

Для модернізованого нівелювання сер.кв.п. визначення перевищення буде:

$$m_{h_{\text{мод.}}}^2 = \frac{1}{4}m_{Л.н.}^2 + \frac{1}{4}m_{Л.в.}^2 - \text{для лівого нівелювання,}$$

та

$$m_{h_{\text{мод.}}}^2 = \frac{1}{4}m_{П.н.}^2 + \frac{1}{4}m_{П.в.}^2 - \text{для правого нівелювання,}$$

де  $m_{Л.н.}^2, m_{Л.в.}^2, m_{П.н.}^2, m_{П.в.}^2$  – сер.кв.п. визначення перевищення при лівому та правому нівелюванні нижнього та верхнього нівелірів відповідно.

Результати експериментальних досліджень наведені в табл. 1 та 2.

Отже, як бачимо з результатів експериментальних досліджень, точність модернізованого нівелювання не гірша від точності класичного нівелювання. Однак, при модернізованому нівелюванні значно скорочується час спостережень, що має немале значення при виконанні високоточного геометричного нівелювання.

*1. Инструкция по нивелированию I, II, III IV к. – М.: Недра, 1990 р. 2. Островський А.Л., Мороз О.І. До проблеми оновлення державної висотної основи України / Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2000. – № 60. – С. 54 – 58.*

**С.А. Клим, А.Л. Островський**

Національний університет “Львівська політехніка”

## **РОЗРАХУНОК ТЕХНОЛОГІЧНИХ ДОПУСКІВ СВІТЛОВІДДАЛЕМІРНИХ ВИМІРІВ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ РЕГРЕСІЇ**

© Клим С.А., Островський А.Л., 2001

**Предложен метод расчета технологических допусков светодальномерных измерений, основанный на уравнении прямой регрессии:**

$$m_S = a + b \cdot S \cdot 10^{-6},$$

**с числовыми значениями коэффициентов  $a$  и  $b$ , свойственных данному светодальномеру или тахеометру.**

**Propose method of recalculation of technical permits for electrooptical range measurements on the basis of equation of straight regress:**

$$m_S = a + b \cdot S \cdot 10^{-6},$$

**with number value coefficients  $a$  and  $b$  peculiar to concrete electrooptical range or tachometer.**

Для оцінки точності світловіддалемірних вимірів найбільш широкого застосування набуло рівняння прямої регресії:

$$m_S = a + b \cdot S \cdot 10^{-6}, \quad (1)$$

де  $m_S$  – середня квадратична похибка вимірної сторони  $S$ ;  $a, b$  – коефіцієнти, що наводяться в паспорті кожного віддалеміра або електронного тахеометра.

З погляду теорії помилок вимірів, формулу (1) не можна вважати досконалою. Із структури цієї формули очевидно, що перший член в правій частині є сумою випадкових помилок, незалежних від довжини  $S_i$ , навпаки, другий член – охоплює систематичні помилки, що залежать від  $S$ . Однак знаки цих двох груп помилок не відомі і з однаковою ймовірністю вони можуть бути додатні або від’ємні. Тому більш правильно було б користуватись формулою:

$$m_S^2 = a^2 + b^2 \cdot S^2, \quad (2)$$

де  $m_S$ ,  $a$  та  $b$  – в міліметрах,  $S$  – в кілометрах.

Згідно з інструкцією [1] максимальна довжина сторони полігонометричного ходу 4 класу – 3 км. Розглянемо, які апріорні помилки слід очікувати на основі формули (1) та (2) при вимірюванні такої сторони дуже поширеним світловіддалеміром СТ-5 для якого  $a = 10$  мм,  $b = 5$  мм. На основі (1) отримаємо:

$$m_{S_1} = 10 + 5 \cdot 3 = 25 \text{ мм}.$$

На основі (2), відповідно:

$$m_{S_{(2)}}^2 = 10^2 + 5^2 \cdot 3^2 = 325 \text{ мм}; \quad m_{S_{(2)}} = 18 \text{ мм}.$$

Отже, формула (1) збільшує очікувану помилку майже на 40%.

Поки що маємо справу із середніми квадратичними помилками. Допуски, звичайно, подвоюють СКП, тобто

$$m_{\text{гран.}(1)} = 50 \text{ мм},$$

$$m_{\text{гран.}(2)} = 36 \text{ мм}.$$

Як бачимо, різниці абсолютних помилок суттєві. Відносні помилки також відрізняються майже на 40%:

$$\frac{m_{S_{(1)}}}{S_{\text{max}}} = \frac{1}{120000}; \quad \frac{m_{S_{(2)}}}{S_{\text{max}}} = \frac{1}{167000}.$$

Якщо навіть такі ж розрахунки виконати для рекомендованої інструкцією [1] оптимальної довжини сторони полігонометричного ходу 4 класу –  $S = 500$  м, то і в цьому випадку

$$m_{S_{(1)}} = 12,5 \text{ мм}; \quad m_{S_{(2)}} = 10,3 \text{ мм}.$$

Тобто різниця становить більше ніж 20%. Так що і для оптимальної довжини сторони полігонометричного ходу ІУ класу різниці помилок значимі.

Із всього наведеного вище можна зробити висновок, що формула (1) – приблизна. Проте вона збільшує, а не зменшує фактичні значення помилок. Тому, якщо розрахунки допусків зроблені за цією формулою і результати задовольняють вимоги виробництва до геодезичної основи, то з’являються додаткова впевненість, що фактичні помилки  $m_S$  будуть меншими від граничних:

$$m_{S_{\phi}} < m_{S_{\text{гран.}}}.$$

Тому вираз (1) можна використовувати для приблизних, апріорних розрахунків.

При бажанні отримати більш точні значення результатів обчислень цю особливість формули слід враховувати.

Однак формула (1) ще не дає відповіді на ряд технологічних питань, що виникають під час виконання світловіддалемірних вимірів, а саме:

- з якою точністю необхідно приводити похилі лінії до горизонту;
- з якою точністю необхідно центрувати світловіддалемір та відбивач;
- з якою точністю необхідно визначити постійну світловіддалеміра  $k$ ;
- які похибки  $m_{S_i}$  можна допустити під впливом:
  - а) дрейфу частот генератора високої частоти (ГВЧ);
  - б) неточного визначення показника заломлення повітря –  $n$ ;
  - в) циклічної помилки фазометра;
  - г) неточності координат вихідних пунктів.

Завдання цієї статті – дати відповіді на ці питання на основі рішення (1), враховуючи, звичайно, характер і властивості дії помилок, що регламентують точність світловіддалемірних вимірів.

Нижче, в табл. 1, наведені відомі джерела похибок світловіддалемірних вимірів – їх позначення та властивості: випадкові –  $b$ ; систематичні –  $c$ ; залежні вони або незалежні від довжини лінії  $S$ .

Таблиця 1

Джерела помилок світловіддалемірних вимірів

№ п/п	Позначення похибок	Джерела похибок	Властивості похибок
1	$m_{S_{\Delta\phi}}$	вимірювання різниці фаз	$b$ ; не залежить від $S$
2	$m_{S_h}$	вимірювання перевищень	$b$ ; не залежить від $S$
3	$m_{S_\phi}$	циклічна похибка фазометра	$b$ ; не залежить від $S$
4	$m_{S_{ц.р.}}$	центрування с/в, редукція відбивача	$b$ ; не залежить від $S$
5	$m_{S_f}$	дрейф частоти генератора	$c$ ; залежить від $S$
6	$m_{S_n}$	неточне значення показника заломлення	$c$ ; залежить від $S$
7	$m_{S_k}$	визначення постійної с/в – $k$	$c$ ; залежить від $S$
8	$m_{S_{вих.}}$	похибки координат вихідних (відомих) пунктів	$b$ ; не залежить від $S$

Стосовно табл. 1 зробимо одне зауваження: похибка  $m_{S_k}$  для будь-якої лінії не залежить від  $S$ . Однак для полігонометричного ходу  $[m_{S_k}] = m_{S_k} \cdot n = m_{S_k} \frac{[S]}{S_{сер}}$ , де  $n$  – кількість ліній в ході,  $S_{сер}$  – середня довжина лінії ходу.

Виходячи з властивостей помилок світловіддалемірних вимірів можна записати:

$$a^2 = m_{S_{\Delta\phi}}^2 + m_{S_h}^2 + m_{S_\phi}^2 + m_{S_{ц.р.}}^2 + m_{S_{вих.}}^2, \quad (3)$$

$$b^2 = m_{S_k}^2 + m_{S_n}^2 + m_{S_f}^2. \quad (4)$$

Похибка вимірювання різниці фаз  $m_{S_{\Delta\phi}}$  тим чи іншим світловіддалеміром або електронним тахеометром відома, або може бути досить точно обчислена залежно від конст-

руктивних особливостей приладу, так само, як, наприклад, помилка відліку лімба оптичним мікрометром теодоліта.

Для обчислення  $m_{S_{\Delta\phi}}$ , достатньо знати ціну найменшої поділки фазометра –  $m_{\Delta\phi}$  і частоту генератора високої частоти (ГВЧ) –  $f$  (при відомій швидкості світла). При сучасній технології виготовлення фазометрів найменша похибка  $m_{\Delta\phi} \geq 0,1^0 = 6' = 360''$ .

Кращим фірмам, що мають світове визнання, вже вдається виготовляти фазометри з точністю відліку  $m_{\Delta\phi} = 0,2^0$  (фірма Керн – Швейцарія, світловіддалеміри Мекометр – ME-3000; фірма Sokkil, Японія, світловіддалемір Pulsar 50). Шведський геодинетр модулі 8, фірма АГА; російський віддалемір “Гранат”, фірма УОМЗ, оздоблені фазометром з точністю відліку  $m_{\Delta\phi} = 0,3^0$ . Широко розповсюджені в геодезичних організаціях України топографічний світловіддалемір СТ-5 (“Блеск” фірми УОМЗ), має фазометр з точністю відліку  $m_{\Delta\phi} \approx 0,5^0$ , а топографічний світловіддалемір 2СМ-2 оснащений фазометром з  $m_{\Delta\phi} = 1^0$ .

Розглянуті помилки фазометра слід вважати граничними, оскільки помилки більше від вказаних (практично більше від ціни найменшого ділення) вже є грубими.

Зауважимо, що останні цифри “5” та “2”, “10” в позначеннях світловіддалемірів СТ-5, 2СМ-2, СТ-10 означають радіус їх дії в кілометрах і не вказують на точність фазометрів.

Розрахуємо значення  $m_{S_{\Delta\phi}}$  для названих світловіддалемірів. Для цього скористаємося загальною формулою фазових світловіддалемірів:

$$S = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \frac{C}{2f}. \quad (5)$$

Диференціюючи (5) по  $\Delta\phi$ , маємо після переходу до квадратичних помилок:

$$m_{S_{\Delta\phi}} = \frac{C}{4\pi f} \cdot \frac{m_{\Delta\phi}}{\rho_0}. \quad (6)$$

Таблиця 2

**Значення  $m_{S_{\Delta\phi}}$  для найбільше розповсюджених світловіддалемірів**

КЛАС с/в	Світловід- далемір	Фірма -виробник	$f$ (герц)	$m_{\Delta\phi}$ (в градусах)	$m_{S_{\Delta\phi}}$ (в мм)
прецизійні	Мекометр, Ме 3000	Керн (Швейцарія)	49951000400	0,2	0,167
високоточні	Пульсар 50	Sokkil (Японія)	30000000	0,2	2,78
	Геодинетр, модель 8	АГА (Швеція)	31465500	0,3	3,27
	Eldi 10	Карл Цейс (Німеччина)	60000000	0,6	4,16
	“Гранат”	УОМЗ (Росія)	30000000	0,3	4,16
топографічні	СТ-5 “Блеск”	УОМЗ (Росія)	14985500	0,5	13,88
	2СМ-2	УОМЗ (Росія)	15000000	1	27,75

Обчислені значення  $m_{S_{\Delta\phi}}$  зведені в табл. 2.

Слід пам'ятати, що:

1. Похибка  $m_{S_{\Delta\phi}}$  є найбільшою складовою частиною коефіцієнта  $a$ .

2. Похибка  $m_{S_{\Delta\phi}}$  залежить від кількості прийомів вимірів і зменшується пропорційно кореню квадратному з кількості прийомів вимірів.

В подальшому, для прикладу, зробимо розрахунки технологічних допусків при вимірюванні ліній полігонометрії 4 кл. топографічними світловіддалемірами СТ-5.

Інструкція [1] вимагає виконувати виміри сторін полігонометрії 4 кл. трьома прийомами. При цьому під прийомом вимірів розуміють одне наведення відбивача і три відліки табло [1, с. 23].

Слід відзначити, що така кількість прийомів Інструкцією назначена незалежно від типу світловіддалеміра, що, безумовно належить до недоліків Інструкції. Цікаво, що вже на стор. 26 мова йде про трілатераційні мережі, які також базуються на світловіддалемірних вимірах, вказується: “програма вимірювання ліній електронними віддалемірами залежить від типу приладу і довжини лінії, що вимірюється”. Зрозуміло, Інструкція в цьому питанні протирічить сама собі.

Якщо вимірювати лінію одним прийомом і виводити середнє з трьох відліків табло, то очікуване граничне значення  $m_{S_{\Delta\phi}}$  для світловіддалеміра СТ-5 буде:

$$m_{S_{\Delta\phi_{гран}}} = \frac{13,88}{\sqrt{3}} = 8,01 \text{ мм}.$$

Далі застосовуємо частковий принцип рівних впливів окремо для випадкових та систематичних помилок і допустимо

$$m_{S_h} = m_{S_\phi} = m_{S_{y.p}} = m_{S_{виз}} = m_{вип}, \quad (7)$$

$$m_{S_k} = m_{S_n} = m_{S_f} = m_{сис} \quad (8)$$

З позначеннями (7) та (8) формули (3) і (4) набувають вигляду:

$$a^2 = m_{S_{\Delta\phi}}^2 + 4m_{вип}^2 \quad (9)$$

$$b^2 = 3m_{сис}^2 \quad (10)$$

Розв'яжемо рівняння (9) та (10) відносно невідомих  $m_{вип}$  та  $m_{сис}$ . Отримаємо:

$$m_{вип} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - m_{S_{\Delta\phi}}^2}, \quad (11)$$

$$m_{сис} = \frac{b}{\sqrt{3}}. \quad (12)$$

Формули (11) та (12), по суті, дають відповіді на всі питання стосовно технології проведення світловіддалемірних вимірів. Дійсно, на основі цих формул отримаємо (при вимірах віддалеміром СТ-5):

$$m_{вип} = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 - (8,01)^2} = 2,99 \text{ мм},$$

$$m_{сис} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,89 \text{ мм}.$$

Отже, проведення ліній до горизонту та визначення циклічної похибки слід виконувати із середніми квадратичними помилками близько 3 мм.

Центрування світловіддалеміра та відбивача слід виконувати із квадратичними помилками  $2,89 \frac{2,99 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = 2,12 \text{ мм} \approx 2 \text{ мм}$ .

Середні квадратичні систематичні помилки, що викликані неточним визначенням постійної світловіддалеміра, дрейфом частот та неточним значенням показника заломлення, можуть становити близько 2,5 мм.

Отже, постійну світловіддалеміра можна визначити із середньою квадратичною помилкою такого ж порядку (2,5 мм).

Розрахуємо середні квадратичні помилки з якими можна визначити показник заломлення повітря –  $n$  та частоту ГВЧ.

Для визначення можливої середньої квадратичної помилки показника  $n$  –  $m_n$  скористаємося співвідношенням:

$$\frac{m_n}{n} = \frac{m_{\text{сис}}}{S} = \frac{2,89}{500000} = \frac{1}{173000}. \quad (13)$$

На основі (13), маємо (для оптимальної довжини  $S$ )  $m_n = 5,78 \cdot 10^{-6}$ . Як відомо, похибка у визначенні абсолютної температури  $T$  на  $1^\circ\text{К}$  викликає помилку у визначенні показника  $n$ , що дорівнює приблизно  $1 \cdot 10^{-6}$ , а похибка у визначенні тиску на 1 мм рт.ст. викликає помилку в  $n$ , що дорівнює приблизно  $0,4 \cdot 10^{-6}$ . Тому, якщо  $\Delta n = 5,78$  розділити на дві рівні частини, то можна стверджувати, що температуру на трасі можна знати з помилкою  $\approx 3^\circ\text{К}$ , а тиск (у цей же період) з помилкою = 7 мм рт.ст. (9 мБар). Вимоги до визначення метеопараметрів ростуть із збільшенням довжини лінії. Так, при максимальній довжині полігонометрії 4кл. – 3 км, отримаємо:

$$\frac{m_n}{n} = \frac{m_{\text{сис}}}{S} = \frac{2,89}{3000000} = \frac{1}{1038000}.$$

$$m_n = 0,96 \cdot 10^{-6} \approx 1 \cdot 10^{-6}.$$

Тепер бачимо – квадратична похибка в температурі повітря не повинна перевищувати  $1^\circ\text{К}$ . Враховуючи вплив на  $n$  ще й помилок визначення тиску, допуском помилки визначення температури слід вважати  $1^\circ\text{К}$  та 2,5 мм рт.ст.

Для визначення квадратичної помилки частоти ГВЧ (дрейфу частот) візьмемо співвідношення:  $\frac{m_f}{f} = \frac{m_{\text{сис}}}{S} = \frac{1}{173000}$ , при  $f = 15$  Мгерц. При максимальній довжині  $S = 3$  км, отримаємо:  $m_f = 14$  герц. Допуск  $m_{f_{\text{дон}}} \approx 30$  герц.

Знову зауважимо, що це не граничні помилки. З наведених прикладів очевидно, що розрахунки слід вести, зважаючи на середню довжину полігонометричного ходу.

Ще раз підкреслимо, що нашими розрахунками знайдені середні квадратичні технологічні помилки для випадку приведення вимірів світловіддалеміром СТ-5.

Граничні, допустимі помилки, звичайно, дорівнюють подвійним середнім квадратичним помилкам.

Розрахуємо для контролю, яка буде точність різних за довжиною полігонометричних ходів з оптимальними довжинами сторін ( $S = 500$ ). Перейдемо, при цьому, до граничних помилок

$$m_{\text{вип.гран}} = 2m_{\text{вип.}} = 2 \cdot 2,99 = 5,98 \text{ мм},$$

$$m_{\text{сис.гран}} = 2m_{\text{сис.}} = 2 \cdot 2,89 = 5,78 \text{ мм}.$$

Для одного прийому (трьох відліках)  $m_{S_{\Delta\phi \text{ гран}}} = 8,01 \text{ мм}$ . З граничними технологічними помилками на основі (9) та (10), отримаємо:  $a_{\text{гран}} = 14,39 \text{ мм}$ ;  $b = 10,01 \text{ мм}$ ;  $m_S = 14,39 + 10,01 \cdot 0,5 = 19,39 \text{ мм}$ .

При  $S = 500 \text{ м}$ :

– для ходу завдовжки  $L = 1 \text{ км}$  ( $n = 2$ ), отримаємо:  $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{41000}$ ;

– для ходу завдовжки  $L = 2,5 \text{ км}$  ( $n = 5$ ), отримаємо:  $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{63000}$ ;

– для ходу завдовжки  $L = 5 \text{ км}$  ( $n = 10$ ), отримаємо:  $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{77500}$ ;

– для ходу завдовжки  $L = 10 \text{ км}$  ( $n = 20$ ), отримаємо:  $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{87300}$ ;

і, на кінець, для ходу завдовжки  $L = 12 \text{ км}$  ( $n = 28$ ), отримаємо:  $\frac{m_L}{L} = \frac{1}{90600}$ .

Як бачимо, навіть хід з двома сторонами має відносну помилку  $\frac{1}{41000}$ . Оскільки допустима відносна похибка ходу полігонометрії 4 кл. під впливом помилок лінійних та кутових вимірів  $\frac{1}{25000}$ \*, то розраховані нами граничні технологічні помилки світловіддалемірних вимірів віддалеміром СТ-5 – обґрунтовані

На основі наведених розрахунків, можна зробити такі висновки:

1. Програму із технологічними допусками на виконання світловіддалемірних вимірів приладами різних класів та типів, слід проектувати та розраховувати на основі рівняння прямої регресії з числовими значеннями коефіцієнтів властивими даному світловіддалеміру або тахеометру.

2. Існуюча Інструкція на вимірювання ліній в полігонометрії 4 кл.; 1 та 2 розрядів обтяжена недоліками, які слід усунути.

---

\* Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500. Головне управління геодезії, картографії та кадастру України. – Київ, 1999. – 155 с.