

# АВТОМАТИЧНЕ ЖИВЛЕННЯ ТА СКЛАДАННЯ

УДК 621.867

О.В. Гаврильченко, В.О. Коломісць, В.В. Понятовський

## РОЗРАХУНОК КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

© Гаврильченко О.В., Коломісць В.О., Понятовський В.В., 2001

**An approximate solution of the nonlinear differential equation describing a motion of the surface of the vibration conveyor is given. The graphics dependences of acceleration, speed and migration of a surface of the conveyor are represented. The results obtained by numerical and analytical computational methods are compared.**

### Вступ

Використання як елементів пружності вібраційних транспортерів еластичних елементів дає змогу значно спростити конструкцію і налагодження вібраційних транспортерів на ефективні дорезонансні робочі режими і зменшити вплив маси транспортованих виробів на амплітуду коливань робочого органа вібраційного транспортера.

Математичний опис руху нелінійних осциляторів під впливом зовнішніх збурень досить складний і розв'язки отримані тільки для деяких часткових випадків. Складність її зумовлена неможливістю використання для нелінійних систем принципу суперпозицій [3] і тому отримання загального розв'язку підсумовуванням окремих розв'язків в даному випадку не можливе. Це також означає, що результуючий рух (загальний розв'язок) не отримується підсумовуванням власних коливань (загального розв'язку однорідного рівняння) і вимушених коливань (часткового розв'язку неоднорідного рівняння). Як і в лінійних системах, в даному випадку особливий інтерес становлять періодичні розв'язки не тільки завдяки їх порівняній простоті, але і в зв'язку зі значенням, яке мають подібні форми руху в техніці.

Наведено наближений розв'язок нелінійного диференціального рівняння, що описує рух робочого органа вібраційного транспортера з пружною системою на основі еластичних матеріалів. Розраховано прискорення, швидкості і переміщення робочого органа вібраційного транспортера. Проведено порівняння результатів, отриманих при чисельному розв'язуванні рівняння руху і аналітичному на основі методу Бубнова – Гальоркіна, за допомогою програмного забезпечення MathCAD.

### Модель вібраційного транспортера з пружною системою на основі еластичних елементів

Коливну систему з нелінійною жорсткістю розглянемо на прикладі вібраційного транспортера, в якому нелінійність досягається використанням як пружної системи підтиснутих еластичних елементів стиску з різними конструкційними властивостями (товщиною і модулями пружності).

Для проведення математичного моделювання і складання диференціального рівняння вимушених коливань системи з метою аналізу впливу конструктивних параметрів на закон руху робочого органа вібраційного транспортера, розглянемо математичну модель коливної системи з нелінійною жорсткістю.

На рис. 1 зображена модель вібраційного транспортера, яка містить: робочий орган, активну масу  $m_1$ , реактивну масу  $m_2$ , зв'язані з нерухою основою пружною системою з несиметричною нелінійною характеристикою, яку утворюють пружні елементи з різною товщиною та різними модулями пружності при їх затисненні між опорними поверхнями коливних мас і опорних вставок за допомогою пластин.

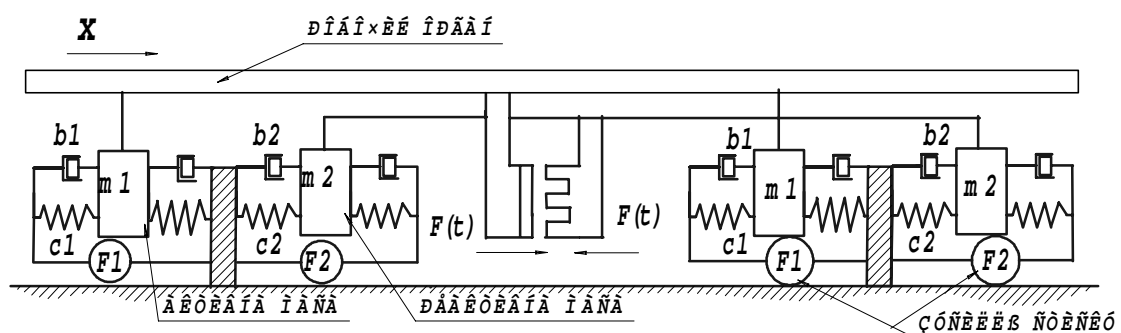


Рис. 1. Модель двомасного вібраційного транспортера з пружною системою на основі еластичних елементів

Узагальнена модель пружної опори зображена у вигляді пружно-в'язкого середовища Кельвіна [1]. Елементи з пружними і в'язкісними властивостями з'єднані паралельно. Пружна опора (рис. 1) складається з двох еластичних пластин, працюючих на стиск, кожна з яких характеризується коефіцієнтом опору і жорсткості. Підтискання пружних елементів, на рис. 1 зображено прикладеними зусиллями стиску  $F_1, F_2$ , дає змогу розглядати характеристику пружної опори узагальненими залежностями. Несиметрична нелінійна відновлююча характеристика пружних опор визначається коефіцієнтами  $c_1(x_1)$ ,  $c_2(x_2)$  жорсткості, які нелінійно залежать від амплітуди переміщення, і коефіцієнтами опору  $b_1(c_1, w)$ ,  $b_2(c_2, w)$ , залежними від відповідних жорсткостей і частоти дії вимушуючої сили. Під дією вимушуючого зусилля  $F(t)$ , яке діє одночасно на коливні маси системи, останні рухаються антифазно щодо напрямку переміщення  $x$  за законом  $x_1(t), x_2(t)$ .

### Метод розрахунку

Важливим питанням при розрахунках, пов'язаних з проектуванням вібраційних транспортерів з пружною системою на основі еластичних елементів, є аналіз впливу властивостей коливної системи (конструкційних параметрів) на закон руху робочого органа. Трудність становить розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, які описують динаміку транспортерів. Наближені розв'язки, отримані за допомогою методу гармонійного балансу [1], відповідають лінеаризації нелінійних диференціальних рівнянь, що може суттєво спотворити дійсну картину. Методи послідовних наближень Дюфінга і повільно змінних амплітуд Ван дер Поля [3] використовуються тільки в рівняннях з незначною нелінійністю, і для досягнення необхідної точності результатів вимагають трудомістких розрахунків. Тому для отримання наближених періодичних розв'язків нелінійних диферен-

ціальних рівнянь використовуємо варіаційний метод Бубнова – Гальоркіна [1], який є найпоширенішим з наближених методів інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь вимушених коливань.

Вказаний метод застосовуємо для розв’язування диференціального рівняння другого порядку

$$L(x) = F(t) \quad (1)$$

з граничними умовами  $x(t_0) = x(t_1) = 0$ .

Тут  $L(x)$  – диференціальний оператор

$$L(x) \equiv \ddot{x} + f(x, \dot{x}), \quad (2)$$

де  $f(x, \dot{x})$  – неперервна функція.

Вибираємо систему неперервних лінійно незалежних функцій на відрізку  $[t_0, t_1]$

$$W_1(x), W_2(x), \dots, W_k(x), \dots, \quad (3)$$

що задовольняють граничні умови  $W_k(t_0) = W_k(t_1) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Наближений розв’язок розглянутої граничної задачі будемо шукати у вигляді лінійної комбінації перших  $n$  функцій системи (3), де  $n$  – порядок оператора  $L$

$$x_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot W_i(t). \quad (4)$$

Стала складова виразу (4) – коефіцієнт  $a_0$  – враховується тільки при розв’язуванні диференціальних рівнянь з несиметричною нелінійною характеристикою [4], для інших випадків  $a_0 = 0$ .

Підставимо  $x_n$  у рівняння (2), і підберемо коефіцієнти  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) так, щоб функція

$$L\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot W_i(t)\right) - F(t)$$

була ортогональна на відрізку  $[t_0, t_1]$  кожної з функцій  $W_i(t)$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ L\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot W_i(t)\right) - F(t) \right] \cdot W_i(t) \cdot d(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Метод Бубнова – Гальоркіна для задач нелінійних коливань є прямим методом побудови наближеного розв’язку, що задовольняє відповідне диференціальне рівняння “в середньому” за цикл коливань.

### Наближений розв’язок нелінійного диференціального рівняння

Використаємо вказаний метод для знаходження розв’язку диференціального рівняння руху робочого органа вібраційного транспортера з пружною системою на основі еластичних елементів згідно з моделлю (рис. 1), яке в даному випадку будемо записувати у вигляді:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x \cdot (1 + \alpha \cdot x) = F(t), \quad (6)$$

де  $x$  – переміщення;  $m$  – маса робочого органа;  $b$  – коефіцієнт внутрішнього опору коливної системи;  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружної опори з лінійною характеристикою;  $\alpha$  – крєфіцієнт нелінійності;  $F(t) = F_0 \cdot \sin(w \cdot t)$  – залежність вимушуючої сили від часу.

Розділимо обидві частини рівняння (6) на  $m$  і отримаємо:

$$\ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + w_0^2 \cdot x \cdot (1 + \alpha \cdot x) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(w \cdot t), \quad (7)$$

де  $n = \frac{b}{2 \cdot m}$  – коефіцієнт затування коливань системи;  $w_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – власна частота коливань лінійної недисипативної системи.

Систему функцій  $W_i(t)$  виберемо у вигляді:

$$\{W_k(t)\} = \{\cos(k \cdot w \cdot t), \sin(k \cdot w \cdot t)\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Згідно з методом наближений розв'язок нелінійного диференційного рівняння (7) шукаємо у вигляді (4):

$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot \sin(w \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t), \quad (8)$$

де  $a_0, a_1, a_2$  – невідомі коефіцієнти.

Бігармонійний закон руху (8) містить дві гармоніки, причому перша відображає коливання лінійної системи, а друга – вплив нелінійності.

Значення коефіцієнта  $a_1$  дорівнює значенню амплітуди встановлених вимушених коливань робочого органа лінійної коливної системи (рівняння (7) при  $\alpha = 0$ ).

Згідно з [3] маємо:

$$a_1 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{4 \cdot n^2 \cdot w^2 + (w_0^2 - w^2)^2}}. \quad (9)$$

Значення коефіцієнтів  $a_0, a_2$  визначаємо за виразом (5), враховуючи (7), (8), (9) з системи рівнянь:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [-a_1 \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t) - 4 \cdot a_2 \cdot w^2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t) + \\ & + 2 \cdot n \cdot (a_1 \cdot w \cdot \cos(w \cdot t) - 2 \cdot a_2 \cdot w \cdot \sin(2 \cdot w \cdot t)) + \\ & + w_0^2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot \sin(w \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t) + \alpha \cdot (a_0 + a_1 \cdot \sin(w \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t))) - \\ & - A \cdot \sin(w \cdot t)] dt = 0 \\ & \int_0^{2\pi} [-a_1 \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t) - 4 \cdot a_2 \cdot w^2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t) + \\ & + 2 \cdot n \cdot (a_1 \cdot w \cdot \cos(w \cdot t) - 2 \cdot a_2 \cdot w \cdot \sin(2 \cdot w \cdot t)) + \\ & + w_0^2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot \sin(w \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t) + \alpha \cdot (a_0 + a_1 \cdot \sin(w \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t))) - \\ & - A \cdot \sin(w \cdot t)] \cdot \cos(2 \cdot w \cdot t) dt = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Обчислення інтегралів в рівняннях (10) приводить до системи:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1^2 + 2 \cdot \alpha \cdot a_0^2 + \alpha \cdot a_2^2 &= 0; \\ -2 \cdot w_0^2 \cdot a_2 + 8 \cdot w^2 \cdot a_2 - 4 \cdot w_0^2 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 + w_0^2 \cdot \alpha \cdot a_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

З кожного з рівнянь (11) визначаємо  $a_0$  і, прирівнявши одержані вирази, отримаємо рівняння четвертого ступеня відносно  $a_2$ .

Для коефіцієнтів  $a_0, a_2$  одержимо:

$$a_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{w_0^2 \cdot \alpha \cdot a_1^2 + 8 \cdot w^2 \cdot a_2 - 2 \cdot w_0^2 \cdot a_2}{w_0^2 \cdot \alpha \cdot a_2}, \quad (12)$$

– з другого:

$$a_2 = \frac{-\sqrt{2}}{12} \left( L + \sqrt{\frac{-1 \cdot (36 \cdot G^2 \cdot L + 12 \cdot E \cdot L + C^2 \cdot L + 24 \cdot C \cdot G \cdot L - 108 \cdot \sqrt{2} \cdot D \cdot G)}{G \cdot L}} \right), \quad (13)$$

де

$$L = \sqrt{\frac{36 \cdot G^2 + 12 \cdot E + C^2 - 12 \cdot C \cdot G}{G}};$$

$$G = \left( \frac{-1}{6} \cdot C \cdot E + \frac{1}{16} \cdot D^2 + \frac{1}{216} \cdot C^3 + N \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$N = \frac{1}{144} \cdot \sqrt{-768 \cdot E^3 + 384 \cdot E^2 \cdot C^2 - 48 \cdot E \cdot C^4 - 432 \cdot C \cdot E \cdot D^2 + 81 \cdot D^4 + 12 \cdot D^2 \cdot C^3}$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot w^4 - w_0^4 + 2 \cdot \alpha \cdot a_1^2 \cdot w_0^4}{w_0^4 \cdot \alpha^2}; \quad D = \frac{2 \cdot w^2 \cdot a_1^2}{w_0^2 \cdot \alpha}; \quad E = \frac{1}{8} \cdot a_1^4.$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$  в вираз (8) та обчисливши відповідні похідні, одержуємо закон руху, швидкість і прискорення робочого органа вібротранспортера.

### Динаміка моделі вібротранспортера

Одержаний вираз для переміщення робочого органа вібротранспортера використовуємо для аналізу моделі з параметрами:

$$m = 34 \text{ кг}, \quad F = 800 \text{ Н}, \quad c = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, \quad \alpha = 75 \text{ 1/м}, \quad w = 50 \text{ Гц}, \quad b = 300 \text{ Н/(м/с)}.$$

На рис. 2 зображені графіки часової залежності динамічних характеристик моделі. Криві для швидкості та прискорення відображають вплив нелінійності жорсткості, який виявляється у асиметрії цих кривих. Графічні залежності (рис. 2) також ілюструють негармонійність закону руху робочого органа вібраційного транспортера, що свідчить про можливість транспортування виробів по його поверхні [6].

Як було зазначено, отриманий результат є наближений і виникає питання про його достовірність і можливість використання для подальших проектних розрахунків, тому за допомогою програмного забезпечення MathCAD авторами було проведено порівняння результатів, отриманих за аналітичними залежностями і числовим розрахунком за методом Рунге – Кутта для наведених вище значень параметрів моделі. Для порівняння приводимо якісні графічні залежності переміщення і швидкості (рис. 3).

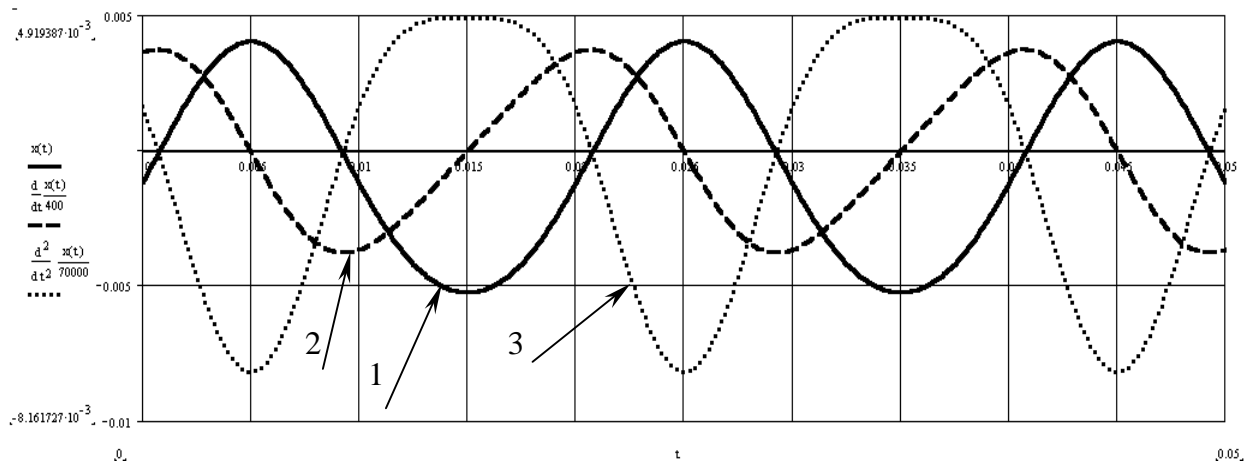
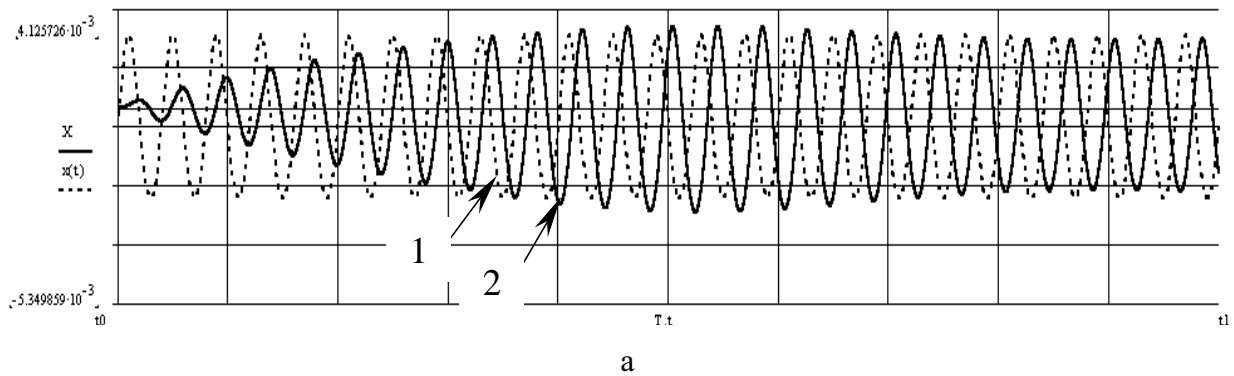
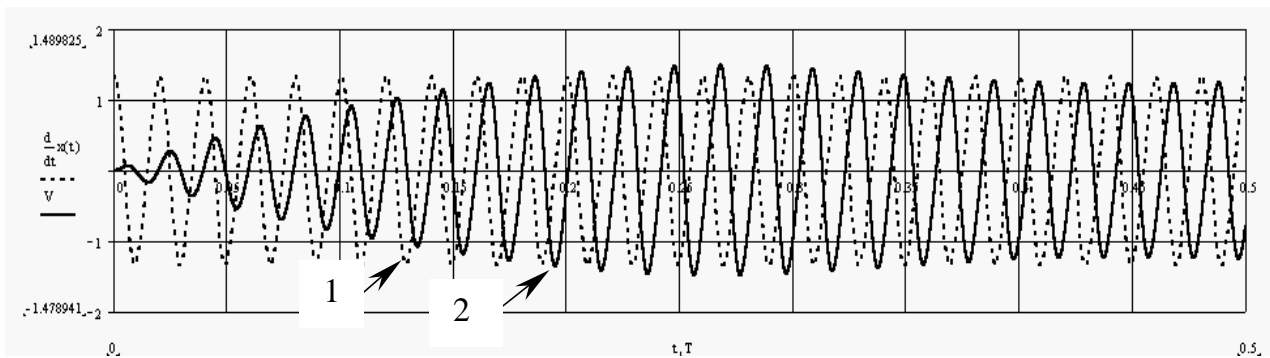


Рис. 2. Динаміка робочого органу вібраційного транспортера:  
1 – переміщення; 2 – швидкість; 3 – прискорення



а



б

Рис. 3. Порівняння результатів чисельного  
та наближеного аналітичного інтегрування рівняння (7):  
а – переміщення; б – швидкість:  
1 – згідно з виразом (8); 2 – чисельне інтегрування

Для перевірки точності розв'язку з одержаними значеннями коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2$  виконано числове розв'язування рівняння (7). Графіки для переміщення та швидкості, одер-

жані з числового розрахунку та за допомогою виразу (8), наведені на рис. 3. Бачимо, що незначна відмінність значень цих величин спостерігається упродовж кількох перших періодів коливання, і далі стає несуттєвою. Отже, вираз (8) може бути використаний для аналізу руху моделі, що створює суттєву зручність порівняно з числовими результатами.

1. *Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.). – М., 1987. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И.Блехмана. – 1987. – 351 с.* 2. *Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М., 1971. – 240 с.* 3. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. Г.Ю. Джанелидзе и Д.Р. Меркина. – М., 1973. – Т. 3 (специальные главы механики). – 488 с.* 4. *Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М., 1960.* 5. *Повидайло В.А., Лопушенко В.В., Щигель В.А. Динамика бигармонического вибрототка с учетом влияния движущихся заготовок // Автоматизация технолог. процессов в машиностроении и приборостроении. – 1968.* 6. *Блехман И.И. Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М., 1964.*

УДК 621.891

Б.В. Гупка

## ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ НАДІЙНОСТІ І ДОВГОВІЧНОСТІ ШНЕКОВИХ МЕХАНІЗМІВ МАШИН

© Гупка Б.В., 2001

**A number of design and technological measures for raising wear-resistance of working elements of screw-conveyer mechanisms is suggested. The constructions of stands for comparative study and given.**

Основними робочими і розвантажувально-навантажувальними органами машин і механізмів є шнекові механізми. Їх питома вага як транспортних машин становить у середньому 40–45 %

У машинобудуванні гвинтові подаючі пристрої широко використовуються як транспортні робочі органи транспортно-технологічних систем автоматичних ліній потоково-механізованих та інших комплексів при виготовленні і складанні різноманітних деталей та вузлів.

Основними конструктивними параметрами транспортно-технологічних систем є спіралі шнеків. Особливості технологічних процесів виготовлення гвинтових деталей зумовлені їх геометричною формою і засобами механізації та автоматизації. Поверхня гвинтової заготовки належить до складних гелікоїдальних поверхонь і на площину без деформацій не проектується.

Тому питання відпрацювання на технологічність конструкції гвинтових стрічок пов'язано з механізацією і автоматизацією їх виготовлення, з їх надійністю та довговічністю.

Під час роботи цих механізмів з шнековими робочими органами інтенсивно зношується периферійна частина гвинтової спіралі. Це відбувається з двох причин. По перше, периферія спіралі найбільш активно взаємодіє з матеріалом, який транспортується; по друге, під час виготовлення вона підлягає найбільшій деформації, що викликає утворення розрихленого шару металу з пониженою стійкістю до зношування.