ n = 0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

(ω – частотний параметр), після відокремлення змінних матимемо таку задачу на власні значення:

$$L_0[w] - \gamma^4 w = 0; \quad \gamma^4 = \frac{\rho h R^4 \omega^2}{D};$$

$$w(R) = 0, \quad w'(R) = 0, \quad w(0) \prec \infty, \qquad (5)$$

де

$$L_0[w] \equiv w^{IV} + \frac{2}{r} w^{III} - \frac{1}{r^2}(1+2n^2)w^{II} + \frac{1}{r^3}(1+2n^2)w^{I} - \frac{1}{r^4}(4n^2 - n^4)w \ (0 \prec r \le R). \qquad (6)$$

Власні частоти пластини визначаються з характеристичного рівняння (5), (6) [1]:

$$I_n(\gamma) I_n'(\gamma) - I_n'(\gamma) I_n(\gamma) = 0 \quad (\text{n} = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

(його одержують з застосуванням загального розв'язку рівняння та граничних умов (5)). Тут I_n та I_n – функції Бесселя та модифіковані функції Бесселя n-го порядку першого роду; кожному числу n (n = 0, 1, 2, …) відповідає зліченна множина m (m = 1, 2, 3, …) коренів рівняння (7), що позначаються як γ_{mn}. При цьому власні частоти ω_{mn} обчислюють за формулою

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\gamma_{mn}^4 D}{R^4 \rho h} \quad (m = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (8)$$

Нижче розглядається питання про можливість і доцільність застосування до знаходження чисел γ_{mn} двобічних оцінок і таблиць Бернштейна-Керопяна [2]

2. Побудова характеристичного ряду задачі. Диференціальне рівняння (5) має два обмежені при $r = 0$ розв'язки; позначимо їх як $\psi_1(r)$ та $\psi_2(r)$. Якщо $\gamma^4 = 0$ (ω = 0), то такими розв'язками є r^n та r^{n+2}. При цьому функцію впливу рівняння $L_0[w] = 0$ визначаємо за формулою [3]

$$K(r,\alpha)=\frac{\alpha}{8n}\left(\frac{\alpha^n r^{-n+2}-r^n\alpha^{-n+2}}{n-1}+\frac{\alpha^{-n}r^{n+2}-r^{-n}\alpha^{n+2}}{n+1}\right), \tag{9}$$

а функції $\psi_1(r)$ і $\psi_2(r)$ будуються як ряди такого вигляду:

$$\psi_1=r^n-\gamma^4 a_1(r)+\gamma^8 a_2(r)-\ldots \tag{10}$$

$$\psi_2=r^{n+2}-\gamma^4 в_1(r)+\gamma^8 в_2(r)-\ldots \tag{11}$$

Коефіцієнти цих рядів обчислюються послідовно за формулами [3]

$$a_i(r)=\int_0^r K(\gamma,s)a_{i=1}(s)ds;\quad a_0=r^n;\ i=1,2,\ldots \tag{12}$$

$$в_i(r)=\int_0^r K(r,s)в_{i-1}(s)ds;\quad в_0=r^{n+2};\ i=1,2,\ldots \tag{13}$$

Із (9), (12) і (13) одержуються такі рекурентні співвідношення:

$$a_{m+1}(r)=a_m(r)\frac{r^4}{2^5(m+1)(2m+1)(2m+1+n)(2m+2+n)};\ m=0,1,2,\ldots \tag{14}$$

$$в_{m+1}(r)=в_m(r)\frac{r^4}{2^4(2m+2)(2m+3)(2m+2+n)(2m+3+n)};\ m=0,1,2,\ldots \tag{15}$$

Отже, ряди (12) і (13) можна вважати визначеними; відповідний обмежений розв’язок рівняння (5) з двома довільними сталими C_1 і C_2 є такими:

$$w=C_1\psi_1(r)+C_2\psi_2(r). \tag{16}$$

Підставляючи (16) у граничні умови (5), приходимо до характеристичного рівняння задачі (5):

$$\left(\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2\right)_{r=R}=0. \tag{17}$$

Звідси, беручи до уваги зображення (10), (11) і (14), (15), можна послідовно виводити формули для коефіцієнтів $A_i(n)$ відповідного характеристичного ряду (лівої частини рівняння (17))

$$A_0-A_1\gamma^4+A_2\gamma^8+A_3\gamma^{12}-\ldots \tag{18}$$

Перші три з них (після ділення рівняння (17) на "2"), визначені за формулами

$$A_0=1;\qquad A_1=\frac{1}{2^4(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$A_2=\frac{1}{2^9(n+1)(n+2)^2(n+3)(n+4)(n+5)}. \tag{19}$$

Зауважимо, що так само можна будувати характеристичні ряди вигляду (18) інших задач (складніші граничні умови, кільцеві та секторіальні пластини, змінний розподіл параметрів тощо).

3. Найпростіші оцінки найнижчих частот. Маючи коефіцієнти (19), підставляємо їх у відомі формули для визначення першої частоти з нестачею та з надлишком [2]

$$\frac{A_0}{\sqrt{A_1^2-2A_0A_2}};\qquad\qquad \frac{2A_0}{A_1+\sqrt{A_1^2-4A_0A_2}}. \tag{20}$$

Отримуємо відповідно

$$(\gamma_{1n}^{8})_{-} = \frac{2^4(n+1)(n+2)(n+3)}{\sqrt{\dfrac{5n+17}{(n+4)(n+5)}}}; \tag{21}$$

$$(\gamma_{1n}^{8})_{+} = \frac{2^5(n+1)(n+2)(n+3)}{1+\sqrt{\dfrac{-n^2+n+14}{(n+4)(n+5)}}}. \tag{22}$$

Числа, визначені за цими формулами, наведені нижче; точні значення взяті з [1].

n	$(\gamma_{1n}^{2})_{-}$	$(\gamma_{1n}^{2})_{+}$	Точні V_{1n}^{2}
0	3,194	3,198	3,196
1	4,602	4,622	4,611
2	5,882	5,947	5,909
3	7,099	7,266	7,144
4	8,274	8,711	8,347
5	9,419	не існує	9,256

Як бачимо, оцінки (21) і (22) виявилися вельми точними для $n = 0, 1, 2, 3,$ і 4, причому нижня $(\gamma_{1n}^{2})_{-}$ є ближчою до точних значень. Починаючи з $n = 5$ оцінка $(\gamma_{1n}^{2})_{+}$ не існує (підкореневий вираз у (20) – від'ємний для $n = 5, 6, \ldots$). Зауважимо, що число $(\gamma_{15}^{2})_{-}$ (для $n = 5$) не узгоджується з відомим точним значенням 9,256 (імовірно, при визначенні цього точного трапилася деяка помилка).

4. Застосування таблиць Бернштейна-Керопяна [2]. Вказані таблиці дозволяють визначати двобічні оцінки трьох перших частот і наближене значення четвертої, якщо величина відношення $B_2 / B_1^2 \in [0{,}5;1)$ [2],

де

$$B_2 = A_1^2 - 2A_2;\ B_1 = A_1 \qquad (A_0 = 1) \tag{23}$$

Із (19) і (23) отримуємо:

$$\frac{B_2}{B_1^2} = \frac{5n+17}{(n+4)(n+5)}; \tag{24}$$

n	0	1	2	3	4
B_2 / B_1^2	0,85	0,7(3)	0,6459	0,5714	0,5139

Кожному з наведених чисел у таблиці № 21 книги [2] відповідають, зокрема, числа φ_i, β_i $(i = 1{,}3)$ та ψ_4. За цими числами можна оцінювати три перші частоти та наближено визначати четверту, використовуючи формули:

$$\sqrt{\frac{\varphi_i}{B_1}} \prec (\gamma_{in}) \prec \sqrt{\frac{\beta_i}{B_1}} (i = 1{,}3);\ \ (\gamma_{4n}) \approx \sqrt{\frac{\psi_4}{B_1}}. \tag{25}$$

Зауважимо, що визначені таким чином двобічні оцінки першої частоти γ_{1n}^2 для *n = 1,4* практично збігаються з наведеними вище в табл. 1.

Висновки

На прикладі задачі про вільні коливання жорстко закріпленої круглої пластини встановлено:

1. Маючи три перші коефіцієнти відповідного частотного рівняння у вигляді характеристичного ряду, можна застосувати двобічні оцінки і таблиці Бернштейна-Керопяна.

2. Доцільність запропонованого способу підтверджена високою точністю його застосування до даної задачі.

1. Василенко Н.В. Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с. 2. Бернштейн С.А., Керопян К.К. Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции. – М.: Госстройиздат, 1960. – 281 с. 3. Гащук П., Зорій Л.М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 4. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник. – К.: Наукова думка, 1964. – 288 с.

УДК 621.302

І.А. Вікович
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра нарисної геометрії і графіки

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ФЕРМОВО-РЕШІТЧАСТОЇ КОНСТРУКЦІЇ НАЧІПНОЇ ШТАНГИ ОБПРИСКУВАЧА З ПІД’ЄДНАНИМ ТУПИКОВИМ ДІРЧАСТИМ ТРУБОПРОВОДОМ

Розроблена математична модель згинних коливань, консольно закріпленої, кінематично збуреної, фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги обприскувача з під’єднаним тупиковим дірчастим трубопроводом.

The mathematical model of banding oscillations of consoley closed up, cinematically-exited, ферменно-trellised design of a sprayer hanging bar with connected holey deadlock by the pipeline is developed.

Вступ

У машинах для хімічного захисту рослин, зокрема у штангових обприскувачах, робочим елементом є подовгаста фермово-решітчаста конструкція начіпної штанги, до якої під’єднаний дірчастий тупиковий трубопровід з рухомою рідиною.

На дірчастому трубопроводі з відповідним кроком, на місцях розміщення отворів, встановлені розпилювачі для утворення факелу розпилення і рівномірного обприскування рослин. Рідина з ємності обприскувача подається насосом у трубопровід начіпної штанги у декілька атмосфер і при витіканні її через отвори або розпилювачі утворює реактивні пульсуючі сили, які впливають на динамічні характеристики начіпної штанги. Сама начіпна штанга обприскувача під час виконання технологічного процесу обприскування, внаслідок кінематичного збурення з боку рельєфу грунту, здійснює вертикальні та кутові рухи.