УДК 681.14:517.11

Ф. Гече*, А. Батюк, В. Коцовський ***
*Ужгородський державний університет,
**НУ “Львівська політехніка”

ВЛАСТИВОСТІ БУЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ, РЕАЛІЗОВНИХ НА ДВОПОРОГОВИХ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ.

In this paper the Boolean functions are considered and the conditions of thein realization are established on double-thresholded neuronal elements.On the basis of study the properties of spectral parameters the criterions of Boolean functions realization are obteined by one double-thresholded neuronal element.

Розглядаються бульові функції і встановлюються умови їх реалізовності на двопорогових нейронних елементах. На основі дослідження властивостей спектральних параметрів отримано критерії реалізовності бульових функцій одним двопороговим нейронним елементом.

Нехай $G=\{-1, 1\}$, G_n – n-декартова степінь G. Функцію виду

$$f: G_n \to G \qquad (1)$$

будемо називати бульовою функцією в алфавіті G. Надалі будемо розглядати лише відображення виду (1), називаючи їх скорочено бульовими функціями, і будемо для них використовувати позначення $f(x_1, ..., x_n)$ або $f(\boldsymbol{x})$.

Якщо $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in G_n$, $\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in R^n$ то величину

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

будемо називати зваженою сумою, що відповідає вектору $\boldsymbol{x}$.

Кажуть, що двопороговий нейронний елемент зі структурою $s = (\boldsymbol{w}; p_1; p_2)$ і міткою a ($\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in R^n$ – ваговий вектор, $p_1, p_2 \in R$ – пороги, $a \in G$) реалізує бульову функцію $f(x_1, ..., x_n)$, якщо

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} -a, \ p_1 < (w,x) < p_2 \\ a, \text{ у протилежному випадку} \end{cases} \qquad (2)$$

Двопороговий нейронний елемент зі структурою s і міткою a будемо скорочено позначати ДНЕ$_{s,\,a}$. Визначимо функціонал $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ таким чином

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = ((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - p_1)\cdot((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - p_2). \qquad (3)$$

Структуру s назвемо допустимою, якщо для всіх векторів $\boldsymbol{x}$ з множини G_n виконується умова $\varphi(s, \boldsymbol{x}) \neq 0$. Аналогічно до [1] можна показати, що клас функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах з допустимими структурами, збігається з класом бульових функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах з довільними структурами. Надалі будемо розглядати лише двопорогові нейронні елементи з допустимими структурами. В подальших дослідженнях будемо використовувати узагальнення методів, розроблених в [2].

Лема 1. *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} -a, \ \varphi(s,x) < 0 \\ a, \varphi(s,x) > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Доведення леми безпосередньо випливає з (2), (3) та з очевидного співвідношення $\varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0 \Leftrightarrow p_1 < (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < p_2$.

Теорема 1. *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх наборів* $\boldsymbol{x}$ *з множини* G_n *виконується умова*

$$f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}) = a|\varphi(s,\boldsymbol{x})| \qquad (5)$$

Доведення випливає з еквівалентності формул (4) та (5), яка перевіряється безпосередньо для випадків $\varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0$ та $\varphi(s, \boldsymbol{x}) > 0$.

Розглянемо відображення виду $h : G_n \to R$. Для зручності запису аналогічно до [2] будемо використовувати такі позначення

$$<h(\boldsymbol{x})> = \sum_{\boldsymbol{x}\in G_n} h(\boldsymbol{x}).$$

Тоді справедливою є

Лема 2. *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція,* s *– допустима структура. Тоді має місце нерівність*

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>| \le <|\varphi(s,\boldsymbol{x})|> \qquad (6)$$

причому у випадку точної рівності в (6) *бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,1}$ *або* ДНЕ$_{s,-1}$.

Доведення. Справедливі співвідношення

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>| \le <|f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})|> = <|\varphi(s,\boldsymbol{x})|>.$$

Якщо бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на ДНЕ$_{s,\,a}$, то знайдеться вектор $\boldsymbol{x} \in G_n$, на якому порушується умова (5). Тоді в суму $<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>$ входять доданки різних знаків. Тому має місце строга нерівність

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>| < <|f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})|>.$$

Тоді в (6) рівність неможлива.

Теорема 2. *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})> = a <|\varphi(s,\boldsymbol{x})|> \qquad (7)$$

Доведення. Необхідність можна легко отримати, просумувавши обидві частини рівності (5) по всіх $\boldsymbol{x} \in G_n$. Для доведення достатньої частини теореми досить помітити, оющо з рівності (7) випливає рівність у співвідношенні (6), що згідно з лемлю 2 є достатньою умовою реалізовності бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ на ДНЕ$_{s,\,a}$.

Наслідок. *Якщо бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, $g(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, то*

$$|<g(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>| \le |<f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x})>|,$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ *або* $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$.

Доведення наслідку безпосередньо випливає з леми 2 з урахуванням теореми 2.

Задамо на множині G_n довільний лінійний порядок і будемо вважати, що елементи множини G_n занумеровані згідно з цим порядком. Виходячи з довільної бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ визначимо бульові функції $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., 2^n$ таким чином

$$f_i(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}_j), \text{при } j \ne i \\ -f(\boldsymbol{x}_j), \text{при } j = i \end{cases} \qquad (8)$$

Теорема 3. *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, бульові функції* $f_i(\boldsymbol{x})$ *визначені згідно* (8), s *– допустима структура. Тоді, якщо для всіх* $\boldsymbol{x} \in G_n$, *виконується одна з умов*

$$f_i(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, ..., 2^n;$$

$$f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}) \le f_i(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, ..., 2^n;$$

то бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,1}$ (ДНЕ$_{s,-1}$ *відповідно*).

Доведення. Якщо бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на ДНЕ$_{s,\,a}$, то знайдеться $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ таке, що $\boldsymbol{x}_i$ не задовольняє (5). Тоді

$$f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}_i) > f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}_i) \text{ або } f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}_i) < f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\ \varphi(s,\boldsymbol{x}_i),$$

тобто для $f_i(\boldsymbol{x})$ не виконується умова 1(умова 2 відповідно).

Визначимо для бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ набір спектральних параметрів

$$b_{ij} = <x_i(\boldsymbol{x})\cdot x_j(\boldsymbol{x})\ f(\boldsymbol{x})>,\quad b_i = <x_i(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{x})>,\quad b_0 = <f(\boldsymbol{x})> \qquad (9)$$

і визначимо функцію $\Phi(s, f)$ так

$$\Phi(s, f) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\omega_i\omega_j - (p_1 + p_2)\sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i + p_1 p_2 b_0 \qquad (10)$$

Теорема 4. *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi(s, f) = a\langle|\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle \qquad (11)$$

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що

$$\Phi(s, f) = \langle f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle.$$

Для цього використаємо рівність

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i\omega_j x_i(\boldsymbol{x}) x_j(\boldsymbol{x}) - (p_1 + p_2)\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i(\boldsymbol{x}) + p_1 p_2\ ,$$

яка являє собою розгорнутий запис (3), і змінимо у формулі для $\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle$ порядок підсумовування

$$\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\ \varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle = \langle(\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i\omega_j x_i(\boldsymbol{x}) x_j(\boldsymbol{x}) - (p_1 + p_2)\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i(\boldsymbol{x}) + p_1 p_2) f(\boldsymbol{x})\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i(\boldsymbol{x}) x_j(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\rangle \omega_i\omega_j - (p_1 + p_2)\sum_{i=1}^{n} \langle x_i(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\rangle \omega_i + p_1 p_2 \langle f(\boldsymbol{x})\rangle.$$

Враховуючи вигляд спектральних параметрів (9), отримаємо потрібну рівність. Тоді з еквівалентності умов (7) і (11) та з теореми 2 випливає справедливість твердження теореми 4.

Наслідок. *Якщо бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, $g(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, то*

$$|\Phi(s, g)| \le |\Phi(s, f)|,$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ або } g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}).$$

Доведення безпосередньо випливає з наслідку до теореми 1 та попередньої теореми.

Для функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах, можна навести теореми, аналогічні до відомих теорем Чоу, які подано в [2] для однопорогових нейронних елементів.

Теорема 5. *Якщо у бульових функцій* $g(\boldsymbol{x})$ *і* $f(\boldsymbol{x})$ *збігаються параметри* (9), *то вони одночасно реалізуються або не реалізуються на* ДНЕ$_{s,\,a}$.

Доведення. У випадку збігу параметрів (9) для бульових функцій $g(\boldsymbol{x})$ і $f(\boldsymbol{x})$ відповідні функції $\Phi(s, f)$ та $\Phi(s, g)$ також збігаються. Звідси, враховуючи (11), отримуємо твердження теореми.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови попередньої теореми і принаймі одна з бульових функцій* $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, *то* $g(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x})$(*бульова функція* $g(\boldsymbol{x})$ тотожньо дорівнює бульовій функції $f(\boldsymbol{x})$).

Доведення. Для доведення теореми використаємо попередню теорему, згідно якої бульові функції $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ реалізується на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_{s,\,a}$. Але якщо функції реалізуються на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_{s,\,a}$, то вони очевидно збігаються.

Приклад. Покажемо, що вже при $n = 3$, знайдеться така функція $f(x_1, x_2, x_3)$, яка не реалізується на жодному двопороговому нейронному елементі. Приймаємо

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\cdot\ x_2\cdot\ x_3$, $g(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_2, x_3)$.

Тоді безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що відповідні спектральні параметри (9) для функцій $f(x_1, x_2, x_3)$ і $g(x_1, x_2, x_3)$ збігаються і дорівнюють 0. Тоді згідно з теоремою 5 бульові функції $f(x_1, x_2, x_3)$ і $g(x_1, x_2, x_3)$ одночасно реалізуються або не реалізуються на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі. Припустивши реалізовність бульової функції на деякому ДНЕ$_{s,\,a}$, за теоремою 6 отримаємо, що

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$$

Але оскільки $f(x_1, x_2, x_3) \neq g(x_1, x_2, x_3)$, то бульова функція $f(x_1, x_2, x_3)$ не реалізується на жодному двопороговому нейронному елементі.

З формули (11) легко отримуються співвідношення, наведені в [3]. Нехай π – елемент симетричної групи підстановок S_n, $\boldsymbol{g} = (g_1, ..., g_n) \in G_n$, $s = ((\omega_1, ..., \omega_n); p_1; p_2)$ – деяка допустима структура.

Теорема 7. *Бульова функція* $f(x_1, ..., x_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

Бульова функція $f_\pi(x_1, ..., x_n) = f(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$ *реалізується на* ДНЕ$_{t,\,a}$,
де $t = ((\omega_{\pi(1)}, ..., \omega_{\pi(n)}); p_1; p_2)$

Бульова функція $f_{\boldsymbol{g}}(x_1, ..., x_n) = f(g_1x_1, ..., g_nx_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{t,\,a}$,
де $t = ((g_1\omega_1, ..., g_n\omega_n); p_1; p_2)$

Бульова функція $f_{-}(x_1, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,-a}$.

Доведення. Для доведення досить використати теорему 4, властивості функції $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ та формули для спектральних параметрів функцій $f_\pi(x_1, ..., x_n)$, $f_{\boldsymbol{g}}(x_1, ..., x_n)$ і $f_{-}(x_1, ..., x_n)$, наведені в [2].

Висновки: Теореми 1-7 визначають критерії реалізовності бульових функцій одним двопороговим нейронним елементом. Потрібно зазначити, що властивості звичайних нейрофункцій, наведені в [2], і властивості функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах, багато в чому є аналогічними. Ця аналогія зберігається і для функцій, реалізовних на більш складних структурах. Зокрема, всі отримані результати можна легко узагальнити, якщо ввести до розгляду поняття так званого k-порогового нейронного елемента або якщо розглядати замість бульових функцій дискретні функції з бульовими аргументами. Для перевірки реалізовності бульових функцій на двопорогових нейронних елементах можна аналогічно до [2] використовувати методи апроксимації функціоналу $<|\varphi(s, \boldsymbol{x})|>$ та ітераційні методи.

1. Яджима С., Ибараки Т. Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969. – Вып.6. – С. 72–81. 2. Дертоузос М. Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. – 342 с. 3. Ф. Е. Гече. Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. мат. Вип. 4. – 1999. – С. 17–24.