МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА АВТОМАТИЗОВАНОГО ОБЛАДНАННЯ

УДК 359.3

С.Ф. Будз, В.І. Асташкін, Є.М. Ірза, Р.А. Яцюк

ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА НАПРУЖЕННЯМИ РЕЖИМІВ ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ СКЛЯНИХ ТІЛ

Mathematical model for stress-optimization of thermal loadings of glass bodies is proposed. The model is constructed on the base of mechanical and mathematical model for thermoviscoelastic body with consideration of residual strains and stresses arising in thermal loading process. The technique for reduction of optimization problem to that on function conditional extremum is proposed.

Конструкції із скла широко використовуються в різних галузях народного господарства. Під час виготовлення і технологічної обробки їх піддають тепловому навантаженню при заданих умовах механічного закріплення чи силового навантаження. Напруження і деформації, що виникають при обробці, можуть досягати значної величини, перевищувати допустимі норми і приводити – з одного боку – до руйнування конструкції або порушення її заданих геометричних параметрів вже під час виготовлення, а з іншого боку – до формування залишкових напружень і деформацій, рівень яких суттєво впливає на міцність конструкцій .

В зв'язку з цим, актуальною є проблема оптимізації напружено-деформованого стану скляних тіл при тепловому навантаженні.

Наведені в літературі [1 – 4] математичні моделі визначення і оптимізації напружено-деформованого стану скляних тіл при тепловому навантаженні не достатньо повно враховують комплекс параметрів і обмежень на них, що при цьому виникають. В той же час реальні технологічні процеси (зварювання, гартування) вимагають більш повного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій при виготовленні і термообробці з метою підвищення їх надійності в експлуатації.

Тут розробляється математична модель оптимізації напружено-деформованого стану скляних тіл на базі механіко-математичної моделі термов'язкопружного тіла з врахуванням залишкових деформацій і напружень, які формуються під час теплового навантаження .

Скло, як відомо [1], – це тверде аморфне ізотропне тіло, яке утворюється в результаті охолодження розплаву без кристалізації. При пониженні температури в'язкість розплаву неперервно збільшується. При цьому змінюються і інші фізико-хімічні властивості скла. При рівномірному охолодженні скла від початкової температури t_0, при якій воно перебуває в рідкому стані, ми приходимо до деякої температури t_g, при якій різко збільшується його в'язкість. Таку характерну для скла температуру t_g прийнято називати температурою склування [1]. Ця величина є функцією хімічного складу скла. При більш детальному розгляді слід враховувати вплив на неї швидкості охолодження та інших параметрів процесу. Вище від цієї температури скло веде себе як в’язка рідина, нижче – як пружне тіло. При температурах, більших від температури склування t_g, кожній температурі розплаву властива своя рівноважна структура. Стабілізація структури, внаслідок малої в'язкості, тут відбувається порівняно швидко.

При охолодженні скла в’язкість його збільшується і зростає час формування рівноважної структури. При досягненні температури склування t_g відбувається фіксація структурних і об’ємних деформацій [1].

Математичну модель поведінки скла будуємо, враховуючи принцип адитивності [2], згідно з яким приріст компонент тензора повної деформації має вигляд:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{t} + d\varepsilon_{ij}^{c} + d\varepsilon_{ij}^{ost} + d\varepsilon_{ij}^{str} + d\varepsilon_{ij}^{e}\ , \tag{1}$$

де $d\varepsilon_{ij}^{t} = \alpha_t g_{ij} dt$ – приріст тензора термічної деформації;

$d\varepsilon_{ij}^{c} = \dfrac{1}{2G\eta} S_{ij} d\tau$ – приріст тензора деформації повзучості в діапазоні температур вищих за температуру склування t_g;

$d\varepsilon_{ij}^{ost} = -\alpha_t g_{ij} d\Phi$ – приріст тензора залишкової деформації при досягненні температури склування t_g. Функція навантаження Φ визначається з гіпотези «заморожування»:

$\dfrac{\partial t}{\partial s} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}$, s – нормаль до ізотермічної поверхні $t\left(M, \tau_g\right) = t_g$;

$d\varepsilon_{ij}^{str} = \beta g_{ij} df$ – приріст тензора структурної деформації, яка виникає в склі внаслідок фіксації нерівноважної структури , яка зумовлена зростанням в’язкості скла при пониженні температури; β – коефіцієнт розширення, зумовленого структурними змінами; f – вільний об'єм скла, який визначається формулою [3]:

$$f = \frac{1}{4} t_g \left(\alpha_T - \alpha_L\right),$$

де α_T *і* α_L – об'ємні коефіцієнти термічного розширення скла у рідкому і твердому стані; температура склування t_g залежить від швидкості q охолодження скла за законом:

$$t_g^{-1} = c_1 (1 - 0.03 \lg q)\ ,$$

де c_1 – матеріальна константа даного сорту скла;

$d\varepsilon_{ij}^{e} = \dfrac{1}{9K} g_{ij} d\sigma + \dfrac{1}{2G} dS_{ij}$ – приріст тензора пружної деформації в діапазоні температур нижчих за температуру склування t_g. Тут S_{ij}, σ – відповідно девіаторна і кульова частини тензора напружень; α_t – лінійний коефіцієнт температурного розширення скла; K – модуль об'ємного стиску; G – модуль зсуву; η – коефіцієнт в'язкості; τ -час; g_{ij} – коваріантний метричний тензор.

При моделюванні враховуємо залежність теплофізичних характеристик скла від температури і приймаємо до уваги експериментально удоводнений факт про відсутність помітного впливу напружень на температуру скла [1].

Для опису термомеханічної поведінки скляного виробу під час термообробки моделюємо його тривимірним тілом, яке займає область *Ω* евклідового простору R^3 і обмежене неперевною за Ліпшицем поверхнею *Г*. Область, зайняту тілом, віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $Ox^1x^2x^3$. Через частину поверхні Γ_t тіло конвективно обмінюється теплом з зовнішнім середовищем, через частину Γ_q в тіло надходить (відходить) тепловий потік потужністю q $\left(\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma\right)$. По об'єму тіла діють розподілені джерела нагріву потужністю *Q*. Механічні граничні умови вибираємо такими. На частині Γ_u загальної поверхні тіла *Г* задані переміщення $u = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$, а на іншій, – Γ_σ, силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

За прийнятих припущень розподіл температури в тілі описується рівнянням теплопровідності вигляду:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \tag{2}$$

при наступних граничних і початкових умовах:

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} - \alpha\left(t - t_c\right)\right]_{\Gamma_t} = 0 \;; \qquad \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q\right]_{\Gamma_q} = 0 \;; \qquad t\left(M,0\right) = t_0 . \tag{3}$$

Тут c – питома теплоємність; ρ – густина ; τ – час; λ – коефіцієнт теплопровідності; α – коефіцієнт теплообміну; ∇ – оператор Гамільтона; *M* – довільна точка області *Ω*; *n* – зовнішня нормаль до поверхні тілі; t_c – температура навколишнього середовища. Розглядаємо найбільш загальний випадок, коли враховується вплив температури на теплофізичні властивості матеріалу, а коефіцієнт α враховує теплообмін із зовнішнім середовищем за рахунок випромінювання [4].

Крім співвідношень (1) – (3), в області $\overline{\Omega}$ повинні виконуватися рівняння рівноваги:

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0 \tag{4}$$

і граничні умови:

$$\left(n_j \sigma^{ij} - p^i\right)_{\Gamma_\sigma} = 0; \qquad u_{i/\Gamma_u} = u_i^*; \qquad \left(i = 1,..,3\right) \tag{5}$$

Тут σ^{ij} – контраваріантні компоненти тензора напружень; F^i – контраваріантні компоненти об'ємних сил. ∇_j – коваріантні похідні по координаті x_j; n_j – коваріантні компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні; p^i – контраваріантні компоненти вектора зовнішнього навантаження до поверхні Γ_σ; u_i^* – коваріантні компоненти заданого вектора переміщення на поверхні Γ_u; $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$; $\Gamma_u \subset \Gamma$ *і* $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = 0$; по індексу j виконується підсумовування від 1 до 3.

Тут обмежимося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами тензора деформацій $\bar{\varepsilon}$ і вектором переміщень $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ беремо в лінійному наближенні:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right). \tag{6}$$

Співвідношення (1) – (6) складають повну систему рівнянь для визначення температурного поля, вектора переміщень, тензорів деформацій і напружень при заданих значеннях температури навколишнього середовища t_c, теплового потоку q, потужності внутрішніх джерел тепла Q і зовнішнього навантаження $\bar{P}$.

Ставиться задача оптимізації за напруженнями режимів теплового навантаження тіла при заданих умовах механічного впливу.

На етапі нагріву від стану з початковою температурою t_0 до стану з максимальною температурою t^* функцією управління, позначимо її надалі умовно h, може бути температура навколишнього середовища t_c, густина теплового потоку q або потужність внутрішнього джерела тепла Q.

Вибрана функція управління h повинна задовольняти такі умови:

$$h \in \{S_1\} : \forall h \in \{S_1\}, \exists\, \tau^* \in [0, \tau], \text{ що} \tag{7}$$

$$\max t\left(M, \tau^*\right) = t^*, \quad M \in \overline{\Omega},$$

при заданих обмеженнях на температуру, напруження і деформації:

$$t_0 \le t(M, \tau) \le t^*; \max \sigma_i(M, \tau) \le \sigma_d; \max \varepsilon_i \le \varepsilon_d; \tag{8}$$

$$M \in \overline{\Omega},\ \tau \in \left[0, \tau^*\right],\ i = 1,..,3.$$

Тут σ_i, ε_i – головні значення тензора напружень і деформацій; σ_d, ε_d – допустимі рівні напружень і деформацій; S_1.– множина кусково-неперевних функцій, на якій досягається температура t^*.

За критерій оптимальності вибираємо мінімальний час нагріву до температури t^*, що можна записати такою формулою:

$$I = \min \tau^*, \tag{9}$$

де $\max t\left(M, \tau^*\right) = t^*,\ M \in \overline{\Omega}$.

Формальні умови (7) – (9) мають такий фізичний зміст. При нагріві існує деякий оптимальний спосіб впливу на скляне тіло. Він є таким, який забезпечує мінімальну тривалість нагріву τ^* за умови, що хоча б у одній точці тіла буде досягнуто максимальної температури t^*, а напруження та деформації, що виникають при цьому, не будуть перевищувати допустимого рівня.

На етапі охолодження від стану з максимальною температурою t^* до стану з максимальною температурою t_k функцією управління h може бути температура оточуючого середовища t_c або коефіцієнт тепловіддачі α. Вибрана функція управління h повинна задовольняти умови:

$$h \in \{S_2\} : \forall h \in \{S_2\}, \exists\, \tau_k \in [0, \tau], \text{ що} \qquad (10)$$
$$\max t(M, \tau_k) = t_k, \quad M \in \overline{\Omega},$$

де S_2 – множина кусково-неперервних функцій, на якій досягається температура t_k.

При цьому повинні виконуватися обмеження (8).

За критерій оптимальності виберемо мінімум функціоналу:

$$I = \min F\left(\sigma_i^{ost}, \sigma_i^{str}, \sigma_0\right). \qquad (11)$$

Тут F – функціонал, який характеризує відхилення тензора залишкових напружень від заданого рівня залишкових напружень σ_0. $\sigma_i^{ost}, \sigma_i^{str}$ – головні значення тензорів залишкових напружень, які зумовлені залишковими деформаціями "заморожування" в момент склування і фіксацією нерівноважної структури.

Таким чином, вибір функції управління на етапі охолодження здійснюється, враховуючи те, що перед початком охолодження в тілі існує деякий розподіл температурного поля із максимальною температурою t^*. Кероване охолодження здійснюється до стану з максимальною температурою t_k. Режим охолодження і його тривалість τ_k визначаються із умови забезпечення заданого (допустимого) рівня залишкових напружень. Поставлена задача має тривіальний розв'язок для випадку, коли задається умова відсутності залишкових напружень після охолодження. Такий стан можна досягти, коли тривалість охолодження є дуже велика $(\tau_k \to \infty)$.

В даній постановці оптимізація за напруженнями режимів теплового навантаження скляних тіл полягає в мінімізації функціоналів (9), (11) за рахунок вибору функції управління h, при обмеженнях (7) – (8), (10) і в'язях (1) – (6).

Наведена система диференційних рівнянь є нелінійною і не може бути розв'язана на основі відомих класичних методів математичного аналізу. Для розв'язання даних рівнянь можуть бути використані різні види дискретизації диференційних рівнянь, які зводять їх до суто алгебраїчної форми. Цю процедуру можна здійснити методом зважених нев'язок з використанням базових функцій [5].

В зв'язку з цим система диференційних рівнянь (1) – (6) піддається просторово-часовій дискретизації і зводиться до системи нелінійних рівнянь, які можна записати у вигляді:

$$[K_T]\{T\} = \{F_T\}$$
$$[K_{U,T}]\{U\} = \{F_{U,T}\}. \qquad (12)$$

Тут $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ – відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ – вектори навантаження.

В рамках запропонованого підходу функціонали (9), (11) зводяться до функції, аргументами якої є значення функції управління h_i в дискретні моменти часу τ_i. Названа функція має вигляд:

$$I = I(h_1, \ldots, h_n). \qquad (13)$$

Отже, оптимізація за напруженнями режимів теплового навантаження скляних тіл зводиться до задачі на умовний екстремум функції (13) при в'язях (12) і обмеженнях (7), (8), (10). Для розв’язання даної задачі можна використати методи нелінійного програмування, зокрема метод прямого пошуку за Хуком і Джівсом [6].

1. Бартенев Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М.: Стройиздат, 1960. – 283 с. 2. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка. – 320 с. 3. Сандитов Д.С., Бартенев Г.М. Физические свойства неупорядоченых структур. – М.: Наука, 1982, – 258 с. 4. Асташкін В.І. Моделювання і розрахунок фазового складу сталей при нерівномірному нагріві-охолодженні. – Львів, АН України. Фізико-механічний інститут. Препринт № 191. 1994. – 28с. 5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 319с. 6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 532с.

УДК 621.9.048.6

В.М. Боровець, В.О. Коломієць, О.В. Гаврильченко

ДИНАМІКА МОДЕЛІ РОБОЧОГО СЕРЕДОВИЩА У ВІБРАЦІЙНІЙ МАШИНІ ОБ`ЄМНОЇ ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ

In the present paper the mathematical model of the volume treatment vibration machine is investigated. The system of equations describing dynamics of the machine are received. The angular velocity of treating mixture and other parameters characterizing the working regime of the machine are calculated numerically arguments with a help of the software package MathCAD.

Об’ємна вібраційна обробка деталей внаслідок ряду її переваг є перспективним напрямком технології викінчувальної обробки.

Незалежно від конкретного способу реалізації, її ефект безпосередньо пов’язаний з взаємним рухом робочого середовища (РС) та оброблюваних деталей. Отже, вивчення руху РС є одним з основних завдань при аналізі роботи машин об’ємної обробки.

РС є складним об’єктом, що поєднує властивості сипучих абразивних матеріалів та в’язких рідин, тому строгий математичний опис його неможливий, і при вивченні динаміки доцільно застосовувати модельний підхід. Вибір моделі РС здійснюється з врахуванням характеру руху робочої камери (контейнера) машини і самого РС, його властивостей, способу введення деталей в робочий об’єм машини, їх просторового розташування тощо [1, 2].

Як показують дослідження [1, 2], об’ємна вібраційна обробка в більшості випадків здійснюється в робочій камері з завантаженням по об’єму $\eta_з$=0,6-0,75 (коефіцієнт заповнення $\eta_з = V_{рс}/V_к$).

Для РС в даному розрахунку приймаємо одномасну модель. Даний вибір моделі зумовлюється тим, що ефект обробки в машині з обкатником, яку ми розглядаємо, пов’язаний, в основному, з рухом певного “активного” шару, оскільки інша частина об’єму РС відіграє порівняно другорядне значення [3, 4]. Враховуючи те, що в багатьох випадках до складу РС входять рідкі компоненти, в даному розрахунку приймаємо, що РС має властивості в’язкої рідини, зберігаючи також певні властивості сипучого матеріалу.