поверхностных волн с периодически изменяющимся поверхностным импедансом // Изв. вузов СССР. Радиофизика. – 1960. – №5. – С. 802–817. 8. Евстропов Г.А. Электродинамические свойства плоских и цилиндрических поверхностей с периодическим изменением импеданса // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетехническая. – 1962. – Вып.3. – С.41–58. 9. Чаплин А.Ф. Возбуждение периодически неоднородных импедансных структур // Труды VIII Всесоюзн. симп. “Волны и дифракция”. – Т. 3. – М.: ИРЭ АН СССР. – 1981. – С.73–76. 10. Чаплин А.Ф. Теория эквидистантных решеток с периодически меняющимися параметрами излучателей // Труды VIII Всесоюзн. симп. “Волны и дифракция”. – Т. 3. – М.: ИРЭ АН СССР. – 1981. – С.73–76. 11. Гоблик В.В. Анализ поля над импедансной плоскостью с периодическими дискретными неоднородностями методом А.Ф. Чаплина / Теоретические и экспериментальные методы исследования антенн и устройств СВЧ: Сборник. – Львов, 1984. – С.27–70. – Рус.– Деп. В УкрНИИНТИ 11.11.84, №1874 Ук-84. 12. Об одном обобщении решения задач возбуждения модулированных импедансных структур / А.Ф. Чаплин, В.В. Гоблик (Львов. политехн. ин-т) – Львов, 1986. – 8 с. – Рус. Деп. в УкрНИИНТИ, №813 Ук-86. 13. Гоблик В.В. Дис. канд. фіз.-мат. наук. – Харківський держуніверситет, 1986. – 210 с. 14. Гоблик В.В. Возбуждение модулированной диэлектрической пластины // Вестн. Львов. политехн. ин-та “Теория и проектирование полупроводниковых и радиоэлектронных устройств”. – Львов, 1990. – №245. – С.20–23. 15. Гоблик В.В., Гоблик Н.М. Гіллясті ланцюгові дроби в задачах дифракції хвиль // Вісн. Держ. універ. “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 1998. – № 352. – С. 150–153. 16. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с. 17. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с. 18. Hoblyk V.V., Hoblyk N.N. About solution of the Fredholm integrated equation in a branched continual fraction type. International School-Seminar “Continued Fraction, their General-ization and Application”, Uzhhorod National University, 2002. – P. 16–18. 19. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – 2-е изд. – М., 1983 – 179 с. 20. Патент №15648, Україна. Антена поверхневої хвилі / В.В. Гоблик, М.Ю. Михайлов, А.Ф. Чаплін, Є.М. Ящишин // Державний університет "Львівська політехніка". Опубл. 30.06.97. Бюл. №3.

УДК 53.088.2

О.В. Надобко, Б.М. Дутка
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної радіотехніки і радіовимірювань

МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ ПОХИБОК З ДОВІЛЬНИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛІВ

Запропоновано простий та порівняно універсальний метод підсумовування похибок з довільними законами розподілів. Розроблено практичні рекомендації щодо його використання.

Вступ. Більшість похибок формується за схемою додавання (накладання), тому задача підсумовування похибок є однією з практичних задач, яку доводиться розв’язувати під час оцінки похибок вимірювань, похибок засобів вимірювань тощо. В загальному випадку ймовірністно-статистичне підсумовування похибок передбачає підсумовування їх розподілів якнайповніших і універсальних характеристик похибок. Підсумовування похибок при цьому ґрунтується на побудові композицій розподілів. Відомо, що якщо розподіли окремих складових задані аналітичними функціями, то їх композиція знаходиться або шляхом інтегрування цих функцій, або з використанням апарату характеристичних функцій[1]. Однак часто функції розподілів залишаються або невідомими, або визначаються дуже наближено. До того ж велика кількість використовуваних на практиці видів розподілів похибок значно ускладнює як їх вибір, так і побудову композицій і, що важливо, робить ці етапи дуже суб'єктивними. Сказане підтверджує необхідність розробки методу підсумовування похибок, який би не орієнтувався на конкретні види законів розподілів похибок і, можливо, навіть не потребував би їх визначення.

Основна частина. Запропонований метод підсумовування похибок включає такі основні етапи – отримання оцінок центральних моментів розподілів окремих складових похибок, додавання цих моментів, побудову для суми моментів густини розподілу сумарної похибки у вигляді дискретної функції $f(x) = p_i$, де p_i – імовірність потрапляння сумарної похибки в *i*-й інтервал (дискрет).

Для розв'язання поставленої задачі вводиться допущення, що будь-яка функція густини розподілу f(x) може бути подана у вигляді дискретної функції $f(x) = p_i$. У цьому випадку оцінку *s*-го центрального моменту знаходять в такий спосіб:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{K} \left[\overline{x_i} - \overline{x}\right]^s \cdot p_i\,, \tag{1}$$

де $\overline{x_i}$ – середнє значення *i*-го інтервала; $\overline{x}$ – середнє значення сумарної похибки; p_i – імовірності; K – кількість дискретів.

Рівняння (1) зручно подати для центрованої величини. Враховуючи, що при цьому $\overline{x} = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned}\mu_s(t) = (У_{-M_-})^{\mathbf{s}} \cdot P_{-M_-} + (У_{-M_-+1})^{\mathbf{s}} \cdot P_{-M_-+1} + \ldots + (У_{-1})^{\mathbf{s}} \cdot P_{-1} + \\ + (У_1)^{\mathbf{s}} \cdot P_1 + \ldots + (У_{M_+-1})^{\mathbf{s}} \cdot P_{M_+-1} + (У_{M_+})^{\mathbf{s}} \cdot P_{M_+}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

де

$$У_{-M_-} = \left[-2M_- + 1\right]\frac{\Delta x}{2}, \quad У_{-M_-+1} = \left[2(-M_- + 1) + 1\right]\frac{\Delta x}{2}, \ldots;$$

$$У_{-1} = -\frac{\Delta x}{2},\; У_1 = \frac{\Delta x}{2}, \ldots, У_{M_+-1} = \left[2(M_+ - 1) - 1\right]\frac{\Delta x}{2};$$

$$У_{M_+} = \left[2M_+ - 1\right]\frac{\Delta x}{2};$$

M_-, M_+ – кількість інтервалів відповідно зліва і справа від початку координат ($K = M_- + M_+$); Δx – ширина інтервалу (дискрету).

Підставляючи тепер в (2) послідовно s = 0,1,…,K-1, отримаємо систему рівнянь, яку в матричному вигляді можна записати так:

$$R \cdot P = \mu. \tag{3}$$

Якщо в (3) вектор центральних моментів μ задати у вигляді суми відповідних моментів складових похибки, то вектор P, який в цьому випадку характеризує густину розподілу сумарної похибки, знаходимо так:

$$P = R^{-1} \cdot \mu, \tag{4}$$

де R^{-1} – обернена матриця R.

Зазначимо, що матриця R повністю задається вибраними значеннями K і Δx і не залежить від виду функції густини розподілу. Цей факт дає змогу задати матрицю R у вигляді стандартної матриці. Така матриця була отримана для K = 18 і Δx = 0,45 за умови, що сумарна похибка задається в нормованому вигляді. Можливі зміни значення Δx можна врахувати шляхом введення масштабного множника d, що, своєю чергою, потребує множення зліва матриці R на діагональну матрицю D з елементами d^s (s = 0,1,…,K-1). Після цього вектор P знаходимо так:

[1] *Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.*

$$P = D^{-1} \cdot R^{-1} \cdot \mu, \qquad (5)$$

де D^{-1} – обернена матриця D, яка теж є діагональною з елементами $1/d^s$.

Оскільки при обчисленні оцінок центральних моментів складових похибок ніяких додаткових вимог не задається, то можна зробити висновок, що запропонований метод є універсальним і придатним для підсумовування похибок з будь-якими законами розподілів.

Підвищення вимог до точності оцінки композиційного розподілу потребує збільшення кількості дискретів К, що рівнозначно збільшенню кількості враховуваних центральних моментів. Точність обчислення таких моментів, як відомо, зменшується за збільшення порядку моменту. Тому оптимальним є значення К = 16–18.

Для оцінки ефективності методу було розглянуто приклад підсумовування похибок з нормальними законами розподілів. Отримані результати практично ідеально підтверджують висновок, що розподіл сумарної похибки за таких умов також відповідає нормальному закону. Одночасно із наведеного прикладу бачимо і ті обмеження та недоліки, які характерні для запропонованого методу. По-перше, метод дуже чутливий до точності оцінок центральних моментів. Можливі похибки знаходження моментів можуть бути причинами навіть появи від'ємних значень елементів вектора Р, а також значень, більших за одиницю, оскільки ніяких додаткових умов в цьому випадку не передбачено. По-друге, збільшення розмірності матриці R веде до отримання точнішої оцінки композиційного розподілу, але одночасно потребує обчислення великої кількості моментів. Забезпечити узгодження таких вимог на практиці, особливо в умовах обмеженої кількості вимірювань, не завжди є можливим. Зрозуміло, що найбільш логічний шлях до вирішення таких суперечностей – зменшення кількості обчислювальних моментів, оскільки відомо, що чим нижчий порядок центрального моменту, тим точнішу оцінку цього моменту можна отримати за статистичними даними. На практиці, наприклад, можна врахувати лише перші 3–4 моменти, які обчислюються ще з достатньо високою точністю.

Враховуючи сказане, задамо систему рівнянь (3) в такий спосіб, щоб кількість невідомих p_i була більшою від кількості рівнянь (M>K):

$$\begin{aligned} r_{11}P_1 + r_{12}P_2 &+ \cdots + r_{1M}P_M = 1, \\ r_{21}P_1 + r_{22}P_2 &+ \cdots + r_{2M}P_M = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \\ r_{K1}P_1 + r_{K2}P_2 &+ \cdots + r_{KM}P_M = \mu_{M-1}, \end{aligned} \qquad (6)$$

де r_{ij} – елементи матриці R.

Із множини можливих розв'язків системи (6) виберемо такий, який задовольняє таким вимогам:

$$p_i \geq 0 \ (i = \overline{1, M}); \quad \sum_{i=1}^{M} p_i = 1. \qquad (7)$$

Знаходження саме таких значень ймовірностей p_i і уможливлює вирішення сформульованої задачі.

Слід зазначити, що запропоновану задачу побудови композицій розподілів можна звести до стандартної задачі лінійного програмування, яку в нашому випадку можна сформулювати так: ставиться задача знайти додатні значення ймовірностей $p_i(i = \overline{1, M})$, які перетворюють в мінімум (максимум) деяку лінійну функцію

$$L = c_1p_1 + c_2p_2 + \ldots + c_Mp_M \qquad (8)$$

і задовольняють умовам (6).

Як функція (8), яку ще називають функцією оптимальності, можна вибрати будь-яке рівняння із системи (6). В найпростішому випадку можна зупинитись, наприклад, на першому рівнянні. Тоді, враховуючи, що при цьому $c_1 = c_2 = \ldots = c_M = 1$, матимемо

$$L = p_1 + p_2 + \ldots + p_M. \qquad (9)$$

Зрозуміло, що для цієї функції

$$\min(\max)L = 1. \qquad (10)$$

Тому вибір першого рівняння із (6) як функції оптимальності є дуже зручним і уможливлює, по-перше, контролювати якість отримуваних рішень перевіркою виконання рівності (10). По-друге, дає змогу непрямо контролювати та забезпечувати основну вимогу до експериментальних розподілів – рівність одиниці суми усіх ймовірностей $p_i(i=\overline{1,M})$.

Рівняння, аналогічне рівнянню (9), входить безпосередньо і в систему (6). Тому введення функції оптимальності є суто умовною процедурою, яка дає змогу вирішити лише одну проблему – звести поставлену задачу до задачі лінійного програмування. Це, своєю чергою, створює багато практичних зручностей, які пов'язані з наявністю розробленого універсального програмного забезпечення, що загалом істотно скорочує етапи підготовки та розв'язання поставленої задачі.

Експериментальні дослідження та висновки. Як приклад практичної реалізації запропонованого методу наведемо результати підсумовування двох похибок, поданих нормальними розподілами залежно від кількості рівнянь, які входять до системи (6). Отримані результати оформлені у вигляді таблиці, аналіз яких показує, що на точність оцінок сумарних розподілів істотно впливають лише декілька перших центральних моментів. Моменти вище 4–6 порядку уже мало змінюють вектор P. Це дає змогу зробити висновок, що в більшості практичних випадків для побудови композицій сумарних розподілів можна обмежитись 4–5 рівняннями із (6). Необхідні для цього центральні моменти, а це є моменти 3–4 порядків, ще порівняно точно обчислюються за статистичними даними. Цікавим є також і той факт, що 100 %-й збіг функції оптимальності спостерігається саме для такої кількості рівнянь. Дослідження також показали, що навіть для 3–4 рівнянь, а це потребує відповідно оцінок центральних моментів 2–3 порядків, отримуються доволі хороші результати – 100 %-й збіг функції оптимальності та відносна точність оцінки композиційного розподілу на рівні $0{,}63680 \cdot 10^{-2}$. Такий рівень похибок пов'язаний лише з похибками обчислень і практично не впливає на подальші висновки, в тому числі, наприклад, стосовно вибору математичної моделі для опису сумарного розподілу. Із таблиці зрозуміло, що відповідно для 3–4, 5–6 тощо рівнянь отримуються практично однакові рішення. Більше того, уже для 7-ми рівнянь з'являються небажані ефекти, які пов'язані з двомодальністю сумарних розподілів. Правда, цей ефект дещо згладжується при ще більшій кількості використовуваних рівнянь. Усе це також говорить на користь висновку про доцільність використання лише перших 3–5 рівнянь. Такий висновок підтверджує також і рисунок, який графічно ілюструє результати експериментальних досліджень.

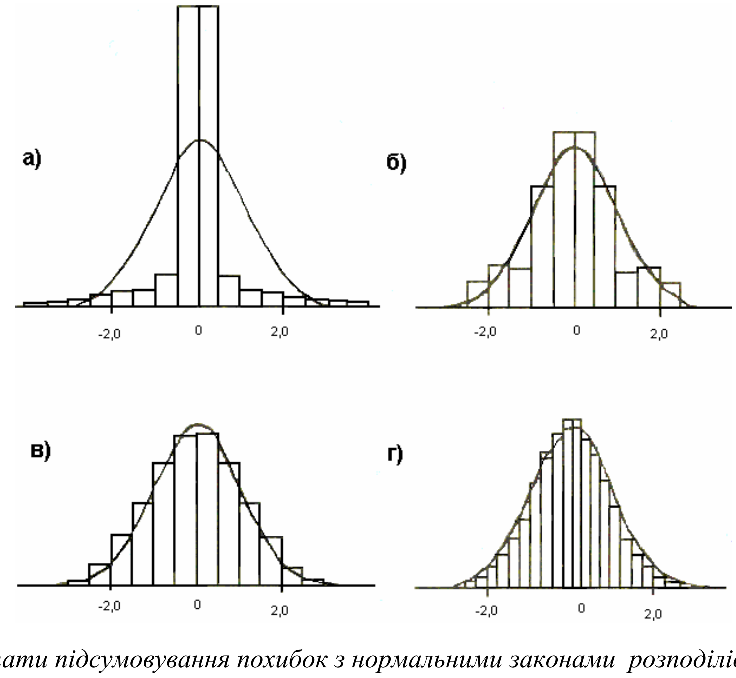

Рис. 1. Результати підсумовування похибок з нормальними законами розподілів з врахуванням: а – трьох; б – п'яти; в – дев'яти перших центральних моментів; г – п'яти моментів і подвоєного числа дискретів (суцільною лінією зображена густина нормального розподілу)

Результати підсумовування похибок з нормальними розподілами

Кількість рівнянь	Значення елементів вектора Р	Процент збігу функції оптим.	Точність оцінки розподілу
3	0,00507 0.00964 0,01356 0,01683 0,01944 0,02140 0,04036 0.37369 0,37370 0,04036 0,02140 0,01944 0,01683 0,01356 0,00964 0,00507	100,0	$0,63680\cdot10^{-2}$
4	0,00507 0.00964 0,01356 0,01683 0,01944 0,02140 0,04036 0.37369 0,37370 0,04036 0,02140 0,01944 0,01683 0,01356 0,00964 0,00507	100,0	$0,63680\cdot10^{-2}$
5	0,0 0,0 0,0 0,03283 0,05265 0,04766 0,15030 0,21656 0,21656 0,15030 0,04766 0,05265 0,03283 0,0 0,0 0,0	100,0	$0,36837\cdot10^{-3}$
6	0,0 0,0 0,0 0,032883 0,05265 0,04766 0,15030 0,21656 0,21656 0,15030 0,04766 0,05265 0,03283 0,0 0,0 0,0	100,0	$0,36837\cdot10^{-3}$
7	0,0 0,0 0,00777 0,02559 0,02075 0,04373 0,30931 0,09286 0,09286 0,30931 0,04373 0,02075 0,02559 0,00777 0,0 0,0	99,997	$0,47613\cdot10^{-2}$

Примітки: 1. Точні значення елементів вектора Р: 0,00020 0,00111 0,00486 0,01654 0,04406 0,09185 0,14988 0,19146 0,19146 0,14988 0,09185 0,04406 0,01654 0,00486 0,00111 0,00020.
2. Точність оцінки сумарного розподілу, отримана у вигляді відносного середнього значення суми квадратів відхилень фактичних значень елементів вектора Р від своїх точних значень.

Як уже зазначалось, точність оцінок сумарних розподілів зростає із збільшенням кількості дискретів К. Запропонований метод дає змогу використати саме такий шлях підвищення точності оцінок сумарних розподілів, виключаючи при цьому необхідність обчислення додаткових моментів. Сказане добре ілюструє рисунок, де наведені результати побудови композиції двох нормальних розподілів для К=16 і К = 32 (рис., г).

На завершення відмітимо ще одну істотну перевагу запропонованого методу підсумовування похибок. Оскільки практично завжди є можливість отримати інформацію про оцінки центральних моментів розподілів окремих складових похибок, а відтак і знайти суму оцінок цих моментів, то метод придатний для побудови композицій розподілів складових похибок незалежно від виду математичних моделей, якими вони описуються. Така універсальність методу дає змогу використовувати його для підсумовування похибок практично з будь-якими законами розподілів.