

## КАРТОГРАФІЯ

Х.В. Бурштинська

Національний університет “Львівська політехніка”

### ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПОБУДОВИ ЦИФРОВИХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЄФУ З ВИКОРИСТАННЯМ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

© Бурштинська Х.В., 2001

Рассматриваются математические модели для цифрового моделирования рельефа, которые базируются на использовании: полиномов, мультиквадриков, сплайнов, среднего весового, весовых функций, случайных функций и метода Крайгинга. С целью исследования различных функций для аппроксимирования рельефа применялся картометрический метод построения ЦМР. На основании анализа средних квадратических ошибок определения отметок 560 точек сделан вывод о предпочтительном использовании метода Крайгинга с экспоненциальным, линейным или сферическим типом вариограммы. Высокую точность для построения ЦМР обеспечивает также применение метода триангуляции.

This paper considers the mathematical model for digital modeling of relief which is based on using power polynomials, multiquadrics, splines, average-weight, weighted functions and Kriging method. For the research purpose of various functions for approximation of relief is applied cartometric method DEM creating. The analysis based on the standard deviation of the definition of the 560 height points it can be concluded that the Kriging method with exponential, linear or sphere type of variogram is preferred. The high accuracy of DEM creating may also provide to applicate the method of triangulation.

Широке застосування цифрових моделей рельєфу (ЦМР) для вирішення топографо-геодезичних завдань, а також використання їх як основи для створення геоінформаційних систем різного призначення зумовило потребу різносторонніх досліджень їх побудови.

Основними методами отримання вихідної інформації для побудови ЦМР є геодезичний, фотограмметричний та картометричний методи; оброблення інформації, її перетворення з метою отримання результатів, їх оптимізацію, подальше зберігання ЦМР здійснюють на комп'ютері.

Однією із проблем створення ЦМР є математичний опис рельєфу, тобто створення математичної моделі рельєфу.

Розрізняють інтерполяцію та апроксимацію рельєфу. Інтерполяція передбачає використання певної, наперед заданої функції, значення якої відоме в деяких точках поверхні, і отримання значення функції у будь-яких проміжних точках. Апроксимація – заміна реальної поверхні математичною, описаною певними функціями під заданими умовами. Невідому функцію апроксимують підбирають, враховуючи ці умови. Апроксимація, як наближення поверхні функцією, – поняття ширше, і інтерполяцію можна розглядати як частковий випадок апроксимації.

Від методів апроксимування поверхні залежить точність побудови цифрових моделей рельєфу. Тому, зважаючи на способи задання вихідної інформації про рельєф, в результаті математичного моделювання поверхні рельєфу необхідно забезпечити мінімальні відхилення математичної моделі і реальної земної поверхні не лише в точках, що задають рельєф (вузлах вихідної інформації), але й між ними.

Аналіз спеціальної літератури [2, 10, 12, 14] дає підстави основні методи апроксимації розділити на принципово відмінні групи: перша – передбачає для моделювання рельєфу використовувати аналітичні функції, друга – базується на використанні функцій, що враховують статистичні характеристики рельєфу.

До першої групи методів математичного моделювання належать методи, базовані на застосуванні:

- степеневих поліномів;
- мультіквадриків;
- сплайнів;
- середнього вагового;
- вагових функцій;

До статистичних методів належать:

- метод випадкових функцій;
- метод Крайгінга.

Використовується також класифікація, за якою методи поділяють на глобальні, якщо до апроксимації (інтерполяції) залучають всі дані, і кусочні, які передбачають використання найближчих точок до визначуваної.

### Апроксимація степеневими поліномами

Метод поліномів зручний для апроксимування рельєфу тим, що наблизити поверхню можна, використовуючи поліном низького степеня, використовуючи невелику кількість вихідних точок, що є суттєвим чинником при польових методах отримання вихідної інформації; легко здійснювати оцінку точності апроксимації.

Апроксимування з використанням степеневих поліномів полягає в заміні вихідної функції поліномами  $P_k(x_i, y_i)$  степеня  $k$ :

$$z_i = P_k(x_i, y_i) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{k-r} a_{rs} x_i^r y_i^s, \quad (1)$$

$r = 0, 1, \dots, k$ ;  $s = 0, 1, \dots, k - r$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  – кількість вихідних точок.

Коефіцієнти  $a_{rs}$  визначають із рішення системи похибок:

$$AX - L = V, \quad (2)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & x_1^r y_1^s \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & x_2^r y_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & \dots & x_n^r y_n^s \end{pmatrix};$$

$$X^T = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{rs}];$$

$$L^T = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_n].$$

Якщо кількість вихідних точок перевищує кількість невідомих  $a_{rs}$ , то вони визначаються методом найменших квадратів із умови

$$\sum_{i=1}^n [z_i - \sum a_{rs} x_i^r y_i^s]^2 = \min. \quad (3)$$

Для знаходження відмітки  $k$ -ї точки невідомі  $a_{rs}$  підставляють в рівняння типу (1) для  $k$ -ї точки.

Залежно від величини відстаней між точкою, що визначається, і вихідними точками можуть враховуватися ваги. Для визначення ваг запропоновано [2] такі формули:

$$\begin{aligned} p &= (1-r)^2 / r^2, \\ p &= 1/r^2, \\ p &= 1-0,9r^2, \\ p &= \exp(ar^2), \\ p &= 0,9(1-r^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Як аргумент у формулах (4) використовують:

$$r = R_k / R_0,$$

де  $R_k$  – радіус до вихідної точки;  $R_0$  – радіус зони пошуку.

Вибір степеня апроксимаційного полінома є проблемою складною. В більшості задач, пов'язаних з апроксимацією поверхні, використовують поліноми 2 – 3 степеня. За використання поліномів вищих степенів функція на краях осцилює і помилки апроксимації можуть досягати значних величин. Використовуючи степеневі поліноми у способі кусочно-змінної поверхні, отримують значні розходження в оцінці результатів апроксимації суміжних ділянок. В сучасних апроксимаційних методах поліноми використовують найчастіше для визначення тренда із наступним додатковим наближенням поверхні за іншою апроксимаційною функцією.

### Мультиквадриковий метод

Суть цього методу [2, 10] полягає у підсумовуванні поверхонь, за якими топографічна поверхня апроксимується сумою часткових квадрик:

$$z_i = \sum_{j=1}^n c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i), \quad (5)$$

де  $i$  – деяка точка топографічної поверхні;  $c_j$  – коефіцієнти, що характеризують властивості поверхні;  $q(x_j, y_j, x_i, y_i)$  – квадрика точки.

Якщо як апроксимуючу поверхню вибирають гіперболоїд, тоді квадрика має вигляд:

$$q(x_j, y_j, x_i, y_i) = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + B]^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

де  $B$  – невідомий параметр, значення якого залежить від розмірів ділянки і геоморфологічних особливостей рельєфу, його можна підбирати на основі статистичних досліджень.

Параметр  $B$  часто визначають за формулою:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]}{n(n+1)}, \quad (7)$$

де  $n$  – кількість опорних точок.

В логарифмічному мультиквадрику квадратики запишеться:

$$q(x_j, y_j, x_i, y_i) = \ln \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Для визначення мультиквадрикової поверхні необхідно знайти коефіцієнти  $c_j$ . Для цього використовують координати  $(x_j, y_j, z_j)$  опорних точок. У результаті отримують систему з  $n$  рівнянь з  $n$  невідомими  $c_j$ :

$$z = Q \cdot c, \quad (9)$$

де  $z$  – вектор  $n$  відміток вихідних точок;  $Q$  – матриця розміром  $n \times n$ , елементами якої є квадратики опорних точок;  $c$  – вектор невідомих:

$$c = Q^{-1} z. \quad (10)$$

Тоді вектор  $z'$  для  $k$  визначуваних відміток точок запишемо:

$$z' = Q' Q^{-1} z, \quad (11)$$

де  $Q'$  – матриця розміру  $k \times n$ , елементами якої є квадратики між опорними та визначуваними точками.

Предметом дослідження є вид квадратики залежно від типу апроксимаційної поверхні.

### Метод сплайнів

До основних переваг сплайн-наближень належать:

- стійкість сплайнів відносно локального мікрорельєфу, тобто поведінка сплайна у околі точки не відбивається на поведінці сплайна в цілому, як, наприклад, це спостерігається за поліноміальною апроксимацією;

- хороша збіжність сплайн-інтерполяції.

Сплайн-інтерполяція [1, 7, 8, 9] базується на розв'язання такої задачі: якщо на відрізку  $[a: b]$  у вузлах  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  задані значення  $f(x_i) = z_i$ , то лінеаризований сплайн  $f(x)$  є функцією, для якої інтеграл:

$$\int_{x_1}^{x_n} (f''(x))^2 dx \quad (12)$$

має мінімальне значення. Оскільки поверхня Землі не має розривів, то функція  $f$ , яка її апроксимує, повинна бути неперервною на досліджуваній ділянці  $[x_1; x_n]$ . Доведено, що така функція має властивості мінімальної кривини. Кубічний сплайн найгладша з функцій, якими інтерполюють задані точки спряженими кубічними многочленами, у місцях спряження (вузлах) перша і друга похідні неперервні. Оскільки у кожній з кубічних кривих чотири параметри, а для " $n$ " точок необхідно  $(n-1)$  таких кривих, то загальна кількість параметрів буде  $(4n - 4)$ . Те, що  $f(x_i) = z_i$ , для кожного з  $n$  вузлів дає  $n$  умов для  $f$ . Необхідно визначити ще дві умови для однозначного визначення сплайн-функції. Якщо прийняти, що  $f''(x_1) = f''(x_n) = 0$ , то це визначить кубічний сплайн.

Для стабілізації сплайна часто використовують умову, щоб кубічні криві проходили через чотири перші і чотири останні задані точки. Тоді систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими запишемо:

$$\begin{vmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & \\ & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_1 : \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3}^{(3)} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

У цій системі:  $\sigma_i$  – невідомі; елементи матриці коефіцієнтів і вільних членів визначаються із співвідношень:

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i; \\ \Delta_i &= (z_{i+1} - z_i)/(x_{i+1} - x_i); \\ \Delta_i^{(2)} &= \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{x_{i+2} - x_i}; \\ \Delta_i^{(3)} &= \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Матриця коефіцієнтів має такі властивості:

а) матриця тридіагональна;

б) матриця симетрична;

в) за будь-якого вибору  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  матриця не вироджена і діагонально домінуюча.

З пункту (в) випливає, що завжди існує єдине рішення. Гауссове виключення приводить цю систему до верхньої трикутної форми:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & h_1 & 0 & & \\ & \alpha_2 & h_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \alpha_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{vmatrix}, \quad (15)$$

де  $\alpha_i$  визначають за формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -h_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_i &= 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}^2}{\alpha_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= -h_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$\beta_i$  визначають із співвідношень:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_i &= (\Delta_i - \Delta_{i-1}) - \frac{h_{i-1} \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\beta_n = -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3}^{(3)} - h_{n-1} \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

Коефіцієнт  $\sigma_i$  можна визначити оберненою підстановкою:

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n},$$

$$\sigma_i = \frac{\beta_i - h_i \sigma_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad . \quad (18)$$

Обраховуються коефіцієнти  $b_i, c_i, d_i$ .

$$f(x) = z_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Для кожного інтервалу  $[x_i; x_{i+1}]$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$  ці коефіцієнти визначають за формулами:

$$\left. \begin{aligned} b_i &= \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \\ c_i &= 3\sigma_i \\ d_i &= \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (19)$$

Наближення функцій сплайнами надається для гладких функцій. В [8] вказано, що якщо функція різко змінюється, то сплайн-інтерполяція не гарантує точності.

### Метод середнього вагового

За цим методом відмітку  $k$ -ї точки поверхні, на якій задані  $n$  вихідних точок з відповідними відмітками  $z_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , знаходять із залежності:

$$z_k = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{S_{ik} r}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{S_{ik} r}}, \quad (20)$$

де  $S_{ik}$  – відстань між визначуваною та вихідними точками (рис. 1). найчастіше  $r = 1, 2$ .

Із літератури [12] відомо, що цей метод використовують як найпростіший, він не вимагає значних обчислювальних зусиль.

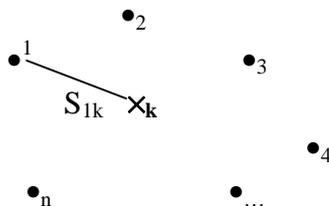


Рис. 1. Принцип знаходження відміток точок за методом середнього вагового

Метод не позбавлений недоліків, а саме: він може призводити до двозначних розв'язків, якщо невідомі топографічні характеристики поверхні; на результати суттєво впливає нерівномірний розподіл вихідних даних.



Вагові функції знаходимо для кожної з  $n$  вихідних точок. Тоді відмітка інтерполяційної точки запишеться:

$$z_i = f^T F^{-1} z. \quad (30)$$

### Метод випадкових функцій

Цей метод близький до методів апроксимації за допомогою вагових функцій, але є більш загальним і заснований на статистичній обробці даних.

Для апроксимації використовують функцію вигляду:

$$\text{cov} = (1 - f) e^{-\frac{S^2}{m^2}}, \quad (31)$$

де  $f$  – фільтрувальний параметр, який описує різницю між дисперсією і коваріацією, яка залежить від відстані  $S$  між точками;  $m$  – масштабний фактор.

Апроксимаційна поверхня в околі точки  $k$  описується формулою:

$$z_k = c^T C^{-1} z, \quad (32)$$

де  $C$  – коваріаційна матриця розміру  $n \times n$ , елементами якої є коваріації між вихідними точками;  $c^T$  – вектор коваріацій між вихідними і визначуваною точками;  $z$  – вектор  $n$  вихідних точок.

В ряді робіт [1, 12, 14], які розглядають проблему апроксимації рельєфу, запропоновано виділити систематичну і статистичну (випадкову) складові. Однак слід зауважити, що часто оптимізація процесу не є простою через умовність поділу поверхні на систематичну і випадкову складові. Практично систематичну частину рельєфу апроксимують поліномом невеликого степеня (першого, другого), а апроксимування здійснюють за допомогою мультіквдриків або випадкових функцій.

Тоді новий вектор відміток вихідних точок запишемо:

$$z' = z - z_p, \quad (33)$$

де  $z_p$  – відмітки точок, отримані після апроксимації поліномом.

Використовуючи для апроксимування випадкові функції, вектор поправок до відміток визначуваних точок запишемо:

$$u = c' C^{-1} z', \quad (34)$$

де  $u$  – невідомий вектор розміру  $k \times 1$  поправок до відміток визначуваних точок;  $z'$  – вектор розміру  $n \times 1$  різниць відміток опорних точок з урахуванням апроксимації за поліномом, визначений за (33);  $c'$  – матриця розміру  $k \times n$ , елементами якої є коваріації між визначуваними і вихідними точками;  $C$  – матриця розміру  $n \times n$  коваріацій між вихідними точками.

Після визначення вектора  $u$  значення вектора невідомих запишеться:

$$z = z_p + u. \quad (35)$$

### Метод Крайгінга

До статистичних методів належить широко вживаний метод Крайгінга. В цьому методі оцінку відмітки точки визначають із залежності (21).

Ваги знаходять на основі статистичних характеристик поверхні. Для цього будують варіограму [3, 4, 5, 6, 11], попередньо отримавши дисперсію та коваріації поля.

Дисперсію отримують за відхиленнями відміток від середнього значення  $M_Z$ :

$$K(o) = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - M_Z)^2}{n}. \quad (36)$$

Очевидно, що вплив віддалених від визначуваної точки є меншим, ніж вплив точок, розташованих ближче. Ступінь впливу може залежати і від напрямку. Щоб виразити цю залежність, вводять вектор відстані  $h$ , який має визначену орієнтацію.

Ступінь залежності між точками, які лежать на заданій відстані  $h = \Delta j$  ( $j$  – ціле позитивне число) та у заданому напрямку виражається коваріацією

$$K(h) = K(\Delta j) = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - M_Z)(Z_{i+j} - M_Z)}{n}. \quad (37)$$

Напівдисперсія визначається як половина дисперсії різниці  $Z_{(i+j)} - Z_{(i)}$

$$\gamma(h) = \gamma(\Delta j) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \{Z_{(i+j)} - Z_{(i)}\}^2, \quad (38)$$

$Z_{(i+j)}, Z_{(i)}$  – відхилення відміток від середнього значення,

або

$$\gamma(h) = K(0) - K(h). \quad (39)$$

Якщо вектор  $h$  стає більшим,  $K(h)$  буде зменшуватися, а напівдисперсія змінюватися від нуля за  $h=0$  до  $K(0)$  за великого значення  $h$ . Ці співвідношення показано на варіограмі (рис. 2).

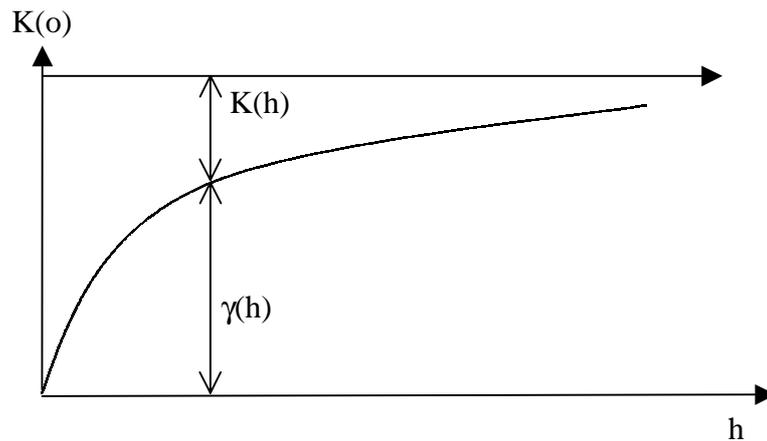


Рис. 2. Варіограма

Оскільки для побудови варіограми використовують статистики, отримані за обмеженої кількості даних, як і те, що навіть після вилучення тренда залишкові відхилення відміток вузлових точок не відповідають умовам стаціонарності, реальні варіаційні криві не збігаються з її ідеальним зображенням на рис. 2.

В спеціальній літературі вказано [4, 5, 6], що підбір функції для апроксимування варіограми належить до спеціального дослідження.

Нами досліджувались експоненційна, сферична, квадратна, лінійна функції, а також функція, проведена з використанням способу найменших квадратів.

Із варіограми отримують коефіцієнти і вільні члени рівнянь, із розв'язку яких знаходять ваги.

$$\sum_{i=1}^n w_i \gamma_{(z_i - z_j)} = \gamma_{(z_i - z_k)} - \lambda \quad (40)$$

або

$$\begin{bmatrix} \gamma_{(z_i-z_j)} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{(z_i-z_k)} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Значення  $\gamma$  беруть з варіаційної кривої, невідомими є  $w_i$  і  $\lambda$ .

В методі Крайгінга для отримання незміщеної оцінки відмітки точки до системи рівнянь дописують рівняння

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1. \quad (42)$$

З розв'язку отримують ваги  $w_i$ , з якими відмітки вихідних точок входять у відмітку визначуваної точки, і коефіцієнт  $\lambda$ , який служить для оцінки точності розв'язання.

### Експериментальні дослідження

В сучасних інформаційних технологіях широко використовують пакет Surfer, в якому реалізовано більшість із вказаних методів апроксимування рельєфу, однак рекомендаційні висновки щодо методів апроксимації залишаються неповними через громіздкість експериментів.

В проведених експериментальних роботах брав участь студент О. Гаврилов.

Для дослідження різних методів апроксимації використано картометричний метод отримання вихідної інформації. З цією метою відскановано ділянку розміру 16 см  $\times$  35 см карти масштабу 1:2000 з перерізом рельєфу 1 м. Рельєф ділянки – рівнинно-горбистий, перевищення – 25 м; ділянка містить частини з пологими схилами, кутами нахилу  $\alpha$  до  $5^\circ$ ; крутими зрізаними ярами,  $\alpha > 10^\circ$  та рівнинними біля русла ріки із добре вираженим мікрорельєфом,  $\alpha < 1^\circ$ .

Для сканування використано сканер з роздільною здатністю 300 dpi; зображення отримано у монохроматичному напівтоновому режимі.

На карті набрано також характерні точки, а також додаткові точки в місцях із значним закладенням горизонталей.

Для оцінювання точності на карті було розбито тестову сітку розміру 1 см  $\times$  1 см, відмітки вузлів якої отримано з інтерполювання горизонталей з середньою квадратною помилкою за даного рельєфу  $\approx 0,04 - 0,1$  м залежно від закладення горизонталей.

У пакеті Surfer відцифровано горизонталі, характерні точки і відмітки тест-сітки та сформовано два файли: для побудови ЦМР і для оцінювання точності.

Побудова ЦМР здійснювалась з використанням усіх наявних у пакеті методів апроксимації рельєфу та усіх способів задання вихідних точок для апроксимації: нормальне розташування, квадрант, октант.

Задаючи нормальне розташування вихідних точок, апроксимація проводиться за найближчими точками до визначуваної (задають мінімальну кількість точок). З використанням розташування точок у квадрантах задають мінімальну загальну кількість точок, мінімальну кількість точок у квадранті та кількість квадрантів (1-4); аналогічно задають інформацію, використовуючи октант. За різницями між побудованими в пакеті регулярними ЦМР та тест-сіткою отримано середні квадратні помилки (див. таблицю).

## Оцінка точності побудови ЦМР

Метод апроксимації	Розташування точок	Тип варіограми	m <sub>1</sub> , м	m <sub>2</sub> , м	m <sub>3</sub> , м
середнє вагове	нормальне		0,30	0,29	0,36
	квадрант		0,27	0,26	0,31
	октант		0,26	0,26	0,31
крайгінг	нормальне	експоненційна	0,27	0,27	0,29
	квадрант		0,25	0,25	0,27
	октант		0,25	0,25	0,27
	нормальне	гауссова	0,34	0,33	0,36
	квадрант		0,32	0,30	0,31
	октант		0,29	0,29	0,31
	нормальне	лінійна	0,30	0,27	0,27
	квадрант		0,26	0,25	0,27
	октант		0,25	0,25	0,26
	нормальне	квадратична	0,30	0,28	0,31
	квадрант		0,26	0,26	0,27
	октант		0,25	0,25	0,26
	нормальне	раціональна квадратична	0,36	0,36	0,37
	квадрант		0,32	0,32	0,23
	октант		0,30	0,29	0,32
	нормальне	сферична	0,28	0,27	0,27
	квадрант		0,26	0,25	0,26
	октант		0,25	0,25	0,26
мультиквадрик	нормальне		0,32	0,30	0,32
	квадрант		0,27	0,26	0,28
	октант		0,26	0,26	0,27
мультилогарифм	нормальне		0,32	0,30	0,32
	квадрант		0,28	0,27	0,29
	октант		0,25	0,25	0,27
інверсійний мультиквадрик	нормальне		0,34	0,30	0,32
	квадрант		0,30	0,30	0,31
	октант		0,28	0,29	0,31
кубічний сплайн	нормальне		0,41	0,39	0,43
	квадрант		0,40	0,38	0,41
	октант		0,38	0,38	0,39
сплайн поверхні	нормальне		0,38	0,36	0,40
	квадрант		0,36	0,34	0,38
	октант		0,34	0,33	0,36
метод Шепарда	нормальне		0,59	0,58	0,60
	квадрант		0,53	0,53	0,57
	октант		0,49	0,48	0,52
метод мінімальної кривизни			0,56	0,52	0,57
триангуляція			0,27	0,26	0,26

В таблиці подано:  $m_1$  – середня квадратна похибка побудови ЦМР за 10-ма вихідними точками, отриманими із сканування горизонталей;  $m_2$  – за 10-ма вихідними точками із додатковими точками;  $m_3$  – за 30-ма вихідними точками із залученням додаткових точок. Кількість точок для оцінки точності – 560.

Аналіз отриманих результатів дає змогу зробити висновок, що збільшення кількості вихідних точок для апроксимації погіршує результат. Це пояснюється тим, що за 30-ти вихідних точок радіус зони пошуку збільшується. Покращує точність у всіх методах задання вихідної інформації за квадрантом чи октантом (в останньому випадку точність майже не змінюється), це пов'язано із виключенням екстраполяції, що має місце за нормального розташування точок (напр., вихідні точки належать одній горизонталі). Найкращі результати апроксимації при застосуванні різних методів отримані з використанням методу Крайгінга, тип варіограми – експоненційна, лінійна або сферична. Ідентичні результати ( $m = 0,27-0,26$  м) отримані з використанням тріангуляції як методу побудови ЦМР. Дещо нижчої точності досягнуто при апроксимуванні поверхні сплайнами ( $m = 0,33-0,41$  м). Найнижчу точність ( $m = 0,5-0,6$  м) отримано з апроксимації методами Шепарда та мінімальної кривини, які не розв'язують апроксимаційних задач з високою точністю.

Із проведеного аналізу випливає, що статистичні методи апроксимування рельєфу внаслідок урахування статистичних особливостей за складного типу рельєфу є пріоритетним для побудови ЦМР.

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уоли Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*. – М.: Мир, 1972. – 316 с. 2. Бойко А.В. *Методы и средства автоматизации топографических съёмок*. – М.: Недра, 1980. – 222 с. 3. Буришинська Х.В., Тумська О.В. *Дослідження точності методу Крайгінга при побудові цифрових моделей рельєфу*. – 10с. – Деп. № 2097, Ук-92 30.12.92. 4. Буришинська Х., Тумська О., Лелюх Д. *Застосування кореляційно-спектрального аналізу для вибору інтервалу при побудові цифрової моделі рельєфу // Мат. 2-ї Міжнародної науково-практичної конференції "Кадастр, фотограмметрія, геоінформатика - сучасні технології і перспективи розвитку". Львів-Краків, 2000. – С. 98 – 102.* 5. Давид М. *Геостатистические методы при оценке запасов руд*. – Л.: Недра, 1980. – 360 с. 6. Девис Дж. *Статистика и анализ геологических данных*. – М.: Мир, 1997. – 571 с. 7. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Я. *Методы сплайн-функций*. – М.: Наука, 1989. – 352 с. 8. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. *Сплаины в инженерной геометрии*. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с. 9. Калиткин Н.Н. *Численные методы*. – М.: Наука, 1978. – 512 с. 10. Лобанов А.Н., Журкин И.Т. *Автоматизация фотограмметрических процессов*. – М.: Недра, 1980. – 240 с. 11. Burshtynska Kh., Tumska O., Lelukh D. *Computer Technology of Determination of Area of Digital Elevation Model. 19<sup>th</sup> ISPRS Congress, Amsterdam. 2000. Vol. XXXIII Work. Gr IV, – P. 148 – 154.* 12. N. Siu-Ngan Jam. *Spatial Interpolation Methods: A Review. The American Cartographer. 1983. Vol. 10. – № 2. – P. 129 – 149.* 13. Wild E. *Interpolation with weigt-functions – a general interpolation method. Int. Ach. Photogramm. 14<sup>th</sup> Congr., Hamburg. 1980. – Vol. 23, Part B 3, Comiss. 3. – P. 780 – 793.* 14. Wysocki J. *Aproksymacja powierzchni terenu w opracowaniach warstwicznych metodami komputerowymi // Міжвід. наук. техн. зб. 1997.– Вип. 58. – С. 228 – 234.*