УДК 623.4.023.4:623.4.028

В. М. Корольов
ЛНДРТІ

ВАРІАНТ ФІЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ОТРИМАННЯ ОЦІНОК КОМПОНЕНТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Предложен вариант алгоритма фильтрации по Калману с использованием разложения фазового вектора динамической системы по собственным векторам переходной матрицы, позволяющий значительно сократить объем вычислений. Сделаны выводы.

There are proposed the variant of filtration after Kalman with using of phase decay of dynamic system vector by own vectors transitive matrix, which allows to decrease noticeably the amount of computation. The conclusions are completed.

Комплексна обробка навігаційної інформації (НІ) на базі фільтра Калмана потребує, через громіздкість алгоритму, проведення великої кількості обчислювань.

З метою зменшення обчислювальних витрат, при збереженні точності, побудуємо алгоритм для фільтрації складових фазового вектора системи при розкладі його за векторами базису приєднаного векторного простору перехідної матриці. Позначимо через Φ_k перехідну матрицю різницевого аналога системи диференційних рівнянь, які описують динамічну систему.

Розглянемо випадки, коли перехідна матриця Φ_k, для всього проміжку, який ми розглядаємо, має “ g ” різних власних чисел $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, \ldots, g)$, а, відповідно, і “ g ” лінійно-незалежних власних векторів [1].

Позначимо їх через $\{\bar{e}_i\}$ $(i = 1, \ldots, g)$.

Оскільки вектори $\{\bar{e}_i\}$ лінійно незалежні, їх можна прийняти за базис простору станів динамічної системи, яку ми розглядаємо.

Відмітимо, що мова йде про якийсь “часовий розріз” простору станів. В загальному випадку власні числа і відповідні власні вектори будуть функціями від часу і, значить, базис в просторі станів з плином часу буде мінятися.

Розклавши фазовий вектор $\hat{\bar{x}}_k$ системи на k-му кроці за часом по векторах базису, одержимо:

$$\hat{\bar{x}}_k = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \bar{e}_i \,, \tag{1}$$

де α_i – коефіцієнти розкладу; $\hat{\bar{x}}_k$ – вектор оцінки на k-му кроці.

Подано вектор спостереження у вигляді лінійної комбінації базисних векторів простору станів.

Як правило, розмірність вектору спостереження менше розмірності фазового вектору, тобто не всі його компоненти можуть бути спостережені. Для повноти розглянемо два випадки.

Випадок перший: $r = g$ (тут і далі r – розмірність вектору спостереження).

Розклад вектора $\overline{Z}_k$ буде мати вигляд:

$$\overline{Z}_k = \sum_{i=1}^{g} \beta_i \overline{e}_i \quad , \tag{2}$$

де β_i – коефіцієнти розкладу.

Випадок другий: $r < g$.

Доповнимо r– мірний вектор $\overline{Z}$ до g– мірного нульовими компонентами і розв'яжемо систему (2) відносно (β_i).

Цей спосіб пошуку $\{\beta_i\}$ не економічний тому, що потребує розв‘язання системи " g " рівнянь з " g " невідомими.

Виділимо з $\{\overline{e}_i\}$ " r " таких векторів, які при відкидуванні " $g-r$ " останніх компонент становлять базис r-мірного векторного простору. Для цього необхідно знайти сукупність векторів базису $\{\overline{e}_i\}$, у яких матриця складена з " r " перших компонент, виявилася би невиродженою.

Вектори із сукупності $\{\overline{e}_i\}$, які відповідають цій умові, після відкидання останніх " $g-r$ " компонент, приймаємо за базис простору спостереження.

Позначимо їх через $\{\overline{e}_i'\}$ $e = 1,\ldots,r$

Запишемо розклад вектору спостереження $\overline{Z}_k$ по векторам базису $\{\overline{e}_i'\}$ у вигляді

$$\overline{Z}_k = \sum_{e=1}^{r} \beta_e' \overline{e}_e' , \tag{3}$$

де $\overline{\beta}_e'$ – коефіцієнти розкладу.

Розв'язок системи лінійних рівнянь (3) дає змогу одержати значення $\overline{\beta}_e'$ $(e = 1,\ldots,r)$.

Тепер розклад вектору спостереження $\overline{Z}_k$ по векторах базису $\{\overline{e}_i\}$ можна вживати у вигляді (2). При цьому враховується, що перші r координат $\overline{Z}_k$ є значення $\overline{\beta}_e'$ $(e = 1,\ldots,r)$, а до розмірності " g " він доповнюється нульовими координатами.

Розглянемо співвідношення для визначення оцінки фазового вектора x системи на " $k+1$ " кроці по часу $\hat{\hat{x}}_{(k+1)}$ у вигляді [2], який використовується звичайно в калманівських алгоритмах фільтрації:

$$\hat{\hat{x}}_{(k+1)} = \Phi(k+1)\cdot \hat{x}(k) + K(k+1)\cdot \left[Z(k) - H(k)\cdot \hat{x}(k)\right], \tag{4}$$

де $\Phi(k+1)$ – перехідна матриця динамічної системи, $K(k+1)$ – матричний коефіцієнт підсилення, $H(k)$ – матриця спостережень.

Підставимо співвідношення (2) і (3) в (4), одержимо

$$\hat{\hat{x}}_{(k+1)} = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \lambda_i \overline{e}_i + K(k+1)\left(\sum_{i=1}^{g} \beta_i \overline{e}_i - \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \lambda_i \overline{e}_i \right). \tag{5}$$

Останнє співвідношення значно простіше ніж попереднє тому, що ряд добутків матриць на вектор змінюється множенням скаляра на вектор. Використовуючи викладене, можливо побудувати алгоритм обчислення оцінок компонент фазового вектора системи з меншими обчислювальними витратами.

У випадку, якщо динамічна система стаціонарна, розв’язок системи (2) і (3) виконується один раз.

У випадку, коли залежність від часу слабка, пошук векторів базису можна проводити один раз в декілька звернень до фільтру. При великих значеннях $\frac{d\Phi(t)}{dt}$ перерахунок векторів базисів простору станів і спостереження виконується частіше. Питання про періодичність перерахунків розв’язується для кожної динамічної системи окремо.

Запропонований спосіб містить меншу кількість арифметичних операцій, що дає змогу зекономити процесорний час. Відомо, що час, який потрібен ЕОМ для виконання операції множення, майже на порядок більший від тривалості операції додавання. З урахуванням цього, обчислювальні витрати (кількість операцій типу “додавання”) для одержання оцінки фазового вектора динамічної системи складають за звичайним варіантом (4)

$$N_1 = 22g^2 + 22rg - g + r\,, \tag{6}$$

а для тих самих умов за даним варіантом

$$N_2 = 2(g-1)^2 + 19g + 22rg + r\,. \tag{7}$$

Зменшення обчислювальних витрат по всьому алгоритму складає величину близько 10 %. Крім того, скорочення частки операцій множення в їх загальної кількості дозволяє зменшити вплив помилок заокруглення, оскільки вони є їх основним джерелом. Це особливо важливо при скороченій розрядній сітці.

Висновки

Запропонований варіант розрахунку оцінок складових компонент фазового вектора динамічної системи дає змогу скоротити об‘єм обчислень на величину порядку 10%. Зменшення кількості операцій множення при реалізації на ЕОМ дозволяє зменшити вплив помилок заокруглення, що важливо для вбудованих обчислювачів.

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 463 с. 2. Сейдж, Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 495 с.