

ція регулятора швидкості  $W_{\text{po}}(p)$  залишається однаковою для обох випадків і розраховується згідно з виразом (5).

Отже, отримано вирази регуляторів струму та швидкості СПР для випадків, коли внутрішнім зворотним зв'язком за ЕРС можна і не можна нехтувати, виходячи із забезпечення стандартної біноміальної форми перехідного процесу швидкості. Звичайно, якщо вибрати характеристичний поліном  $H_{\text{ст}}(p)$  якоїсь іншої стандартної форми, то можна її теж реалізувати в таких одномасових системах. Тим самим значно розширюються можливості СПР при збереженні всіх їх переваг перед СМР. Особливо важливим є той факт, що базовою швидкодією, яка використовується під час синтезу СПР методом УХП, є швидкодія кінцевої координати – швидкості, а швидкодія внутрішнього струмового контуру є підпорядкована  $\omega_{\text{om}}$  і згідно з (5) є вдвічі вищою від неї.

1. Kessler C. *Ein Beitrag zur Theorie mehrschleifiges Regelungen* // *Regelungstechnik*. 1960. № 8. P.281–266. 2. Лебедев Б.Д. и др. *Управление вентиляльными электроприводами постоянного тока*. М., 1970. 3. Кузовков Н.Т. *Модальное управление и наблюдающие устройства*. М., 1976. 4. Маруцак Я.Ю. *Метод синтезу систем підпорядкованого регулювання, який забезпечує стандартні форми розподілу коренів характеристичного рівняння* // *Проблеми автоматизованного електропривода. Теорія і практика: Сб. науч. тр. ХГПУ. Харків, 1998. С.190–192*. 5. Осичев А.В., Котляров В.С., Марков В.С. *Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе* // *Проблеми автоматизованного електропривода. Теорія і практика: Матеріали конф. Харків, 1997. С.104–109*. 6. Маруцак Я.Ю. *Метод синтезу регулятора струму* // *Проблеми автоматизованного електропривода. Теорія і практика: Вестн. ХГПУ. Спец. вып. Харків, 1998. С.193–195*.

УДК 519.62 – 510.72 : 621.34

Мороз В.І.

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра ЕАП

## АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ КЕРОВАНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

© Мороз В.І., 2000

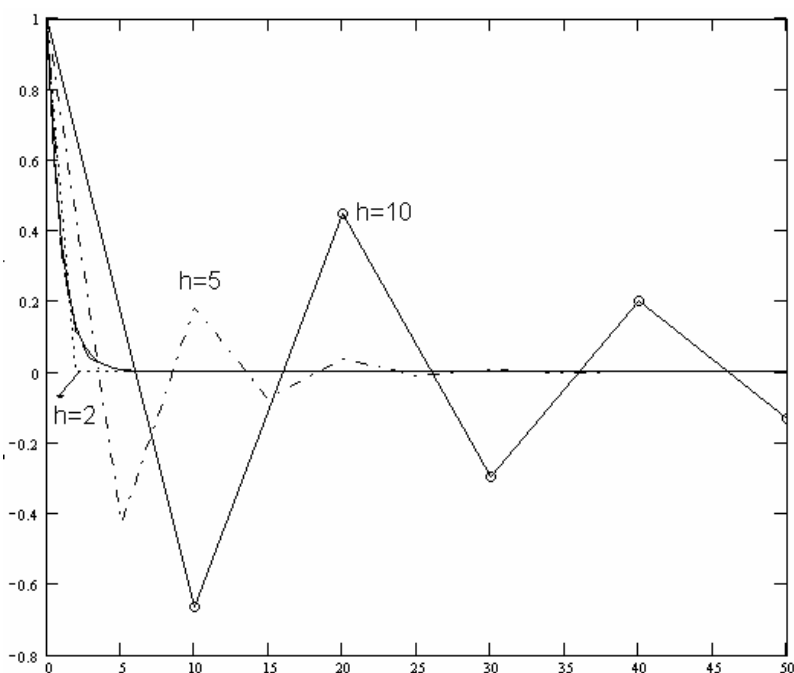
У статті розглянуті характеристики числових методів для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, що описують керовані електромеханічні системи. Запропоновано критерії вибору числових методів на основі аналізу їх частотних характеристик як цифрових фільтрів і за точністю відтворення експоненційного розв'язку.

Традиційно в моделюванні керованих електромеханічних систем (ЕМС) надається мала увага числовим методам, які застосовують для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Вважається, що тип методу практично не впливає на результат. У той же час досвід

показує, що різні числові методи мають різні особливості, які інколи суттєво впливають на результат моделювання: наприклад, можна отримати коливний розв'язок для аперіодичних насправді процесів. Таке можливе, як буде показано далі, для деяких числових методів, для яких область стійкого неколивного розв'язку може бути МЕНШОЮ від області стійкого коливного розв'язку. При цьому такий коливний розв'язок може існувати для досить широкого діапазону зміни кроку, що може ввести в оману дослідника системи і призвести до неправильних висновків щодо її поведінки. Як приклад можна показати розв'язок тестового рівняння

$$y' + y = 0 \text{ з початковою умовою } y_0 = 1 \quad (1)$$

(точний розв'язок  $y(t) = e^{-t}$ ) за допомогою неявного методу Адамса другого порядку (неявний метод трапецій) для кроків інтегрування  $h = 0,5; 1; 2; 5; 10$ , що і показано на рис.1. Як



**Рис.1.** Коливний розв'язок тестового диференціального рівняння (1) неявним методом трапецій (неявна формула Адамса другого порядку)

видно, для кроків  $h > 2$  існує стійкий коливний розв'язок.

У прикладній математиці числові методи для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь оцінюють з погляду їх наближення до розкладу в ряд Тейлора і аналізують у комплексній площині область стійкості для розв'язку тестового диференціального рівняння (1) [1, 5, 6]. Для оцінки ж придатності того чи іншого методу з погляду реалізації цифрової моделі загальноприйнятий підхід дає мало інформації, тому що математична модель і числовий інтегратор разом утворюють цифрову (комп'ютерну) модель, де обидві складові вносять свою частку похибок. Треба додати таку особливість розв'язування задач керованих

ЕМС, як невисоку точність моделей (зазвичай 5...10 %, дуже рідко – 1...2 %), що не вимагає високоточних методів числового розв'язку.

Отримати додаткову інформацію про числовий метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь можна, якщо підійти до нього з погляду теорії автоматичного керування (ТАК) і розглянути його як цифровий фільтр з відповідною дискретною передавальною функцією. Це дозволить застосувати традиційні для ТАК підходи – знайти амплітудну і фазну частотні характеристики (АЧХ і ФЧХ) цифрового інтегратора за допомогою апарата Z-перетворення, порівняти їх з частотними характеристиками ідеального інтегратора та оцінити похибки. Такий підхід відомий у ТАК для окремих традиційних методів [4], для частини методів результати аналізу описано в [3]. Як приклад, можна показати хід аналізу

числового інтегратора (описується диференціальним рівнянням  $y' = x$ ) для двох методів: неявної формули Адамса (відомої ще як Адамса-Мултона) третього порядку і формули Рунге-Кутта третього порядку.

### Неявна формула Адамса третього порядку

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1})$ ; підставляючи значення похідної для цифрового інтегратора

( $y' = x$ ), отримаємо  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5x_{i+1} + 8x_i - x_{i-1})$ . Перейшовши до дискретної передавальної функції [4] для одиничного кроку  $h = 1$  (це спрощує аналіз), отримаємо дискретну передавальну функцію цифрового інтегратора на основі неявної формули Адамса третього порядку:  $W_{A3}(z) = \frac{5z + 8 - z^{-1}}{12(z-1)}$ .

### Формула Рунге-Кутта третього порядку

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 ;$$

де  $k_1 = hf(x_i, y_i)$ ; (тут позначено  $y'_i = f(x_i, y_i)$ )

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) = hf(x_{i+1}, y_i - k_1 + 2k_2).$$

Підставивши значення похідної для цифрового інтегратора ( $y' = x$ ), отримаємо

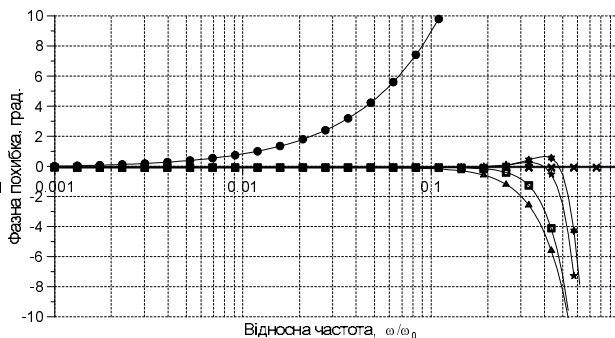
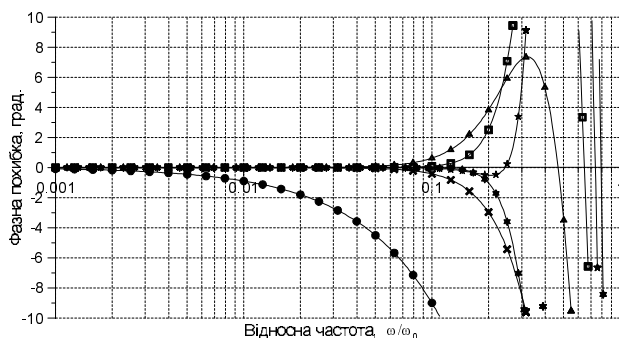
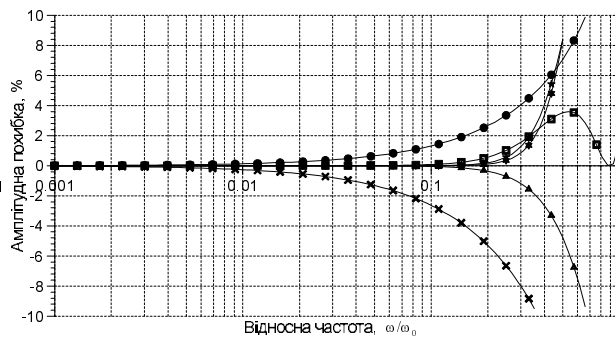
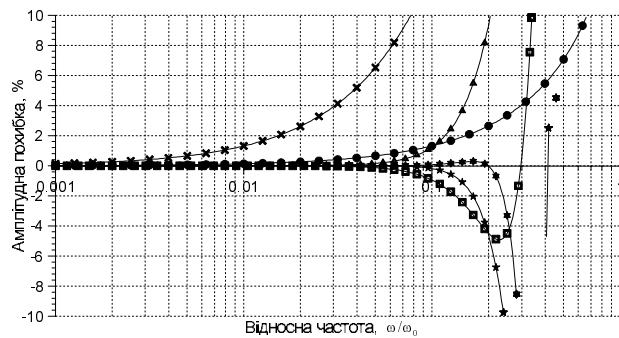
$y_{i+1} = y_i + h\left(x_i + 4\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + x_{i+1}\right)/6$ . Перейшовши до дискретної передавальної функції [4]

для одиничного кроку, отримаємо дискретну передавальну функцію цифрового інтегратора

на основі формули Рунге-Кутта третього порядку:  $W_{RK3}(z) = \frac{z + 4z^{1/2} + 1}{6(z-1)}$ .

Для частини відомих числових методів частотні характеристики для похибок (амплітудної та фазної) стосовно ідеального інтегратора з комплексною передавальною функцією  $\frac{1}{j\omega}$  показані на рис.2 (такі дослідження за допомогою математичних пакетів MathCAD чи MatLAB зробити нескладно). Аналіз проводиться в усьому частотному діапазоні до максимальної частоти пропускання цифрового інтегратора  $\omega_0$ , що визначається з теореми відліків Шеннона-Котельнікова [4] і становить  $\pi/h$ . З погляду чистої математики такий тест незвичний, але в ТАК оцінка властивостей об'єктів за їх частотними характеристиками є традиційним і досить інформативним підходом. Зокрема, наявність великої фазної похибки зводить нанівець усі інші переваги даного числового методу, оскільки під час дослідження замкнених систем автоматичного керування така фазна похибка може значно спотворити результати обчислень, змінивши запас стійкості моделі системи за фазою.

Аналіз отриманих результатів дав змогу визначити **перший критерій** для числових методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь: їх частотні характеристики, що визначаються способом апроксимації вхідного сигналу цифровим інтегратором (*взагалі, це питання не є новим для теорії дискретних і цифрових систем керування, зокрема, в [4] роз-*

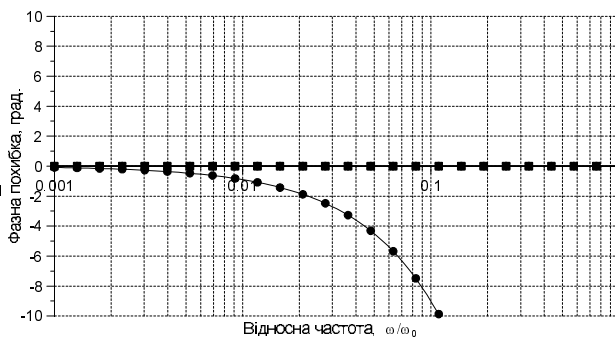
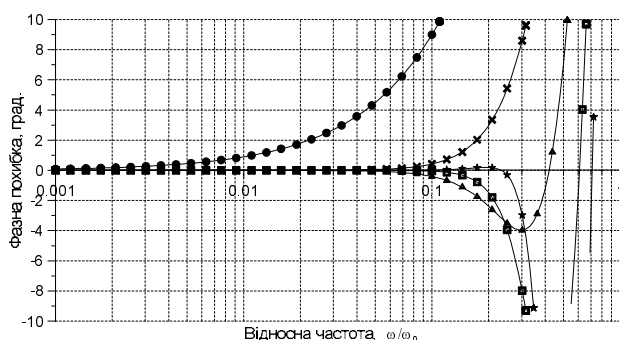
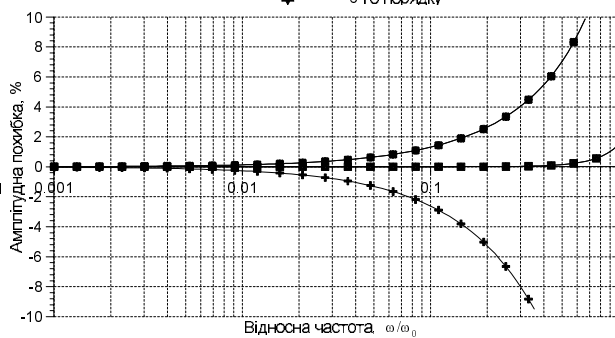
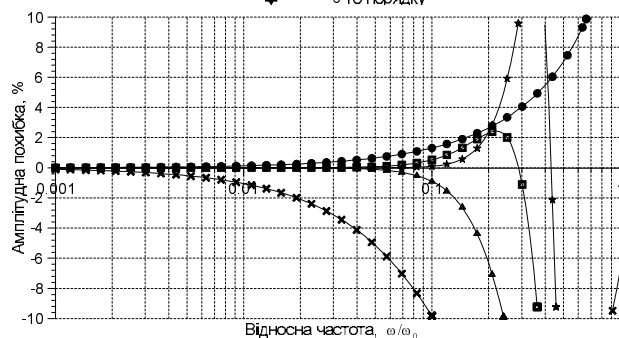


**Явні формули Адамса**

- 1-го порядку
- × 2-го порядку
- ▲ 3-го порядку
- 4-го порядку
- ★ 5-го порядку
- ◆ 6-го порядку

**Неявні формули Адамса**

- 1-го порядку
- × 2-го порядку
- ▲ 3-го порядку
- 4-го порядку
- ★ 5-го порядку
- ◆ 6-го порядку



**Формули Гауса (ФДН)**

- 1-го порядку
- × 2-го порядку
- ▲ 3-го порядку
- 4-го порядку
- ★ 5-го порядку

**Формули Рунге-Кутта**

- 1-го порядку
- × 2-го порядку (формула Ейлера-Коші)
- + 2-го порядку (формула Хена)
- ▲ 3-го порядку
- 4-го порядку

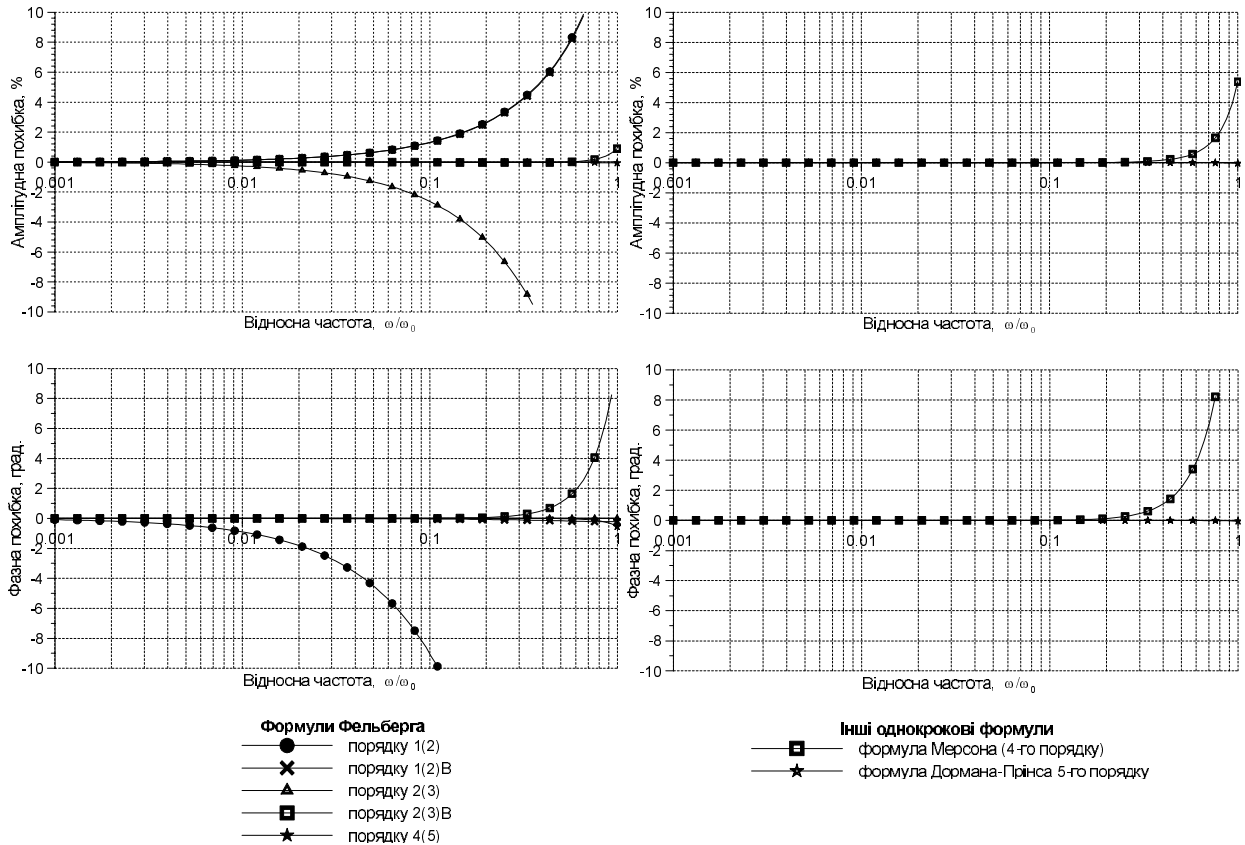


Рис.2. Частотні характеристики деяких числових методів.

глядається апроксимація сигналу поліномами нульового і першого порядку). Як видно з графіків частотних похибок (рис.2), високий порядок формули числового інтегрування не завжди забезпечує придатні частотні характеристики для широкого спектра вхідного сигналу – вище третього–четвертого порядків вираш практично відсутній.

**Другий критерій** – стійкість числового методу, що можна проаналізувати, як і в прикладній математиці, розв'язуючи тестове диференціальне рівняння (1), але при цьому використовується підхід, що описаний в [2]: розглядати точність апроксимації числовим методом аналітичного розв'язку (експоненти  $y(t) = e^{-t}$ , що зводиться до рекурентного рівняння  $y_{i+1} = y_i e^{-h}$ ) для різних значень кроку розв'язання. Для прикладу розглянемо знову ж таки неявну формулу Адамса третього порядку і формулу Рунге-Кутта третього порядку.

### Неявна формула Адамса третього порядку

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5y'_{i+1} + 8y'_i - y'_{i-1}); \text{ підставляючи значення похідної } (y' = -y) \text{ з рівняння}$$

(1) отримаємо  $y_{i+1} = y_i - \frac{h}{12}(5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1})$ . Зведемо подібні члени і з урахуванням

$$y_{i+1} = y_i e^{-h} \Rightarrow y_{i-1} = y_i e^h \text{ (для точного розв'язку) отримаємо } y_{i+1} = y_i \left( \frac{12 - 8h + he^h}{12 + 5h} \right).$$

В останній формулі вираз  $\frac{12-8h+he^h}{12+5h}$  при  $y_i$  є апроксимацією експоненти  $e^{-h}$  (див. точний розв'язок) і, власне кажучи, значення  $e^h$  у тому виразі теж повинне знаходитись з цієї апроксимації – тобто, має відбутись свого роду рекурсія. Введення цієї рекурсії (береться не  $e^h$ , а його апроксимація даною формулою) призводить до появи розривної функції (у місцях наявності полюсів), особливо в методах високих порядків для кроку  $h \gtrsim 1$ . Методи Гіра чи, як їх ще називають, ФДН (формули диференціювання назад) у своїх апроксимаціях  $e^{-h}$  дають для кроку  $h > 1$  велику кількість розривних точок з використанням рекурсивного визначення  $e^h$ .

### Формула Рунге-Кутта третього порядку

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 ;$$

Підставивши значення похідної, отримаємо

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = -hy_i ;$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) = -h\left(y_i - \frac{hy_i}{2}\right) ;$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) = hf(x_{i+1}, y_i - k_1 + 2k_2) = -h\left(y_i - hy_i + 2h\left(y_i - \frac{hy_i}{2}\right)\right),$$

звідки  $y_{i+1} = y_i \left(1 - h\left(1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h}{3}\right)\right)\right)$ .

У випадку формули Рунге-Кутта вираз біля  $y_i$  є апроксимацією точного значення  $e^{-h}$  його обмеженим розкладом у ряд.

Для частини числових методів графіки залежності апроксимуючого виразу від кроку  $h$  порівняно із загасаючою експонентою (суцільна гладка лінія) показані на рис.3. Для стійкого загасаючого розв'язку апроксимаційний вираз при  $y_i$  за модулем не має перевищувати 1, інакше формула починає давати нестійкий розв'язок (за цим критерієм можна оцінити область допустимих значень кроку  $h$ ). Якщо ж апроксимоване числовим методом значення  $e^{-h}$  знаходиться в межах від -1 до 0, то отримуємо знакозмінний вираз біля  $y_i$  в рекурентній формулі та, відповідно, знакозмінний загасаючий розв'язок, про що і йшлося на початку статті з посиланням на неявний метод трапецій (рис.1).

Як видно з рис.3 практично всі формули числового інтегрування забезпечують задовільну апроксимацію  $e^{-h}$  лише для  $h \leq 1$ , що в поєднанні з критерієм частотних характеристик і визначає реальну поведінку методу під час застосування. З поданих графіків видно перевагу неявних методів Адамса щодо значення області стійкості. Також розширює область стійкості в однокрокових методах підвищення їх порядку (найбільшу область стійкості мають формули Фельберга четвертого порядку і Дормана-Прінса п'ятого порядку). Стосовно методів ФДН (Гіра) треба наголосити, що врахування “передісторії” (попередніх кроків) розширює область стійкості через точнішу апроксимацію експоненти, але ці формули вимагають додаткового дослідження у зв'язку з появою особливих точок на кривій апроксимації.

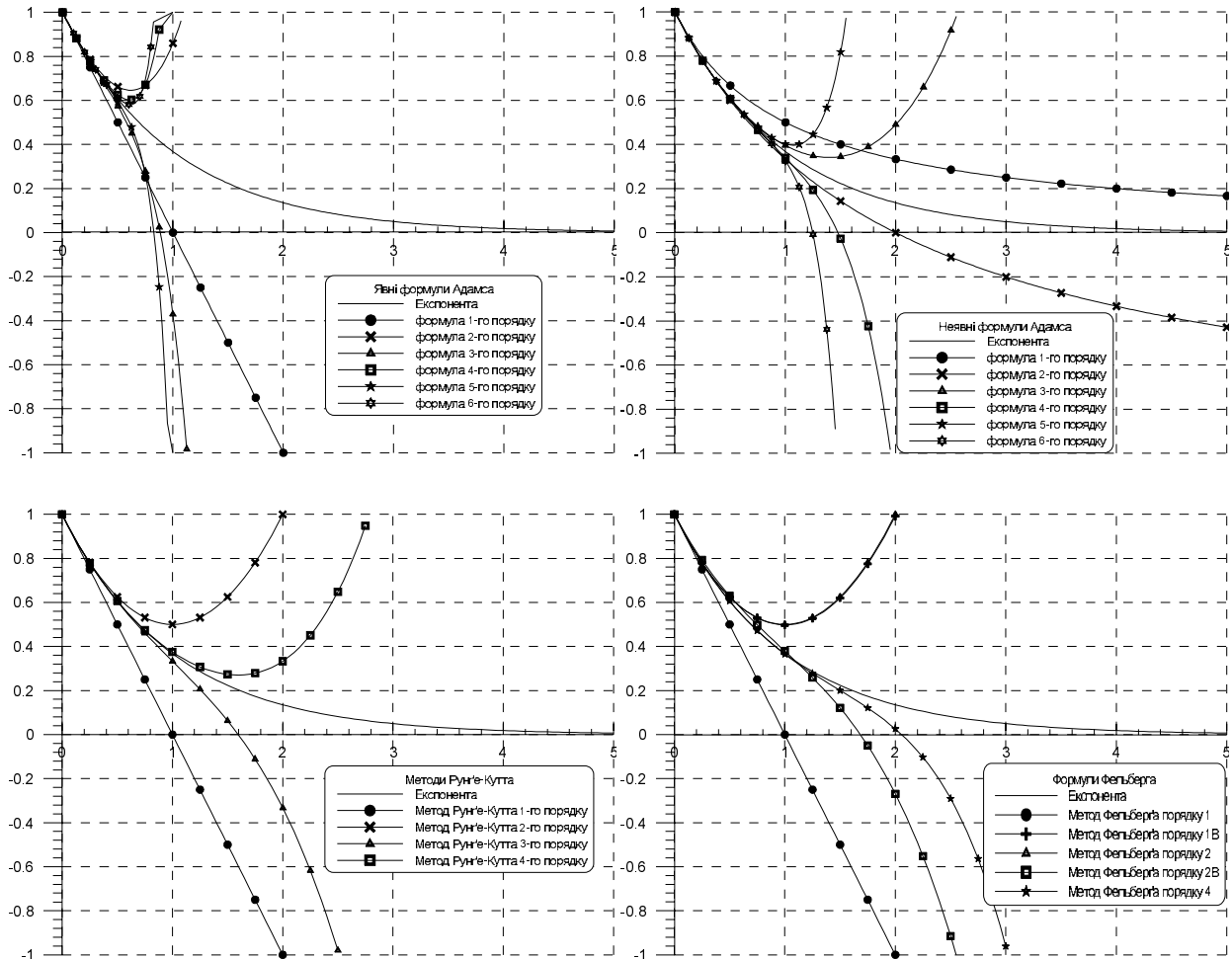


Рис.3. Апроксимація експоненти деякими числовими методами.

### Висновки

Аналіз розглянутих числових методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь засвідчив, що

**по-перше**, високий порядок (вище 3–4-го) не забезпечує суттєвого зростання точності дискретної апроксимації ідеального інтегратора у задачах моделювання керованих електро-механічних систем;

**по-друге**, основним недоліком розглянутих числових методів є незадовільна апроксимація експоненційної складової розв'язання диференціального рівняння для випадку, коли крок розв'язку  $h$  перевищує сталу часу  $T$  диференціального рівняння  $T \frac{dy}{dt} + y = x$ .

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М., 1969. 2. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Пер. с англ.: 2-е изд., стереотипное. М., 1977. 3. Мороз В.І. Аналіз частотних характеристик чисельних методів розв'язку звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1995. № 288. С.58–66. 4. Ту Ю.

*Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., 1964. 5. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М., 1990. 6. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные процедуры: Пер. с англ. М., 1980.*

УДК 658.283.1

Никонець Л., Маліновський А., Комаров В., Натальченко В., Черемних Є.  
ДУ “Львівська політехніка”, кафедра ЕС

## СИНТЕЗУВАННЯ І ТЕСТУВАННЯ МОДЕЛІ ТІЛА ЛЮДИНИ ЯК ЕЛЕМЕНТА ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

© Никонець Л., Маліновський А., Комаров В., Натальченко В., Черемних Є., 2000

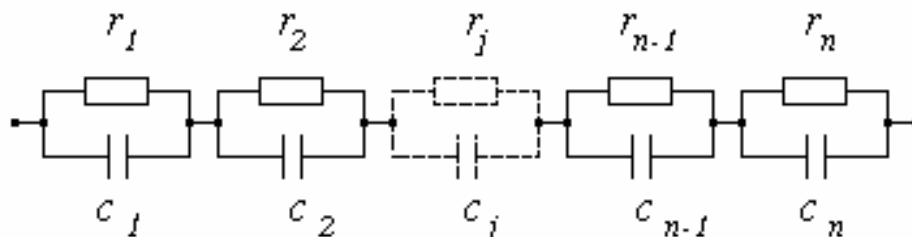
**У статті наведений алгоритм синтезування та результати тестування лінійної моделі тіла людини як елемента електричного кола на основі його частотної характеристики.**

Дослідження дії електричного струму на людину непрямими методами в широкому діапазоні зміни факторів впливу можливе на основі моделювання явищ, пов'язаних з такою дією.

Експерименти на математичних моделях дають змогу значно скоротити необхідну кількість фізичних експериментів на людях, а також отримати результати в широкому діапазоні зміни параметрів – як людини, так і факторів дії. Особливо цінними можуть бути результати математичних експериментів в діапазоні небезпечних напруг.

Інформаційною базою для розроблення моделі стали власні фізичні експерименти авторів, а також опубліковані результати фізичних експериментів інших дослідників, а також статистика електротравматизму [1, 2]. Використовувались матеріали експериментальних досліджень у вигляді частотних, вольтамперних і амперсекундних характеристик тіла людини.

Запропонована лінійна заступна схема (модель) тіла людини як елемента електричного кола – це ланцюгова схема, кожна  $j$  ланка якої складається з паралельно з'єднаних резистора  $r_j$  і конденсатора  $c_j$  (див. рисунок).



Заступна схема (модель) тіла людини.