

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Основи теплоперенесення в елементах оптичного приладобудування

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом підготовки «Приладобудування»*

Київ
НТУУ «КПІ»
2012

УДК 681.7:536.24(075,8)

ББК 31.31я73

О-75

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України
(Лист № 1/11-9530 від 13.10.2011 р.)*

Рецензенти:

С. О. Воронов, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

А. М. Гусак, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

В. М. Шаранов, д-р техн. наук, проф.,
Черкаський державний технологічний університет

Відповідальний редактор

І. В. Максимчук, канд. техн. наук, доц.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

**О-75 Основи теплоперенесення в елементах оптичного
приладобудування [Текст] : навч. посіб. / В. А. Ващенко,
В. С. Антонюк, Г. С. Тимчик та ін. – К. : НТУУ «КПІ», 2012. – 412 с.
ISBN 978-966-622-478-4**

Систематизовано та лаконічно викладено елементи векторного і тензорного аналізу та основи теорії теплоперенесення в різних середовищах. Розглянуто основні аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності для необмежених, напівобмежених та обмежених середовищ. Наведено результати практичного використання методів теорії теплопровідності у процесі розроблення сучасних нанотехнологій електронної обробки оптичних матеріалів та експлуатації виробів на їх основі: особливості термічної дії потоку електронів на оптичні матеріали, нормативні вимоги до якості оптичних виробів і сучасне електротехнічне обладнання для їх поверхневої електронної обробки; моделювання та розрахунків впливу керованих параметрів стрічкового електронного потоку на температурні поля в оброблюваних оптичних матеріалах; моделювання та розрахунків термонапруженого стану поверхні ІЧ-виробів.

Для студентів, магістрів та аспірантів технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти України, які вивчають застосування методів теорії теплоперенесення в інженерно-технологічних задачах. Може бути корисним науковим співробітникам та інженерам, що займаються проблемами оброблення матеріалів концентрованими потоками енергії, а також фахівцям у галузі аерогазодинаміки і теорії теплопровідності.

УДК 681.7:536.24(075,8)

ББК 31.31я73

ISBN 978-966-622-478-4

© В. А. Ващенко, В. С. Антонюк,
Г. С. Тимчик, І. В. Яценко,
М. О. Бондаренко, О. В. Кириченко,
М. П. Рудь, 2012
© НТУУ «КПІ» (ПБФ), 2012

З М І С Т

Передмова	8
Розділ 1 Елементи векторного та тензорного аналізу	11
1.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт	11
1.2 Векторне поле. Потік векторного поля. Дивергенція	16
1.3 Теорема Гаусса-Остроградського	23
1.4 Циркуляція векторного поля. Ротор	25
1.5 Теорема Стокса	29
1.6 Диференціальні операції над скалярними та векторними полями	30
1.7 Основні уявлення про тензор	34
1.8 Тензорна алгебра та властивості тензорів	41
1.9 Основи тензорного аналізу	46
Контрольні питання та завдання	50
Розділ 2 Основи теорії теплоперенесення в різних середовищах	51
2.1 Види передачі тепла. Теплопровідність твердих тіл, рідин та газів	51
2.2 Основні поняття та визначення теорії теплопровідності	54
2.3 Диференціальне рівняння теплопровідності для нерухомих тіл ...	59
2.4 Диференціальне рівняння теплопровідності з рухомим джерелом теплової дії	64
2.5 Диференціальне рівняння теплопровідності в деформованому твердому тілі	66
2.6 Диференціальне рівняння теплопровідності для анізотропних твердих тіл	76
2.7 Постановка крайових задач теорії теплопровідності	83
2.7.1 Граничні умови I - IV родів	84
2.7.2 Класифікація крайових задач та методів їх розв'язку	87
Контрольні питання та завдання	91

Розділ 3 Основи конвекційного теплообміну	93
3.1 Основні поняття та визначення	93
3.2 Рівняння конвекційного перенесення	96
3.3 Основи теплообміну при обтіканні газовим потоком поверхні твердого тіла	110
3.4 Зв'язані задачі конвекційного теплообміну між газовим потоком та стінкою	126
3.5 Теплообмін при перебігу газів з великими швидкостями	134
Контрольні питання та завдання	141
Розділ 4 Розв'язок задач теплопровідності методами інтегральних перетворень Фур'є, методом розділення змінних та методом розкладу за власними функціями	142
4.1 Розв'язок одновимірних задач теплопровідності для необмежених та напівобмежених тіл методами інтегральних перетворень Фур'є	142
4.1.1 Розв'язок задач теплопровідності для необмежених тіл	142
4.1.2 Розв'язок задач теплопровідності для напівобмежених тіл	151
4.2 Розв'язок одновимірних задач теплопровідності для обмежених тіл методом розділення змінних	160
4.2.1 Загальні принципи методу розділення змінних	160
4.2.2 Перетворення неоднорідних граничних умов до однорідних при використанні методу розділення змінних	165
4.2.3 Розв'язок складних задач теплопровідності методом розділення змінних	170
4.3 Розв'язок неоднорідних задач теплопровідності методом розкладання за власними функціями	175
4.3.1 Побудова розв'язку методом розкладання за власними функціями	176

4.4	Розв'язок двох- та трьохвимірних задач теплопровідності методами інтегральних перетворень Фур'є та розділення змінних	181
4.4.1	Розв'язок двохвимірних задач теплопровідності	181
4.4.2	Розв'язок трьохвимірних задач теплопровідності	196
	Контрольні питання та завдання	205
Розділ 5	Сутність методу теплового впливу низькоенергетичного стрічкового електронного потоку на оптичні матеріали	207
5.1	Нормативні вимоги до якості оптичних виробів	207
5.2	Особливості термічного впливу потоку електронів на поверхню неорганічного оптичного діелектрика	217
5.3	Електротехнічне обладнання для поверхневої електронної обробки виробів із оптичних матеріалів	218
5.3.1	Технологічне оснащення обладнання	222
5.3.2	Високовольтні джерела живлення	230
5.3.3	Електровимірювальна техніка для контролю параметрів якості поверхонь оптичних матеріалів при електронній обробці	231
5.3.4	Електротехнічні схеми автоматичного керування технологічним процесом обробки	235
	Контрольні питання та завдання	261
Розділ 6	Методи розрахунків теплової дії стрічкових електронних потоків на поверхні виробів з оптичних матеріалів	263
6.1	Загальні принципи моделювання процесів дії концентрованих потоків енергії на матеріали	264
6.2	Математичне моделювання процесу нагрівання елементів із оптичних матеріалів різної геометричної форми та розмірів	267
6.2.1	Математична модель процесу нагрівання тонкоплівкового елемента	270

6.2.2	Математична модель процесу нагрівання тонкої пластини великих розмірів	275
6.2.3	Математична модель процесу нагрівання прямокутного бруска великої товщини	278
6.2.4	Математична модель процесу нагрівання прямокутного бруска малої товщини	280
6.2.5	Математична модель процесу нагрівання прямокутного елемента великої товщини	283
6.2.6	Математична модель процесу нагрівання прямокутного елемента малої товщини	286
6.2.7	Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на температурні поля в елементах із оптичного скла та кераміки, вибір граничних режимів нагрівання, зіставлення їх з експериментальними даними	288
6.3	Математичне моделювання термопружних напружень в оптичних елементах	293
6.3.1	Математична модель термопружних напружень в оптичних пластинах	294
6.3.2	Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на розподіл термопружних напружень в елементах із оптичної кераміки, вибір граничних режимів поверхневого термічного зміцнення, зіставлення їх з експериментальними даними	298
6.4	Математичне моделювання процесу поверхневого оплавлення оптичних пластин та прямокутних елементів із оптичного скла ..	301
6.4.1	Математична модель процесу оплавлення оптичних пластин	302
6.4.2	Математична модель процесу оплавлення оптичних прямокутних елементів	310

6.4.3	Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на швидкість та глибину оплавлення елементів із оптичного скла, вибір граничних режимів поверхневого оплавлення, зіставлення їх з експериментальними даними	315
	Контрольні питання та завдання	321
Розділ 7	Методи розрахунків нагрівання поверхні виробів з оптичних матеріалів при їхньому надзвуковому обдуванні потоком повітря	323
7.1	Термогазодинамічні процеси на поверхні пластини при її надзвуковому обдуванні потоком повітря	324
7.2	Процеси нагрівання пластини при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничного шару	329
7.3	Розрахунки термопружних напружень та визначення критичних умов екстремальних термічних дій на поверхню пластини	336
7.4	Термогазодинамічні процеси на поверхні напівсферичного обтічника при його надзвуковому обдуванні потоком повітря	340
7.5	Математичне моделювання нагрівання напівсферичного обтічника при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничного шару	343
7.6	Розрахунок термопружних напружень та визначення критичних умов екстремальних термічних дій на поверхню обтічника	348
	Контрольні питання та завдання	351
	Глосарій	353
	Список літератури	359
	Додатки	371

ПЕРЕДМОВА

Основу сучасних високоефективних процесів обробки оптичних матеріалів складають високотемпературні технологічні процеси (ВТП), які реалізуються в основному при використанні концентрованих потоків енергії (КПЕ), до яких відносяться сфокусовані в області малих розмірів потоки заряджених часток (електронів, іонів), лазерне випромінювання (імпульсно-періодичне та безперервне) з різною довжиною хвилі, імпульсні та безперервні потоки низькотемпературної плазми, радіаційні теплові потоки, високотемпературні понадзвукові газові потоки, хвилі горіння тощо. Важливість ВТП зумовлена їхнім напрямком на створення оптичних виробів нової техніки (космічна техніка, літальні апарати, інтегральна оптика тощо), що в ряді випадків дозволяє здійснити якісний крок в розвитку відповідної галузі техніки чи намітити рішення важливих практичних задач, вирішувати які іншими методами важко чи взагалі неможливо.

Фізичні та фізико-хімічні процеси, які протікають в зонах дії КПЕ, досить складні, взаємопов'язані та взаємозумовлені, що ускладнює інтерпретацію природних експериментів, їх теоретичне тлумачення і, відповідно, покращення технологічних параметрів та їхньої керованості [26, 29, 114]. Саме тому процеси взаємодії КПЕ з оптичними матеріалами на теперішній час є маловивченими. В зв'язку з цим важливо мати методологію підходу до наукового вивчення процесів взаємодії КПЕ з такими матеріалами, оскільки, наприклад, детальне експериментальне вивчення усіх складових процесів представляє досить трудомісткий та дорогий процес, а в деяких випадках і принципово неможливий. Тому основними методами дослідження таких процесів є методи математичного моделювання, які базуються на спрощених фізичних моделях процесів взаємодії КПЕ з матеріалами та частковою перевіркою адекватності цих моделей експериментальним даним (наприклад, вимірювання температури елементів, які оброблюються, глибини та структури зони дії чи товщини проплавленого

шару, отримання мікрознімків процесів взаємодії та інше). При цьому, як показує більшість експериментальних досліджень, основу ВТП, так званий «фон», складають процеси перенесення тепла, які ускладнюються іншими фізичними процесами: термічним зміцненням, плавленням, випаровуванням, випромінюванням тощо.

Тому, в навчальному посібнику, в першій його частині (розділи 1-4) послідовно та лаконічно викладаються теоретичні основи теплоперенесення в оптично-прозорих тілах різної геометричної форми та розмірів: елементи векторного та тензорного аналізу, види передачі тепла та отримання рівнянь теплопровідності в різних середовищах з нерухомими та рухомими джерелами теплової дії, постановка крайових задач теплоперенесення, аналітичні та чисельні методи їхнього розв'язку; при цьому, при виборі задач особлива увага приділяється на процеси теплоперенесення, що складають основу фізико-технічних методів обробки матеріалів.

В другій його частині (розділи 5-7) розглядаються питання застосування викладених вище методів теорії теплоперенесення для розрахунку процесів електронної обробки оптичні матеріали та експлуатації виробів на їхній основі: описується сутність процесів термічної дії потоку електронів на оптичні матеріали, а також основи розробленого авторами сучасного електротехнічного обладнання для поверхневої мікрообробки виробів із різних оптичних матеріалів (технологічне оснащення, високовольтні джерела живлення та електротехнічні схеми управління усім процесом обробки); приводяться моделі та розрахунки теплофізичних процесів в зонах дії стрічкових електронних потоків на оптичні матеріали, а також процесів нагрівання поверхні виробів на основі цих матеріалів в умовах їхньої експлуатації (надзвуковому обдуванні потоком повітря). За вказаними напрямками вперше в Україні під керівництвом доктора технічних наук, професора В. А. Ващенка (Черкаський державний технологічний університет) був створений (1985 – 2010 роки) та успішно розвивається новий науковий напрямок з електронно-променевої мікрообробки оптичних

матеріалів стрічковими електронними потоками, який знайшов широке застосування в мікрооптиці, інтегральній та волоконній оптиці, ІЧ-техніці на вітчизняних та закордонних підприємствах, які спеціалізуються в галузі оптичного приладобудування (ВО «завод Арсенал» та ЦКБ «Арсенал» (м.Київ), Науково-дослідний інженерно-впровадjuвальний центр пріоритетних технологій оптичної техніки (м.Київ), НВК «Фотоприлад», НВК «Аскенн» та НДІ «Аккорд» (м.Черкаси), Черкаський приладобудівний завод, Черкаський завод телеграфної апаратури та Черкаський державний завод «Хімреактив», а також ДУП МосНВО «Радон» (м.Москва, Росія), ТДВ «Микротестмашины» (м.Гомель, Білорусь), Micro-Optics Laser Systems (LIMO) (м.Дортмунд, Німеччина) та інші).

Розділ 1 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

В даному розділі наводиться стислий зміст основних понять курсу векторного та тензорного аналізу [3, 18, 46, 64, 72, 82, 103, 112], які необхідні для подальшого вивчення теоретичних основ процесів теплоперенесення в оптичних середовищах. Зважаючи на специфіку підготовки фахівців в області фізико-технічних методів обробки, автори акцентували увагу не стільки на доведенні теорем, скільки на освоєнні основних понять, їхнього «фізичного» змісту та можливостей застосування їх до реальних фізичних полів, в тому числі й до теплових.

1.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай задана область в просторі. Кажуть, що в області задане скалярне поле, якщо кожній точці M простору ставиться у відповідність деяке число $\varphi(M)$.

Як відомо, скаляр – це величина, яка повністю визначається в будь-якій системі координат одним числом (або функцією), яке в свою чергу не змінюється при зміні просторової системи координат. Наприклад, якщо φ – значення скаляру в одній системі координат, а φ' – значення скаляру в іншій системі координат, то $\varphi' = \varphi$.

Фізичні приклади скалярних полів: поле температур будь-якого тіла; поле густини зарядів в суцільному середовищі; поле густини маси будь-якого тіла.

Поверхня (лінія), на якій функція $\varphi(M)$ приймає сталі значення, називається поверхнею (ізолінією) рівня скалярного поля. Надаючи $\varphi(M)$ різні значення: $\varphi(M) = \text{const}$, отримаємо сімейство поверхонь (ліній) рівня даного скалярного поля.

Скалярне поле $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ називається таким, що диференціюється n разів, якщо функція $\varphi(x, y, z)$ диференційована n разів. Фізичні скалярні

поля можуть бути такими, що диференціюються необхідну кількість разів, а функція $\varphi(M)$ є функцією точки M простору і часу.

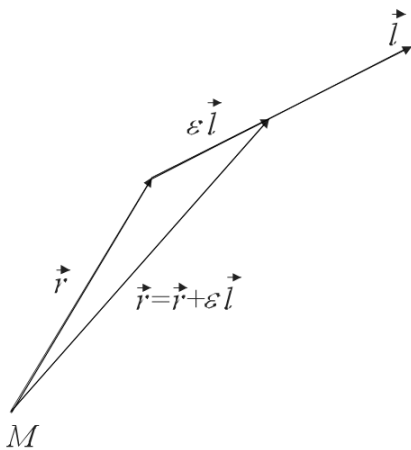


Рисунок 1.1 – Схема визначення похідної функції φ вздовж напрямку одиничного вектора \vec{l}

Похідна по напрямку. Нехай $\varphi(M)$ – функція скалярного поля. Виділимо в просторі деякий напрям, який буде характеризувати одиничний вектор $\vec{l}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ($|\vec{l}|=1$). Розглянемо мале переміщення вздовж цього напрямку на вектор $\varepsilon \vec{l}$ (рис. 1.1) $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon \vec{l}$).

Похідна в напрямі \vec{l} визначається як:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + \varepsilon \vec{l}) - \varphi(\vec{r})}{\varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (1.1)$$

Згідно визначенню – похідна в напрямі \vec{l} – це швидкість зміни функції вздовж цього напрямку.

Похідні в різних напрямках (при різних \vec{l}) різні. Різниця значень функції в близьких точках ($\varepsilon \rightarrow 0$) є повним диференціалом:

$$d\varphi = \varphi(x + dx, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (1.2)$$

При цьому $dx = \varepsilon l_x$, $dy = \varepsilon l_y$, $dz = \varepsilon l_z$, де $l_x = \cos \alpha$, $l_y = \cos \beta$, $l_z = \cos \gamma$ – направляючі косинуси вектора \vec{l} ($l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$).

Тому похідна в напрямі (1.1) запишеться так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \varepsilon l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \varepsilon l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \varepsilon l_z}{\varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z. \quad (1.3)$$

Наприклад, якщо $\vec{l}(0,0,1)$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Таким чином, якщо вектор

\vec{l} направлений так саме, як одна з координатних осей, то похідна в напрямі \vec{l} співпадає з відповідною частковою похідною.

Рівність (1.2) можна інтерпретувати як скалярний добуток двох векторів, один з яких – градієнт, інший – вектор \vec{l} .

Градієнтом скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ називається вектор-функція:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (1.4)$$

Тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори декартових осей.

Слово “градієнт” означає “зміну”, “крок” (від латинського “gradiens” – той, що крокує). З рівності (1.2) – (1.3)

витікає, що $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}} \varphi| |\vec{l}| \cos \theta = |\overrightarrow{\text{grad}} \varphi| \cos \theta, \text{ де } \theta \text{ – кут}$$

між векторами \vec{l} та $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ в точці M

(рис. 1.2). Величина $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ набуває максималь-

ного значення при $\theta = 0$, тобто в напрямі

$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ в даній точці. Таким чином, вектор $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ в даній точці вказує

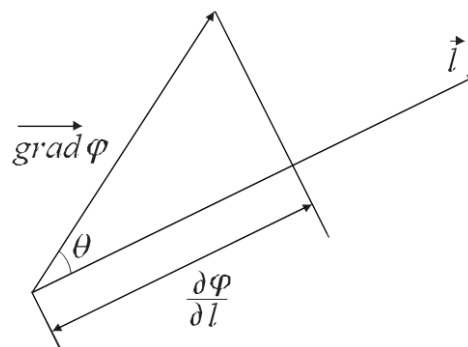


Рисунок 1.2 – Схема знаходження градієнта довільної скалярної функції φ

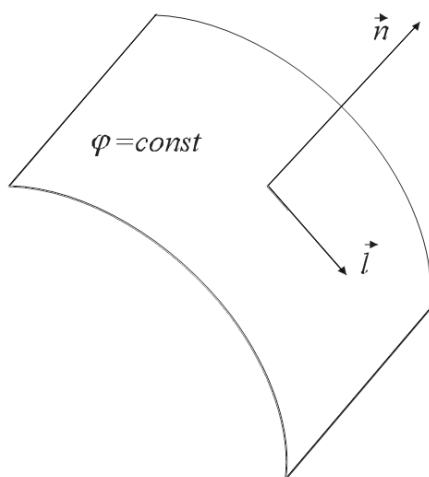


Рисунок 1.3 – Взаємне розташування довільної ізоповерхні $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, нормалі \vec{n} до неї та одиничного вектора \vec{l}

напрямом найшвидшого збільшення функції скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ в цій точці, $|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi|$ є швидкістю збільшення функції в цьому напрямі. Відзначимо, що модуль і напрям вектора $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ (як і будь-якого вектора) не змінюється при зміні системи координат.

Покажемо, що градієнт скалярного поля перпендикулярний поверхні постійного рівня – ізоповерхні (рис. 1.3).

Доведення. Розглянемо довільну ізоповверхню $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, \vec{n} – нормаль до поверхні в деякій точці. Проведемо через дану точку дотичну, яка характеризується одиничним вектором \vec{l} (рис. 1.3). Малі зсуви уздовж цієї дотичної не повинні змінити функцію φ (в межах першого порядку меншості ε):

$$\varphi(\vec{r} + \varepsilon \vec{l}) - \varphi(\vec{r}) = 0,$$

тобто $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{l}$. Таким чином, $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ перпендикулярний до \vec{l} . Це справедливо для будь-якої дотичної прямої в дотичній площині. Тому $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ співпадає з напрямом нормалі: $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ паралельний до \vec{n} , що й потрібно було довести.

Лінії скалярного поля. Так називаються лінії скалярного поля $\varphi(x, y, z)$, в точках яких градієнт розташовується вздовж дотичної. Нескінченно малий вектор $d\vec{r}(dx, dy, dz)$, розташований уздовж лінії поля, паралельний вектору $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$. Тому складові цих двох векторів пропорційні:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}. \quad (1.5)$$

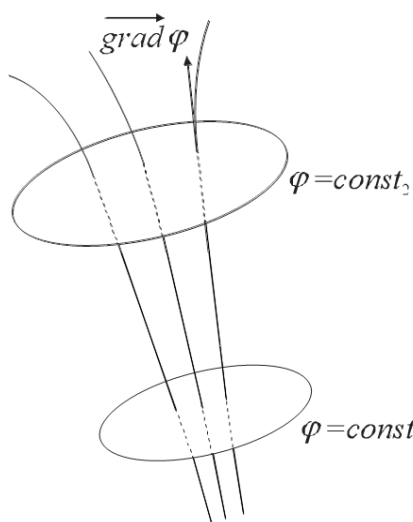


Рисунок 1.4 – Взаємне розташування ліній довільного скалярного поля φ та його поверхонь рівня

Рівність (1.5) є рівнянням ліній скалярного поля. Лінії скалярного поля, очевидно, ортогональні до поверхонь рівня поля (рис. 1.4), як і було доведено вище.

Сформулюємо основні властивості градієнта. Якщо $\varphi(M)$ та $\psi(M)$ – скалярні поля, для яких існують градієнти, а α, β – постійні, то для поля $W(M) = \alpha\varphi(M) + \beta\psi(M)$ існує градієнт, який дорівнює:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \beta \overrightarrow{\text{grad}} \psi. \quad (1.6)$$

Справедливість цієї рівності витікає з визначення градієнта. Цю властивість визначає лінійність градієнта.

Аналогічно обґрунтовуються рівності:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi\psi) = \varphi \overrightarrow{\text{grad}}\psi + \psi \overrightarrow{\text{grad}}\varphi, \quad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi \overrightarrow{\text{grad}}\varphi - \varphi \overrightarrow{\text{grad}}\psi),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(\varphi) = \frac{dF}{d\varphi} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi, \quad \overrightarrow{\text{grad}}W(\varphi, \psi) = \frac{dW}{d\varphi} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi + \frac{dW}{d\psi} \overrightarrow{\text{grad}}\psi. \quad (1.7)$$

Градієнт скалярного поля часто зручно розглядати як результат дії на скаляр поля диференціального оператора «набла», який позначається символом $\vec{\nabla}$. Оператор – це дія (готовність впливати на той вираз, що стоїть праворуч від нього). Символ $\frac{\partial}{\partial x}$ називається оператором часткової похідної по x . Під дією цього оператора на функцію $\varphi = \varphi(x, y, z)$ розуміють часткову похідну $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, тобто $\frac{\partial}{\partial x}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Аналогічно, $\frac{\partial}{\partial y}$ та $\frac{\partial}{\partial z}$ – оператори часткових похідних по y та по z .

Операції векторного аналізу зручно записувати і виконувати за допомогою символічного векторного оператора «набла» (або оператора Гамільтона):

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.8)$$

З порівняння формул (1.4), (1.8) отримуємо результат дії вектора $\vec{\nabla}$ на скалярну функцію $\varphi(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi. \quad (1.9)$$

Наприклад, в квантовій механіці оператор $p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, який діє на хвильову функцію $\exp\left(\frac{i p x}{\hbar}\right)$ частинки з фіксованим імпульсом, помножує цю функцію на так зване власне число p .

Квадрат оператора «набла» називають оператором Лапласа.

1.2 Векторне поле. Потік векторного поля. Дивергенція

Векторним полем називають частину простору, в кожній точці якого відповідно до певного закону заданий деякий вектор.

Говорять, що в області задане векторне поле, якщо кожній точці M простору ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{A}(M)$. З погляду математики задати векторне поле можна шляхом завдання векторної функції $\vec{A}(x, y, z)$ (яку вважають однозначною, безперервною та такою, що диференціюється).

Фізичні приклади векторних полів: електричне поле системи зарядів, яке характеризується в кожній точці вектором напруженості \vec{E} ; магнітне поле, утворене електричним струмом або змінним електричним полем, яке характеризується в кожній точці вектором магнітної індукції \vec{B} ; поле тяжіння, утворене системою мас, яке характеризується в кожній точці вектором сили тяжіння \vec{F} , яка діє в цій точці на одиницю маси; поле швидкостей потоку рідини, яке описується в кожній точці вектором швидкості \vec{V} . Векторним є також поле градієнта довільного скалярного поля.

Зручною геометричною характеристикою векторного поля $\vec{A}(M)$ є векторні лінії.

Векторною лінією поля $\vec{A}(x, y, z)$ називають криву, в кожній точці якої дотична має напрям вектора $\vec{A}(x, y, z)$ поля.

Векторні лінії поля швидкостей точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі – концентричні кола з центрами на осі обертання.

Векторні лінії поля тяжіння, електричного і магнітного полів називають силовими лініями, а поля швидкостей – лініями струму.

Так, наприклад, силовими лініями електричного поля двох різнойменних зарядів є криві, які починаються на одному заряді і закінчуються на іншому (або в нескінченності).

Силові лінії магнітного поля є замкнутими кривими.

Диференціальне рівняння векторних ліній в декартових координатах:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}. \quad (1.10)$$

Цю рівність виражає умова паралельності нескінченно малого елемента векторної лінії $d\vec{r}$ (з проєкціями dx, dy, dz) і вектора поля \vec{A} (проєкціями A_x, A_y, A_z).

Нехай задане деяке скалярне поле $f(M)$.

Розглянемо векторне поле градієнта, тобто поле $\vec{A}(M) = \overline{\text{grad}} f$. Векторні лінії цього поля ортогональні до поверхонь рівня $A = \text{const}$ (див. попередній параграф). Одночасно вони є лініями якнайшвидшої зміни функції $f(M)$.

Потік векторного поля через поверхню. Потоком векторного поля \vec{A} через поверхню S називається поверхневий інтеграл (по поверхні S) від скалярного добутку $\vec{A} \cdot \vec{n}$, де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до поверхні S . Якщо поверхня замкнута, то \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі. За визначенням потік – це скаляр.

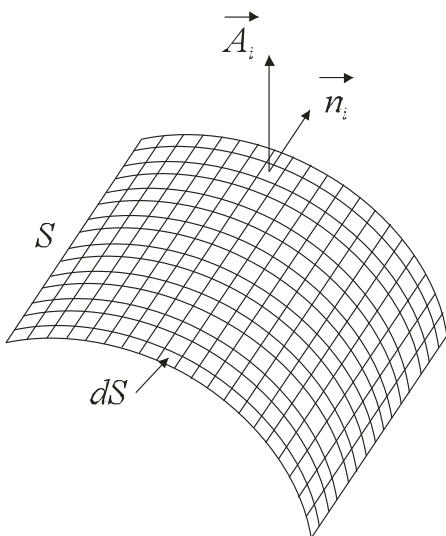


Рисунок 1.5 – Схема визначення потоку векторного поля \vec{A} через довільну поверхню S

Розглянемо довільну поверхню Σ (рис. 1.5). Розіб'ємо її площу S на $N = \frac{S}{\Delta S}$ «елементарних» (тобто малих) ділянок ΔS . Потік через i -ту ділянку приблизно запишеться як: $\hat{O}_i = \vec{A}_i \vec{n}_i \Delta S_i$, де \vec{n}_i – одиничний вектор нормалі до ділянки в якійсь з її точок (наприклад, в центрі), \vec{A} – вектор векторного поля в цій же точці ділянки. В якій конкретно точці – не важливо, оскільки розмір ділянки прагне до нуля. Тоді загальний потік:

$$\hat{O} = \sum_{i=1}^N \hat{O}_i.$$

Точного значення потоку набуваємо при $N \rightarrow \infty$:

$$\hat{O} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}_i \vec{n}_i \Delta S_i = \iint \vec{A} \vec{dS} = \iint A_n dS, \quad (1.11)$$

де A_n – проекція \vec{A}_i на вектор нормалі \vec{n}_i : $A_n = \vec{A}_i \vec{n}_i$. Тут $\vec{n}_i \Delta S_i = \vec{\Delta S}_i$ – вектор i -тої ділянки.

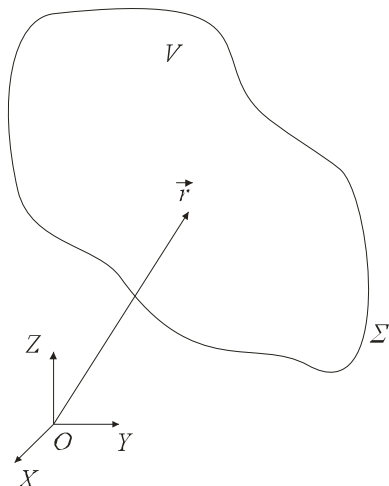


Рисунок 1.6 – Схема визначення дивергенції векторного поля \vec{A} через довільний замкнений потік V

Дивергенція (або розбіжність) векторного поля – границя відношення потоку векторного поля по замкнутій поверхні до об'єму всередині цієї поверхні, якщо ця поверхня і об'єм стягуються в точку.

Розглянемо довільну точку радіусу $r(x, y, z)$ і оточимо її об'ємом V , який обмежує поверхню Σ (рис. 1.6). За визначенням:

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint A_n dS}{V}. \quad (1.12)$$

Таке позначення \oiint інтеграла означає, що

інтеграл береться по замкнутій поверхні.

Прив'яжемо дивергенцію векторного поля \vec{A} з похідними від проекцій цього поля. Для цього оточимо довільну точку з радіусом \vec{r} елементарним кубом із стороною ε (рис. 1.7). Як видно з рисунку, центри граней, паралельних площині ZOY, мають координати:

$$x' = x + \frac{\varepsilon}{2}; y; z \quad \text{та} \quad x' = x - \frac{\varepsilon}{2}; y; z.$$

Запишемо вираз для потоку векторного поля через цей елементарний куб.

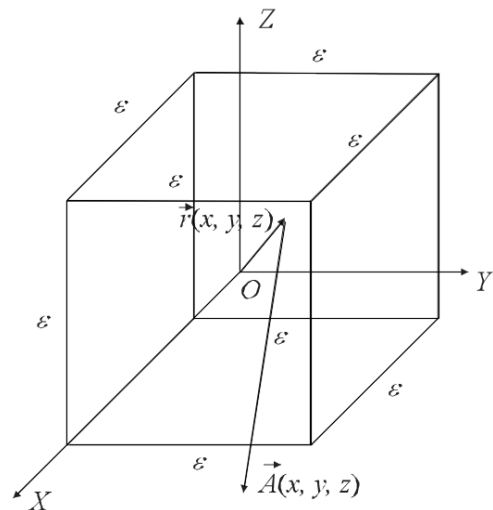


Рисунок 1.7 – Схема представлення дивергенції векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ як скалярної функції

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

Наближено цей потік можна записати як суму шести доданків. Візьмемо для розрахунків вектор \vec{A} в центрі кожної грані. Тоді:

$$\begin{aligned} \iiint A_n dS \approx & \vec{A}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) \vec{n}_1 \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) \vec{n}_2 \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \vec{n}_3 \varepsilon^2 + \\ & + \vec{A}\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \vec{n}_4 \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y, z + \frac{\varepsilon}{2}\right) \vec{n}_5 \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y, z - \frac{\varepsilon}{2}\right) \vec{n}_6 \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тут $\vec{n}_1 = \vec{i}$, $\vec{n}_2 = -\vec{i}$, $\vec{n}_3 = \vec{j}$, $\vec{n}_4 = -\vec{j}$, $\vec{n}_5 = \vec{k}$, $\vec{n}_6 = -\vec{k}$.

Можна записати:

$$\begin{aligned} \iiint A_n dS \approx & \vec{A}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) \vec{i} \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) (-\vec{i}) \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \vec{j} \varepsilon^2 + \\ & + \vec{A}\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right) (-\vec{j}) \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y, z + \frac{\varepsilon}{2}\right) \vec{k} \varepsilon^2 + \vec{A}\left(x, y, z - \frac{\varepsilon}{2}\right) (-\vec{k}) \varepsilon^2 = \\ = & \left(A_x\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_x\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) \right) \varepsilon^2 + \left(A_y\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \right) \varepsilon^2 + \\ & + \left(A_z\left(x, y, z + \frac{\varepsilon}{2}\right) - A_z\left(x, y, z - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Розділимо потік на об'єм куба: $V = \varepsilon^3$ та знайдемо границю відношення згідно визначенню дивергенції (1.12):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iiint A_n dS}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_x\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_x\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right)}{\varepsilon} + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_y\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_z\left(x, y, z + \frac{\varepsilon}{2}\right) - A_z\left(x, y, z - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Кожна з границь – часткова похідна, тобто:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z.$$

Таким чином, визначення дивергенції може бути іншим: дивергенцією векторного поля $\vec{A} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ називається скалярна функція:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.16)$$

Слово «дивергенція» означає «розбіжність» (від латинського «divergence» або «divergentia»). Дивергенція характеризує щільність джерел даного векторного поля в даній точці. Ті точки поля, де дивергенція має знак плюс, називають «джерелами». Ті точки, де дивергенція має знак мінус, називають «стоками».

Фізичні векторні поля не залежать від вибору системи координат: у кожній точці M вектор $\vec{A}(M)$ повністю визначається своїм модулем і напрямом. Відзначимо, що вектор – це не набір трьох скалярних величин. Якщо в просторі введена прямокутна система координат XYZ , то векторне поле $\vec{A}(M)$ описується вектор-функцією трьох змінних $\vec{A}(x, y, z)$ або трьома функціями – її координатами:

$$\vec{A}(x, y, z) (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

де (x, y, z) – точка простору.

Оскільки в прямокутних координатах $d\vec{r}(dx, dy, dz)$, то векторне рівняння для векторних ліній еквівалентне системі диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Властивості дивергенції. Дивергенція є лінійною дією (лінійним оператором). Це означає, що якщо \vec{a} та \vec{b} – векторні поля, для яких існує дивергенція, а α та β – константи, то для поля $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ також існує дивергенція, яка дорівнює:

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \operatorname{div} \vec{a} + \beta \operatorname{div} \vec{b}. \quad (1.17)$$

Властивість лінійності виходить безпосередньо з визначення дивергенції. Взагалі дивергенція існує не для будь-якого векторного поля: проєкції вектора \vec{A} повинні бути безперервними разом з першими похідними по кожній координаті. Друга властивість дивергенції виражається формулою:

$$\operatorname{div}(u \vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} u. \quad (1.18)$$

Цю рівність легко перевірити, використовуючи формулу для дивергенції в декартових координатах.

Дивергенцію векторного поля часто зручно розглядати як результат дії на вектор поля диференціального оператора набла ($\vec{\nabla}$). Під дією цього оператора на вектор-функцію $\vec{A}(x, y, z)$ розглядатимемо скалярний добуток оператора $\vec{\nabla}$ на \vec{A} . З визначення оператора «набла» (1.8) отримуємо:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{A}.$$

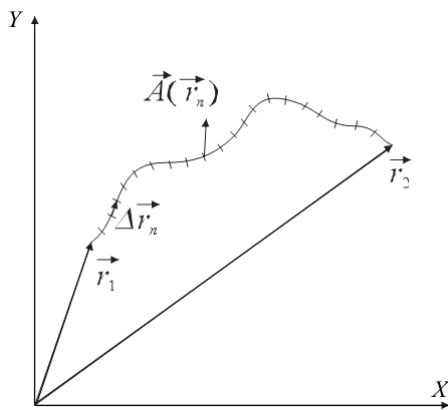


Рисунок 1.8 – Схема обчислення криволінійного інтеграла від градієнта довільного скалярного поля φ між будь-якими двома точками

Криволінійним інтегралом векторного поля називається границя суми скалярних добутків векторного поля на елементарні переміщення вздовж шляху інтегрування, коли довжина кожного переміщення прагне до нуля, а кількість переміщень прагне до нескінченності (рис. 1.8):

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} A_r dr = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \vec{A}(\vec{r}_n) \Delta \vec{r}_n. \quad (1.19)$$

Теорема. Криволінійний інтеграл від градієнта скалярного поля між будь-якими двома точками (рис. 1.8) не залежить від шляху інтеграції і дорівнює $\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$ (визначається значеннями функції в початковій та кінцевій точках):

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1). \quad (1.20)$$

Доведення теореми. Нехай $\varphi(\vec{r})$ – функція скалярного поля і для неї існує градієнт.

Візьмемо n -ну ділянку на шляху інтегрування (вздовж траєкторії):

$$d\vec{r}_n(dx_n, dy_n, dz_n).$$

Тут

$$\overrightarrow{grad} \varphi(\vec{r}_n) = \vec{i} \frac{\partial \varphi(\vec{r}_n)}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi(\vec{r}_n)}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi(\vec{r}_n)}{\partial z}. \quad (1.21)$$

Знайдемо суму скалярних добутків $\overrightarrow{grad} \varphi(\vec{r}_n) d\vec{r}_n$ на всіх ділянках траєкторії:

$$\begin{aligned} \sum_n \overrightarrow{grad} \varphi(\vec{r}_n) \Delta \vec{r}_n &= \sum_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x_n + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y_n + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z_n \right) = \\ &= \sum_n \Delta \varphi_n = \sum_n \left(\varphi(\vec{r}_{n+1}) - \varphi(\vec{r}_n) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

У правій частині останнього виразу стоїть сума різниць $\varphi(\vec{r})$ на кінцях кожної ділянки траєкторії. При цьому значення функції на кінці однієї ділянки є початковими значеннями для наступної ділянки. В результаті отримуємо:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{grad} \varphi d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1). \quad (1.23)$$

Наслідок. Криволінійний інтеграл від градієнта скалярного поля (який позначають символом \oint) по замкнутому контуру (циркуляція) дорівнює нулю:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1, \quad \oint \overrightarrow{grad} \varphi d\vec{r} = 0.$$

Потенційне поле. Векторне поле $\vec{A}(x, y, z)$ називається потенційним, якщо його можна представити в області як градієнт деякого скалярного поля $u(x, y, z)$: $\vec{A} = \overrightarrow{grad} u$. Функція $u(x, y, z)$ називається скалярним потенціалом векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$.

Якщо $\vec{A}(P, Q, R)$, то звідси витікає, що $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$.

У фізиці, традиційно, потенціалом векторного поля називають таку функцію u , що $\vec{A} = -\overrightarrow{grad} u$.

Поверхні рівня потенціалу $u(M)$ називаються еквіпотенціальними поверхнями.

Векторне поле $\vec{A}(M)$ називається соленоїдним в області G , якщо в цій області $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Оскільки $\operatorname{div} \vec{A}$ характеризує щільність джерел і стоків поля \vec{A} , то в тій області, де поле \vec{A} соленоїдне, немає джерел і стоків цього поля.

Наприклад, електричне поле \vec{E} точкового заряду соленоїдне (задовольняє умові $\operatorname{div} \vec{E} = 0$) всюди, окрім точки, де знаходиться заряд (в цій точці $\operatorname{div} \vec{E} = \infty$). Векторні лінії соленоїдного поля не можуть починатися або закінчуватися всередині області соленоїдальності; вони або починаються і закінчуються на межі області, або є замкнутими кривими. Прикладом соленоїдного поля із замкнутими кривими є магнітне поле, яке породжується струмом в провіднику.

Основна теорема векторного аналізу стверджує, що довільне векторне поле можна представити як суму потенціального і соленоїдного полів (див. розділ 1.6).

1.3 Теорема Гаусса-Остроградського

Потік векторного поля через замкнуту поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього поля за об'ємом, який обмежений цією поверхнею:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \iint_{\Sigma(V)} A_n dS. \quad (1.24)$$

Тут dV – диференціал об'єму. Наприклад, в декартовій системі $dV = dx dy dz$.

Доказ. Розіб'ємо об'єм V на елементарні об'єми $\Delta V_i = \frac{V}{N}$, де N – кількість частин на які проходить розбиття.

За визначенням інтеграл від функції $f(x, y, z)$ за об'ємом є сумою від відповідних добуток значень цієї функції $f(x_i, y_i, z_i)$ на елементарні об'єми ΔV_i :

$$\iiint_V f(\vec{r}) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i. \quad (1.25)$$

У нашому випадку функція $f(x, y, z) = \text{div } \vec{A}$, тому:

$$\iiint_V \text{div } \vec{A} dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\text{div } \vec{A})_i \Delta V_i.$$

Згідно визначенню дивергенції (1.12):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\text{div } \vec{A})_i \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\oiint_{S_i} A_n dS}{\Delta V_i} \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oiint_{S_i} A_n dS. \quad (1.26)$$

В останній сумі кожна елементарна поверхня між двома елементарними

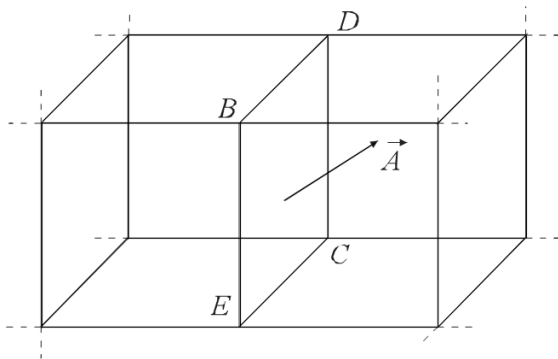


Рисунок 1.9 – Зображення поверхні EBDC в довільному елементарному об'ємі

об'ємами зустрічається двічі (поверхня EBDC на рис. 1.9), тобто в двох доданках. У відповідних двох доданках потоку вектора \vec{A} , вектор нормалі до поверхні має протилежний напрям, тому що нормаль проводиться назовні для кожної поверхні.

Значення вектор-функції \vec{A} векторного поля в обох доданках однакові, тому проекція вектора \vec{A} на нормаль матиме протилежні знаки, а модуль буде однаковим. Тому кожні два такі доданки потоку взаємно компенсуються. У результуючій сумі залишаються доданки потоку, які зустрічаються лише один раз і відповідають ділянкам зовнішньої поверхні, що обмежує цей об'єм V . А тому: $\iiint_V \text{div } \vec{A} dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i'} \oiint_{S_{i'}} A_{n_{i'}} dS$, де сума по i'

береться по зовнішнім ділянкам границь об'ємів. Далі

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i'} \oiint_{S_{i'}} A_{n_{i'}} dS = \oiint_{S_{\text{вн}}} A_n dS, \text{ що й необхідно було довести.}$$

1.4 Циркуляція векторного поля. Ротор

Градiєнт $\vec{\nabla}\phi$ (як добуток “вектора” $\vec{\nabla}$ на скаляр ϕ) скалярного і дивергенція $\vec{\nabla}\vec{A}$ (як скалярний добуток $\vec{\nabla}\vec{A}$) векторного полів не залежать від напрямку координатних осей, тому що як величина скаляра так і величина і напрям вектора не змінюються при зміні системи координат. Можна бачити, що й векторний добуток $\vec{\nabla}$ на вектор поля \vec{A} , тобто $\vec{\nabla}\vec{A}$ також не змінюється при повороті системи координат.

Тобто векторний добуток будь-яких двох векторів є так званим псевдовектором, тобто він змінює знак при інверсії простору ($x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$). До таких псевдовекторів відноситься зокрема, індукція магнітного поля. При цьому сила Лоренця, пропорційна векторному добутку індукції магнітного поля і швидкості, є вектором. Якщо в задачі не використовується інверсія, то можна оперувати псевдовекторами як нормальними векторами.

Для наступного аналізу нам необхідно використовувати поняття циркуляції. Криволінійний інтеграл (1.19) по замкнутому контуру називається циркуляцією векторного поля по контуру.

Розглянемо довільний замкнутий контур довжиною L в просторі (рис. 1.10).

Розіб'ємо його на $N = \frac{L}{\Delta l}$ елементарних ділянок. Зробимо його орієнтованим, тобто задамо напрям обходу. Кожна ділянка характеризується вектором $\Delta\vec{l}$ (довжиною Δl і одиничним вектором \vec{l} , який направлений по дотичній до контура вздовж напрямку обходу).

Границя суми скалярних добутків $\vec{A}_i \Delta\vec{l}_i$ називається циркуляцією:

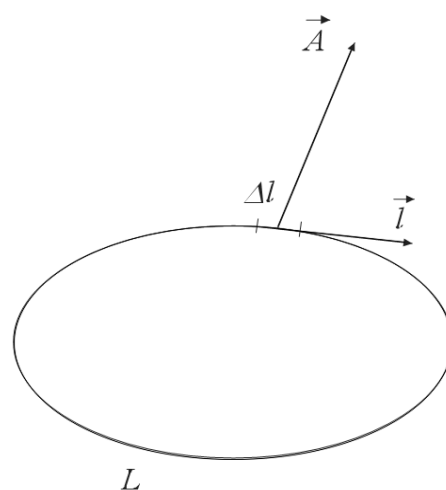


Рисунок 1.10 – Схема обчислення циркуляції векторного поля \vec{A} по довільному замкнутому контуру довжиною L

$$\oint_L A_l dl = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dl_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^N (\vec{A}(\vec{r}_i))_l d\vec{l}_i. \quad (1.27)$$

У загальному випадку циркуляція різних контурів (у різних площинах) навколо однієї і тієї ж точки різна.

Відзначимо, що соленоїдні та потенційні поля можуть бути визначені не тільки за допомогою градієнта і дивергенції, але й шляхом знаходження циркуляції і ротора. Ротор векторного поля є локальною характеристикою завихореності поля.

Ротор векторного поля (або вихор) – це вектор, проекція якого на довільний напрям \vec{n} дорівнює границі відношення циркуляції поля по замкнутому контуру, який лежить в площині, яка перпендикулярна до \vec{n} , до площі, яка обмежена цим контуром, якщо контур (і площа) стягується в точку. Напрямок обходу контура вибирається за правилом «буравчика».

$$(\vec{rot} \vec{A}(\vec{r}))_n = \lim_{\substack{L \rightarrow 0 \\ \Delta S_L \rightarrow 0}} \frac{\oint_L A_l dl}{\Delta S_L}. \quad (1.28)$$

Слово ротор означає «обертання» (від латинського «rotate» – обертати, «roto» – обертаюся).

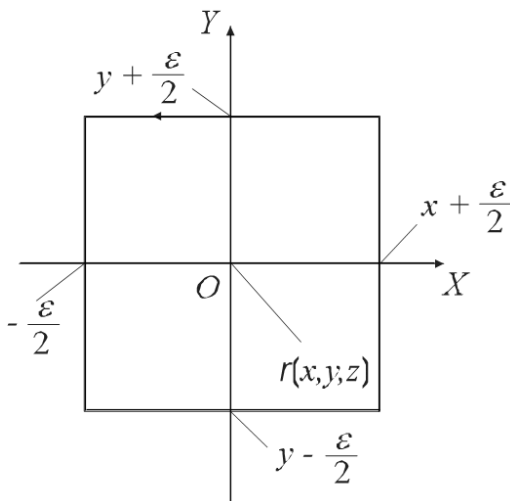


Рисунок 1.11 – Зображення довільного контуру, який орієнтований за правилом правого гвинта

Знайдемо вирази для проекцій ротора на осі декартової системи координат $(\vec{rot} \vec{A})_z$.

Оберемо орієнтований контур за правилом правого буравчика (рис. 1.11, тут \vec{n} паралельний OZ) – квадрат з нескінченно малими сторонами довжиною ϵ . Знайдемо циркуляцію по цьому контуру. Циркуляцію в такому випадку розпишемо як суму чотирьох доданків:

$$\begin{aligned}
\oint_L A_i dl &= \vec{A}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) \vec{j} \varepsilon + \vec{A}\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) (-\vec{i}) \varepsilon + \\
&+ \vec{A}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) (-\vec{j}) \varepsilon + \vec{A}\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \vec{i} \varepsilon = \\
&= \varepsilon \left(A_y\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_y\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_x\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) - A_x\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right) \right).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Розділимо на ε^2 і знайдемо границю згідно (1.28). Тоді проекція ротора поля на вісь OZ становить:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{rot A})_z &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{A_y\left(x + \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_y\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, y, z\right) - A_x\left(x, y + \frac{\varepsilon}{2}, z\right) - A_x\left(x, y - \frac{\varepsilon}{2}, z\right)}{\varepsilon} \right) = \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Аналогічно можна знайти й інші проекції (на місце x ставимо y , на місце y ставимо z і на місце z ставимо x):

$$rot_x \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad rot_y \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{1.31}$$

Ці вирази зручно записати через детермінант (Важливо пам'ятати, що при розкритті детермінанта диференціальні оператори похідних повинні стояти перед функціями (проекціями поля) на які вони діють):

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

За визначенням векторного добутку двох векторів:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.33}$$

Тому можна перевірити, що $\overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{A}$, де $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

З представленою вище аналізу отримуємо друге визначення ротора.

Ротором $\vec{A} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ або вихором векторного поля називається векторна функція:

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (1.34)$$

Зокрема, для плоского поля $\vec{A}(P(x, y), Q(x, y))$ маємо

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Взагалі, ротор будь-якого потенційного поля дорівнює нулю. Тому говорять, що потенційне поле безвихорове.

Багато векторних полів в природі мають вихровий характер.

Наприклад: магнітне поле; поле швидкостей при турбулентній течії в рідині або газі; вихрове електричне поле, яке утворюється в процесі електромагнітної індукції.

Властивості ротора. Ротор – лінійна дія: якщо \vec{a} та \vec{b} – векторні поля, для яких існують ротори, то

$$\overrightarrow{rot}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \overrightarrow{rot} \vec{a} + \beta \overrightarrow{rot} \vec{b}, \quad (1.35)$$

де α, β – постійні. Лінійність оператора \overrightarrow{rot} витікає з визначення ротора.

Відзначимо ще тотожність

$$\overrightarrow{rot}(u \vec{a}) = u \overrightarrow{rot} \vec{a} + \overrightarrow{grad} u \vec{a}, \quad (1.36)$$

яку легко довести шляхом визначення складових в декартових координатах.

Дійсно, за формулою (1.34) маємо:

$$\begin{aligned} rot_x(u \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial y}(u a_z) - \frac{\partial}{\partial z}(u a_y) = u \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_y = \\ &= u rot_x \vec{a} + \left(\overrightarrow{grad} u \vec{a} \right)_x. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Аналогічно визначаються дві формули для складових по осях OY і OZ . Вирази для трьох складових $rot_x \vec{a}$, $rot_y \vec{a}$, $rot_z \vec{a}$ переконують в справедливості векторної тотожності.

Критерій потенційності поля. Необхідною і достатньою умовою того, що поле потенційне є виконання в усіх точках області рівності

$$\overrightarrow{rot a} = 0. \quad (1.38)$$

У необхідності умови легко переконається шляхом безпосереднього обчислення. Дійсно, якщо поле \vec{a} потенційне, то за визначенням його можна записати у вигляді $\vec{a} = -\overrightarrow{grad} \varphi$. Відповідно проекція ротора на вісь X матиме вигляд:

$$rot_x \vec{a} = -rot_x \overrightarrow{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) = 0. \quad (1.39)$$

Решта проекцій знаходиться аналогічно.

Соленоїдність поля. Якщо векторне поле $\vec{A}(M)$ можна представити як ротор деякого векторного поля $\vec{B}(M)$, тобто $\vec{A} = \overrightarrow{rot} \vec{B}$, то поле \vec{A} соленоїдне. Достатність такої умови обгрунтована безпосередньо знаходженням дивергенції, яка повинна дорівнювати нулю: $div \vec{A} = div \overrightarrow{rot} \vec{B} = 0$. Так, поле $\vec{A} = \overrightarrow{rot} \vec{B}$ є соленоїдним. Якщо векторне поле $\vec{A}(M)$ можна представити як ротор векторного поля $\vec{B}(M)$, тобто $\vec{A} = \overrightarrow{rot} \vec{B}$, то вектор-функція $\vec{B}(M)$ називається векторним потенціалом поля $\vec{A}(M)$.

1.5 Теорема Стокса

Циркуляція векторного поля по довільному контуру дорівнює потоку ротора цього поля через довільну поверхню, яка спирається на даний контур:

$$\oint_L A_t dl = \iint_{\Sigma_L} (\overrightarrow{rot} \vec{A})_n dS. \quad (1.40)$$

У формулі (1.40) справа стоїть потік ротора через поверхню, а зліва циркуляція поля.

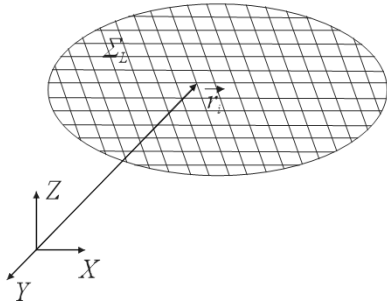


Рисунок 1.12 – Зображення довільного плоского контуру, який використовується для доведення теореми Стокса

Схема доведення подібна до схеми доведення теореми Гаусса-Остроградського (розділ 1.3). Нехай відоме векторне поле \vec{A} . Візьмемо в просторі довільний плоский контур, на який спирається поверхня Σ_L площею S . Розіб'ємо поверхню Σ_L на N елементарних ділянок $\Delta S = S / N$ (рис. 1.12).

Запишемо за визначенням (1.11) вираз для потоку ротора поля \vec{A} через поверхню Σ_L :

$$\iint_{\Sigma_L} (\text{rot } \vec{A})_n dS = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N (\text{rot } \vec{A}_i(\vec{r}_i))_n \Delta S_i.$$

Скористаємося визначенням ротора (1.28):

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N (\text{rot } \vec{A}_i(\vec{r}_i))_n \Delta S_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \frac{\oint_{L_i} A_l dl}{\Delta S_i} \Delta S_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} A_l dl. \quad (1.41)$$

Кожна внутрішня границя даватиме два доданки з протилежними знаками. Таким чином, ці внески (доданки) компенсуються. Залишаються тільки ділянки зовнішнього контуру, який відповідає визначенню циркуляції векторного поля по контуру:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} A_l dl = \oint_L A_l dl. \quad (1.42)$$

1.6 Диференціальні операції над скалярними та векторними полями

Над скалярним та векторним полями можна здійснювати три диференціальні операції – градієнт, дивергенція і ротор:

– Дія $\vec{\nabla}$ на скалярну функцію $u(x, y, z)$ дає (формула (1.9)):

$$\vec{\nabla}u = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \overrightarrow{grad} u. \quad (1.43)$$

– Скалярний добуток вектора $\vec{\nabla}$ на вектор-функцію $\vec{A}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дає $div \vec{A}$ (формула (1.16)):

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = div \vec{A}. \quad (1.44)$$

– Векторний добуток вектора $\vec{\nabla}$ на вектор-функцію $\vec{A}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дає $\overrightarrow{rot} \vec{A}$ (формула (1.34)):

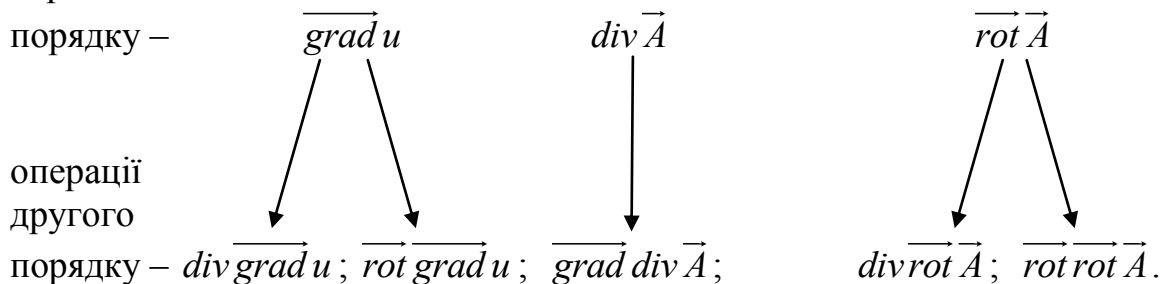
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{rot} \vec{A}. \quad (1.45)$$

Розглянемо диференціальні операції, які визначаються двократним використанням оператора $\vec{\nabla}$. З'ясуємо кількість можливих операцій другого порядку.

До векторних полів $\overrightarrow{grad} u(M)$ і $\overrightarrow{rot} \vec{A}(M)$ можна застосувати операції обчислення дивергенції та ротора, до скалярного поля $div \vec{A}(M)$ – операцію обчислення градієнта.

Таким чином, можна утворити п'ять диференціальних операцій другого порядку за схемою представленою нижче:

операції
першого
порядку –



Таким чином, отримуємо повторні операції $div \overrightarrow{grad} u(M)$, $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{grad} u(M)$, $div \overrightarrow{rot} \vec{A}(M)$, $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{A}(M)$, $\overrightarrow{grad} div \vec{A}(M)$.

1. Як вже було знайдено, $\overrightarrow{\text{rot grad } u} = 0$.

2. Аналогічно, вихрове поле є соленоїдним: $\text{div } \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} = 0$.

3. За допомогою оператора Гамільтона оператор Лапласа записується у вигляді: $\text{div } \overrightarrow{\text{grad } u} = (\nabla (\nabla u)) = \nabla^2 u = \Delta u$.

Враховуючи, що $\vec{\nabla} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$, отримуємо вираз для оператора Лапласа:

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.46)$$

а лапласіан скалярної функції має вигляд:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.47)$$

Функція, яка задовольняє в деякій області рівнянню Лапласа $\Delta u = 0$, називається гармонійною в цій області.

Оператор Лапласа широко використовується в рівняннях математичної фізики.

Як вже було відмічено, потенціал електричного поля точкового заряду або поля тяжіння точкової маси, має вигляд:

$$u = \frac{k}{r} \quad (k = \text{const}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

при $r \neq 0$ (тобто в області, вільній від зарядів) задовольняє рівнянню Лапласа.

4. Обчислимо $\overrightarrow{\text{rot rot } \vec{A}}$: $\overrightarrow{\text{rot rot } \vec{A}} = \vec{\nabla} \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})$.

Використовуючи формулу векторної алгебри для подвійного векторного добутку $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$, знайдемо ($\vec{a} = \vec{\nabla}$, $\vec{b} = \vec{\nabla}$, $\vec{c} = \vec{A}$):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (1.48)$$

Треба звернути увагу на те, що при розкритті подвійного векторного добутку необхідно стежити за тим, щоб оператори стояли завжди перед

функціями – інакше результатом буде не функція, а оператор. Остаточню знаходимо:

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{A} = \overline{\nabla} (\overline{\nabla} \vec{A}) - (\overline{\nabla} \overline{\nabla}) \vec{A} = \overline{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.49)$$

Ця тотожність широко використовується, наприклад, в теорії електромагнітного поля.

Доведемо цю тотожність по-іншому. Нехай $\vec{A}(\vec{r})$ – довільне векторне поле, тоді (приймаючи $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$):

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) \right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y = \frac{\partial}{\partial y} (\overrightarrow{rot} \vec{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\overrightarrow{rot} \vec{A})_y = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} = \\ &= -\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} = \\ &= -\nabla^2 A_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{A}) - \nabla^2 (A_x). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Аналогічно для інших проекцій. Таким чином, отримаємо:

$$\overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{A} = \overline{grad} \operatorname{div} \vec{A} - (\operatorname{div} \overline{grad}) \vec{A}. \quad (1.51)$$

$$5. \quad \text{Звідси } \overline{grad} \operatorname{div} \vec{A} = \overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{A} + (\operatorname{div} \overline{grad}) \vec{A}.$$

З формули (1.48) бачимо, що лапласіан вектора дорівнює:

$$\nabla^2 \vec{A} = \overline{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{A}. \quad (1.52)$$

Розкладання векторного поля на суму потенційного і соленоїд полів.

Згідно основної теореми векторного аналізу довільне безперервне векторне поле, що диференціюється $\vec{A}(x, y, z)$, може бути представлене у вигляді:

$$\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}_1(x, y, z) + \vec{A}_2(x, y, z), \quad (1.53)$$

де $\vec{A}_1(x, y, z)$ – потенційне поле, $\vec{A}_2(x, y, z)$ – поле соленоїда.

Дійсно, за визначенням, потенційне векторне поле $\vec{A}_1(x, y, z)$ є градієнтом (або мінус градієнтом) деякого скалярного поля $u(M)$:

$$\vec{A}_1(x, y, z) = \overline{grad} u(x, y, z).$$

Тому для вектора $\vec{A}_2(x, y, z)$ з рівності (1.53) маємо:

$$\vec{A}_2(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) - \overrightarrow{\text{grad}} u(x, y, z).$$

Щоб векторне поле $\vec{A}_2(x, y, z)$ було соленоїдним, воно повинне задовольняти умові $\text{div} \vec{A}_2(x, y, z) = 0$, звідки знаходимо:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}_2(x, y, z) &= \text{div}(\vec{A}(x, y, z) - \overrightarrow{\text{grad}} u(x, y, z)) = \\ &= \text{div} \vec{A}(x, y, z) - \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} u(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Таким чином, для скалярного потенціалу отримаємо рівняння

$$\Delta u = \text{div} \vec{A}, \quad (1.55)$$

де $\text{div} \vec{A}$ – відома функція поля $\vec{A}(x, y, z)$.

Таким чином, якщо функція u є розв'язком рівняння (1.55), то, поклавши $\vec{A}_1(x, y, z) = \overrightarrow{\text{grad}} u(M)$, $\vec{A}_2(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) - \overrightarrow{\text{grad}} u(M)$, отримуємо поле $\vec{A}(x, y, z)$ у вигляді суми $\vec{A}_1(x, y, z)$ і $\vec{A}_2(x, y, z)$, де $\vec{A}_1(x, y, z)$ – потенційне, $\vec{A}_2(x, y, z)$ – поле соленоїда.

Рівняння (1.55) – неоднорідне рівняння в часткових похідних другого порядку, яке називається рівнянням Пуассона:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f; \quad f = \text{div} \vec{A}. \quad (1.56)$$

Відзначимо, що це рівняння має (нескінченне) безліч розв'язків, тому представлення поля $\vec{A}(x, y, z)$ в такому вигляді не є єдиним.

1.7 Основні уявлення про тензор

Скаляр і вектор є прикладами більш загального типу величин – тензорів. З погляду кількості компонент, які описують величину, зручно досліджувати тензори різних рангів. Наприклад, скаляр має $3^0 = 1$ компонентів, тому він є тензором 0 рангу. Вектор має $3^1 = 3$ компоненти, тому вектор – це тензор першого рангу. Величина, яка має $3^2 = 9$

компонентів, є тензором другого рангу і так далі. В літературі тензори різних рангів називають також тензорами різних порядків або тензорами різної валентності.

В фізичних задачах часто використовують різні системи відліку, різні системи координат. Пригадаємо, як змінюються координати фіксованого вектора внаслідок переходу від одних координатних осей до інших.

Розглянемо вектор \vec{r} в площині XOY . Цей вектор характеризується двома проекціями x та y .

Той же самий вектор можна розглядати в іншій системі координат (штрихованій), поверненій на кут φ щодо неї. В цій штрихованій системі координат вектор має інші проекції x' та y' (рис. 1.13).

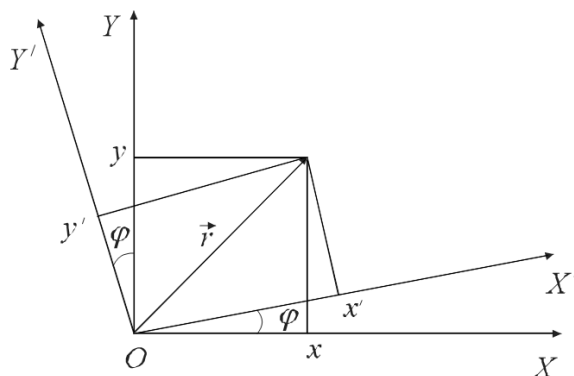


Рисунок 1.13 – Схема переходу від однієї системи координат XOY до іншої $X'OY'$ шляхом повернення на кут φ

Використовуємо теорему про кути з взаємно перпендикулярними сторонами (рис. 1.14).

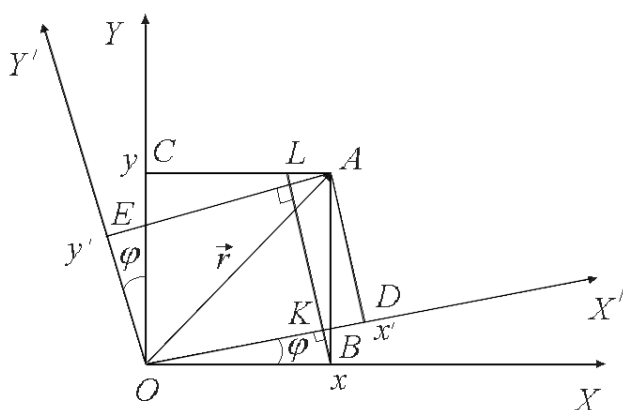


Рисунок 1.14 – Схема перетворення координат довільної точки на площині (x, y) в координати (x', y') при поверненні вихідної системи координат на кут φ

Як можна бачити з рисунку:

$$x' = OD = OK + KD,$$

$$OK = OB \cos \varphi = x \cos \varphi,$$

$$KD = LA = BA \sin \angle LBA = \\ = BA \sin \varphi = y \sin \varphi.$$

Тобто: $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$.

Далі:

$$y' = EO = LK = LB - KB,$$

$$LB = AB \cos \varphi = y \cos \varphi,$$

$$KB = OB \sin \varphi = x \sin \varphi.$$

Тому:

$$y' = LB - KB = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Таким чином, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x' = \cos \varphi x + \sin \varphi y \\ y' = (-\sin \varphi) x + \cos \varphi y \end{cases} .$$

Це перетворення зручно записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Якщо позначити $x = X_1$, $y = X_2$, $x' = X'_1$, $y' = X'_2$, $\alpha_{11} = \cos \varphi$, $\alpha_{12} = \sin \varphi$, $\alpha_{21} = -\sin \varphi$, $\alpha_{22} = \cos \varphi$, тоді вираз для нових координат вектора через старі можна записати як $X'_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$, $X'_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2$ або:

$$X'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} X_k, \quad (1.56)$$

де $\alpha_{ik} \equiv \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ – матриця повороту (або

оператор повороту).

Детермінант цієї матриці: $\det \|\alpha_{ik}\| = \cos^2 \varphi - (-\sin^2 \varphi) = 1$. Індекс ik означає, що матриця відповідає послідовному перетворенню однієї системи координат в іншу («штриховану»).

Запишемо транспоновану матрицю (в якій стовпці замінені рядками і навпаки): $\alpha_{ik}^T \equiv \alpha_{ki} \equiv \hat{\alpha}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Помножимо транспоновану матрицю α_{ik}^T на матрицю повороту α_{ik} – $\hat{\alpha}^T \cdot \hat{\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Таким чином, добуток дає одиничну матрицю ($\hat{\alpha}^T \hat{\alpha} = \hat{1}$), тобто транспонована матриця повороту дорівнює зворотній матриці $\hat{\alpha}^T = \hat{\alpha}^{-1}$.

Такі матриці (і відповідні перетворення, для яких $\hat{\alpha}^T = \hat{\alpha}^{-1}$) називаються ортогональними.

Множення двох матриць відповідає двом послідовним оберненням:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\varphi_2) \hat{\alpha}(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 & \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \end{pmatrix} = \quad (1.58) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) & \sin(\varphi_2 + \varphi_1) \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_1) & \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Це означає, що добуток матриць також є матрицею повороту на кут $\varphi_2 + \varphi_1$.

Таким чином, множина матриць повороту утворює групу. Одиначна матриця відповідає повороту на нульовий кут.

Група матриць повороту в двомірному просторі комутативна:

$\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1$ (перестановка матриць приводить до аналогічного результату добутку). Група матриць повороту в тривимірному просторі не є комутативною.

Спробуємо отримати приведені вище формули іншим способом.

Позначимо (рис. 1.15) $\vec{i} \equiv \vec{l}_1$, $\vec{j} \equiv \vec{l}_2$,

тоді один й той самий вектор в різних системах координат може бути представлений таким чином:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^2 X_i \vec{l}_i = \sum_{i=1}^2 X'_i \vec{l}'_i.$$

Помножимо (скалярно) обидві частини рівняння на будь-який базисний вектор поверненої («штрихованої») системи координат \vec{l}'_k .

Маємо:

$$\sum_{i=1}^2 X'_i (\vec{l}'_i \vec{l}'_k) = \sum_{i=1}^2 X_i (\vec{l}_i \vec{l}'_k).$$

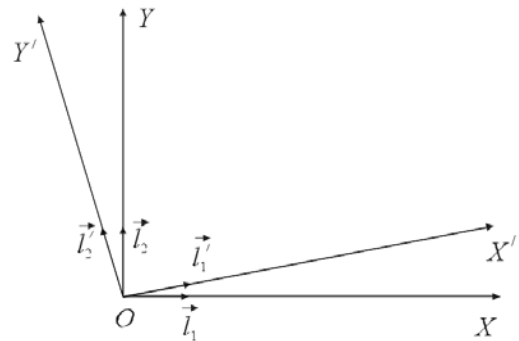


Рисунок 1.15 – Схема представлення довільного вектора в системі координат XOY та X'OY'

Оскільки «штрихована» система координат ортогональна, то скалярний добуток ортів: $\vec{l}'_i \vec{l}'_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$, де δ_{ik} – символ Кронекера (див. наступний параграф).

Розкриття суми зліва дає:

$$\sum_{i=1}^2 X'_i \delta_{ik} = X'_k \delta_{kk} + \sum_{i \neq k} X_{i \neq k} \delta_{ik}.$$

Тут $\delta_{kk} = 1$, $\sum_{i \neq k} X_{i \neq k} \delta_{ik} = 0$.

Тому,
$$X'_k = \sum_{i=1}^2 X_i (\vec{l}_i \vec{l}'_k). \quad (1.59)$$

З порівняння останньої формули з формулою (1.56) отримуємо:

$$\alpha_{ik} = \vec{l}_i \vec{l}'_k = \cos \left(\widehat{\vec{l}_i \vec{l}'_k} \right). \quad (1.60)$$

Як можна побачити з рисунків (1.13) – (1.15): $\widehat{\vec{l}'_1 \vec{l}_1} = \cos \varphi$,

$$\widehat{\vec{l}'_1 \vec{l}_2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi, \quad \widehat{\vec{l}'_2 \vec{l}_1} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\sin \varphi, \quad \widehat{\vec{l}'_2 \vec{l}_2} = \cos \varphi.$$

Очевидно, таку ж процедуру можна виконати з компонентами радіус-вектора в тривіальному випадку:

$$X'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} X_k, \quad (1.61)$$

де $\alpha_{ik} = \vec{l}'_i \vec{l}_k = \cos \left(\widehat{\vec{l}'_i \vec{l}_k} \right)$, а $\widehat{\vec{l}'_i \vec{l}_k}$ – кут між старим базисним вектором і

новим базисним вектором.

Матриця повороту α_{ik} :
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \widehat{\alpha}.$$

При цьому, кожен елемент α_{ik} матриці $\widehat{\alpha}$ переходу від одного базису до іншого може бути записаний через похідну від координат в новому базисі за координатами старого базису, а саме:

$$\alpha_{13} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_3}, \alpha_{22} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2}, \alpha_{31} = \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} \text{ або } \alpha_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}.$$

Аналогічно стосовно двомірного випадку можна показати, що $\hat{\alpha}^T \hat{\alpha} = \hat{1}$ (умова ортогональності матриць). Дійсно, при повороті квадрат довжини вектора \vec{r} залишається незмінним (у звичайному евклідовому просторі):

$$r^2 = \sum_{i=1}^3 X_i^2 = \sum_{i=1}^3 X_i'^2. \text{ Із цього очевидного факту виходить ортогональність}$$

матриць повороту.

Вектором або лінійним тензором першого рангу в тривимірному просторі називається будь-яка трійка чисел (стовпець), яка при повороті системи координат перетвориться згідно із законом (1.61):

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} A_k, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Числа $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3$ називають компонентами (координатами) тензора, $\alpha_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$ – матриця перетворення від одного базису до іншого.

Аналогічно вводиться поняття тензора другого рангу.

Інакше кажучи, закон (1.62) перетворення компонент вектора і складає сенс поняття вектора. Це також відноситься до тензорів.

Тензором другого рангу в тривимірному просторі називається таблиця з 9 (у будь-якій системі координат) чисел P_{ij} (матриця три на три), які при зміні системи координат перетворюються в P'_{ij} згідно із законом $P_{ij} \rightarrow P'_{ij}$:

$$P'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jn} P_{kn} = \sum_k \sum_n \alpha_{ik} P_{kn} \alpha_{nj}^T, \quad \hat{P}' = \hat{\alpha} \hat{P} \hat{\alpha}^T. \quad (1.63)$$

Величини P_{ij} є компонентами тензора другого рангу.

Термін «тензор» вперше був використаний А.Ейнштейном в 1916 році для величин, які перетворюються згідно з законом (1.63), проте, безпосередне

формулювання цих законів, положень алгебри і аналізу було розроблено ще в 1889 році Дж.Річі.

Компоненти тензора, яким відповідають однакові індекси, називають діагональними. Якщо компоненти тензора відомі в прямокутній декартовій системі координат, то згідно формулі (1.63) можна визначити компоненти P'_{ij} тензора в будь-якій іншій прямокутній декартовій системі координат, осі якої утворюють з осями початкової системи кути, косинуси яких α_{ik} (1.60).

Якщо усі компоненти тензора перетворюються в нуль в якій-небудь системі координат, то вони дорівнюють нулю в будь-якій іншій системі внаслідок однорідності закону перетворення.

Іноді зручно записувати тензор у вигляді таблиці:

$$P \equiv P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Як відомо, квадрат вектора можна записати у вигляді суми квадратів його компонент: $\sum_{i=1}^3 A_i \cdot A_i = A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_3$. У тензорному аналізі прийнято записувати цю дію просто як $A_i A_i$, пропустивши знак суми. Взагалі приймається правило, згідно якому під будь-яким індексом, який повторюється двічі, розуміють складання, причому знак суми не пишеться. Це правило називають «угодою про підсумовування» або правилом Ейнштейна, яке він вперше використовував в роботі «Основи загальної теорії відносності» в 1916 році. Кажуть, що діє підсумовування за німими індексами (які повторюються двічі). Всі інші індекси (які не повторюються двічі) називають вільними індексами. Тензорна рівність означає, що кількість і розташування вільних індексів справа і зліва повинні співпадати.

Для тензора другого рангу можна дати ще й інше визначення. Тензором T_{ik} другого рангу називають зовнішній (прямий) добуток двох векторів $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$ та $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$ (тобто добуток тензорів однакового

першого рангу за правилами тензорного добутку), а саме, матрицю, побудовану з добутків кожного компоненту першого вектора на кожний компонент другого вектора ($i, k = 1, 2, 3$):

$$T_{ik} = A_i B_k. \quad (1.64)$$

Компоненти векторів в різних системах зв'язані згідно формулі (1.61):

$$A'_i = \sum_k \alpha_{ik} A_k. \text{ Тоді тензори-добутки векторів } T_{kn} = A_k B_n \text{ в різних системах ко-}$$

ординат:

$$T'_{ij} = A'_i B'_j = \sum_k \alpha_{ik} A_k \sum_n \alpha_{jn} B_n = \sum_{k,n} \alpha_{ik} \alpha_{jn} A_k B_n \text{ чи } T'_{ij} = \sum_{k,n} \alpha_{ik} \alpha_{jn} T_{kn}$$

(або $T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jn} T_{kn}$ за угодою підсумовування). Це і є закон перетворення тензора другого рангу.

Будь-який тензор вищого рангу можна записати через зовнішній добуток векторів. Наприклад, якщо вектори \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} - є трьома тензорами першого рангу, тоді зовнішній добуток $A_i B_k C_j$ буде тензором третього рангу $D_{ikj} = A_i B_k C_j$ ($i, j, k = 1, 2, 3$).

1.8 Тензорна алгебра та властивості тензорів

До основних властивостей тензорів відносяться їх підсумовування, множення на число, взаємний добуток і згортка.

Підсумовування тензорів. Тензори однакового рангу (валентності) підсумовуються. Сумою тензорів одного рангу називається тензор того ж рангу, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонентів доданків.

Сумою тензорів $A_{ijk\dots m}$ і $B_{ijk\dots m}$ є тензор $C_{ijk\dots m}$:

$$C_{ijk\dots m} = A_{ijk\dots m} + B_{ijk\dots m}. \quad (1.65)$$

Тобто, для тензорів B_i та A_i знаходимо: $C_i = A_i + B_i$, а для D_{ij} та E_{ij} : $F_{ij} = D_{ij} + E_{ij}$ і так далі. Аналогічно визначається різниця двох тензорів.

Не можна до вектора додавати скаляр, до тензора другого рангу – вектор. Це положення універсальне, як і положення щодо однакової розмірності доданків в рівняннях.

Множення тензора на дійсне число. Добутком тензора $A_{ijk\dots m}$ на дійсне число λ є тензор такого ж рангу $B_{ijk\dots m}$: $B_{ijk\dots m} = \lambda \cdot A_{ijk\dots m}$. Компоненти $B_{ijk\dots m}$ є добутками кожного компоненту першого тензора на дійсне число λ .

Прямий добуток тензорів. Прямий (або зовнішній) добуток одного тензора (наприклад, A_{ijk}) на інший тензор (наприклад, B_{mn}) дорівнює тензору (C_{ijkmn}), компоненти якого є добутками кожного компоненту першого тензора на кожний компонент другого:

$$C_{ijkmn} = A_{ijk} B_{mn}. \quad (1.66)$$

Відзначимо, що прямий добуток тензорів першого рангу істотно відрізняється від звичайного визначення скалярного добутку векторів, а прямий добуток тензорів другого рангу – від добутку матриць (який вивчається в курсі аналітичної геометрії) відповідно. Тому далі відрізнятимемо добуток тензорів від добутку матриць.

Якщо, наприклад, \vec{A} , \vec{B} - два вектори, то $3^2 = 9$ величин $D_{ik} = A_i B_k$ складають тензор другого рангу. Якщо \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} – три вектори, то $3^3 = 27$ величин відповідного добутку $E_{ijk} = A_i B_j C_k$ складають тензор третього рангу.

Відзначимо, що тензорний добуток не є комутативним, тобто $C_{ijkm} = A_{ij} B_{km} \neq C_{kmij} = A_{km} B_{ij}$. Ранг добутку тензорів дорівнює сумі рангів множників.

Транспонований тензор. Це поняття відноситься до тензорів рангу не менше другого. Якщо в тензорі A_{ik} поміняти місцями індекси, то отримаємо тензор A_{ki} , транспонований по відношенню до A_{ik} . Пишуть: $A_{ki} \equiv A_{ik}^T$.

Симетричний і антисиметричний тензор. Це поняття відноситься до тензорів рангу не менше другого. Тензор називається симетричним, якщо

транспозиція (пересування) двох будь-яких індексів в будь-якому компоненті не приводить до змін. Наприклад, тензор A_{ik} називається симетричним, якщо $A_{ik} = A_{ki}$. Аналогічно, тензор називається антисиметричним (або кососиметричним), якщо транспозиція двох будь-яких індексів у будь-якого компоненту приводить до зміни його знаку.

Наприклад, тензор A_{ik} називається антисиметричним, якщо $A_{ik} = -A_{ki}$. У антисиметричного тензора всі діагональні компоненти (у випадку $A_{ik} - A_{00}, A_{11}, A_{22}$ та інші) дорівнюють нулю. У симетричного тензора всі змішані компоненти A_{ik} і A_{ki} співпадають.

Згортка (спрощення) тензорів. Під згорткою (або операцією контракції, спрощення) розуміють ототожнення будь-якої пари індексів. За цими індексами після згортки потрібно узяти суму. Таким чином, згорткою є сума компонентів тензору по двом будь-яким індексам. При цьому ранг тензора знижується на два.

З компонентів тензора A_{ik} другого рангу можна отримати скаляр операцією згортки або спрощення, коли повторюють пару індексів (вільні індекси стають німими), при цьому утворена сума називається треком (іноді ще шпуром) тензора або його слідом (з німецького “Spur” – слід, з англійського “Trace” – слід).

Можна проводити згортку тільки тих тензорів, ранг яких не менше другого. Тензор парного рангу може бути згорнутим до скаляра, а тензор непарного – тільки до вектора.

Одиничний тензор. Одиничним тензором (символом Кронекера) називають тензор другого рангу δ_{ik} , для якого має місце така рівність: $A_i = \delta_{ik} A_k$ для будь-якого вектора A_i . Для компонентів одиничного тензора прийнято позначення δ_{ik} , при цьому в будь-якій системі координат. Компоненти цього тензора дорівнюють:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (1.67)$$

(Пропонуємо самостійно довести, що δ_{ik} дійсно є тензором: $\hat{\delta} = \hat{a} \hat{\delta} \hat{a}^T$).

Множення на тензор δ_{ik} з подальшою згорткою часто використовується в перетвореннях тензорного аналізу. Наприклад:

$$C_i + A_{ik} C_k = \delta_{ik} C_k + A_{ik} C_k = (\delta_{ik} + A_{ik}) C_k.$$

Нульовий тензор. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою матрицею. Вона позначається символом 0 або $\hat{0}$.

Приведення симетричного тензора до діагонального вигляду. Тензори можуть бути приведені до діагонального вигляду (коли компоненти з неоднаковими індексами дорівнюють нулю), якщо вони симетричні.

Як вже було відмічено раніше, будь-яка координатна система має свій базис: сукупність векторів-ортів, яка визначає всі координатні осі і напрями осей. Наприклад, в декартовій системі базис складається з трьох векторів-ортів $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, які є одиничними векторами осей OX, OY, OZ . У тривимірному просторі лінійно незалежними є три вектори. Якщо вибрати їх базисними, то будь-який інший вектор визначатиметься через базисні вектори або три числа (компоненти). Частіше використовують три взаємно ортогональних вектора одиничної довжини, в такому випадку базис називають ортонормованим.

Як відомо з курсу аналітичної геометрії, діагоналізацію матриці можна зробити за допомогою переходу від одного базису до іншого (від однієї системи координат до іншої). Значення компонентів тензора в координатній системі, в якій він має діагональний вигляд, називаються головними значеннями. А відповідний базис такої координатної системи називають власним базисом (вектором) або основним базисом.

В курсі аналітичної геометрії доводиться, що: 1) будь-яке симетричне лінійне перетворення в будь-якому ортогональному базисі має симетричну матрицю; 2) якщо в деякому ортогональному базисі матриця лінійного перетворення симетрична, то симетричне і саме перетворення; 3) кожне симетричне лінійне перетворення на площині має принаймні одну пару

власних перпендикулярних векторів; 4) кожне симетричне лінійне перетворення в просторі має принаймні одну трійку попарно перпендикулярних власних векторів.

Діагоналізацію можна зробити за допомогою розкриття відповідного визначника. Наприклад, для тензора другого рангу $T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ маємо

таке кубічне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язками $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння є діагональні компоненти тензора. Вони є головними (власними) значеннями діагоналізованого тензора T_{ik} , який матиме вигляд:

$$T'_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Наприклад, діагоналізований тензор теплопровідності кристала визначає головні коефіцієнти теплопровідності.

Відзначимо, що якщо матриця симетрична, то характеристичне рівняння цієї матриці має тільки дійсні корні.

Діагональна матриця, власні значення якої дорівнюють одиниці, називається одиничною.

Зворотною матрицею називають матрицю, яка має таку властивість: добуток матриці (за правилом добутку матриць) на зворотну дає одиничну матрицю.

Знаходження зворотної матриці. Нехай $P = P_{ij}$ є тензором другого рангу (матрицею), який перетворить компоненти будь-якого вектора із однієї системи координат в іншу. Тоді можна знайти таку матрицю P^{-1} , яка перетворить компоненти цього ж вектора назад до початкової системи.

Нехай, наприклад, $P_{ik} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ є матрицею другого порядку. Можна

показати, що зворотна матриця матиме вигляд:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_{22}}{|P|} & -\frac{P_{12}}{|P|} \\ -\frac{P_{21}}{|P|} & \frac{P_{11}}{|P|} \end{pmatrix}.$$

Тут $|P|$ - детермінант матриці P_{ik} . (Перевірити самостійно). Якщо, наприклад,

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, детермінант $|P|=1$, а $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Легко перевірити, що

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.9 Основи тензорного аналізу

Перейдемо від тензорної алгебри до тензорного аналізу полів. Кажуть, що в області задано тензорне поле, якщо кожній точці області ставиться у відповідність тензор однакового рангу (порядку або валентності). Такий тензор називатимемо тензором поля. Він залежить від точок простору і може змінюватися від точки до точки, тобто є функцією координат. З цієї точки зору скалярне поле є полем тензора нульового рангу, а векторне поле є полем тензора першого рангу. У прикладних задачах частіше використовуються не окремі тензори, а тензорні поля.

Нехай $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ – вектор. Він відповідає певному фізичному об'єкту, наприклад, силі, швидкості і тому подібне. Цей об'єкт реально існує незалежно від системи координат. Проте його компоненти A_x, A_y, A_z залежать вже не тільки від самого вектора \vec{A} , а й від координатної системи, в якій він описується.

Таким чином, якщо задаємо вектор його координатами, то одночасно вибираємо координатну систему. Тоді дані, які отримуємо, відображають не тільки те, що нам цікаво, а й довільний вибір координатної системи.

Основне завдання тензорного аналізу – навчитися відокремлювати властивості фізичних об'єктів (які не залежать від вибору системи координат) від характеристик випадково вибраної координатної системи.

Приблизний алгоритм задачі тензорного аналізу наступний. Спочатку визначаються безпосередньо тензори, тобто конструкції, які відповідають фізичним величинам і які перетворюються по деякому закону при переході від однієї системи до іншої. Далі вводять операції між тензорами та інваріантні співвідношення (фізичні закони).

У розділах 1.7, 1.8 вже надані визначення і показані перетворення тензорів. Необхідно відзначити, що під алгебраїчною операцією над тензором поля розуміють операцію над тензором поля в кожній точці поля. Тобто, якщо, наприклад, підсумовують два тензори поля, то вони обов'язково підсумовуються в одній і тій же точці поля.

Тензорний аналіз утворений тензорною алгеброю, доповненою апаратом диференціювання тензорів.

Диференціювання тензора поля. Аналогічно визначенню похідної функції скалярного поля за напрямом (розділ 1.1) можна знайти зміну тензора поля за напрямом і застосувати поняття диференціювання тензора поля.

Операція диференціювання тензора поля є основною операцією тензорного аналізу.

Нехай, наприклад, задане поле тензора другого рангу: $A_{ij} = A_{ij}(M)$. Якщо перейти від однієї точки M поля до іншої M' , то напрям переходу визначається вектором $d\vec{r} = \overline{MM'}$. Очевидно, що радіус-вектор точки M' визначається як $\vec{r}' = \vec{r} + \overline{MM'} = \vec{r} + d\vec{r}$, а значення тензора в цій точці

$A_{ij}(M') = A_{ij}(\vec{r} + d\vec{r})$ відрізнятиметься від $A_{ij}(\vec{r})$. Різниця значень тензора в цих точках є абсолютним (або повним) диференціалом тензора поля.

Вектор $d\vec{r} = \overline{MM'}$ можна записати через його компоненти і одиничні вектори базису: $d\vec{r} = dx_k \vec{l}_k$ ($k = 1, 2, 3$). З точністю до першого порядку повний диференціал для тензора другого рангу A_{ij} запишеться:

$$dA_{ij} = \frac{\partial A_{ij}(M)}{\partial x_k} dx_k, \quad (1.68)$$

де по індексу k йде додавання. При цьому сам диференціал dA_{ij} також є тензором 2-го рангу, але вже іншого тензорного поля – тензорного поля диференціалів.

Абсолютна похідна тензорного поля. Дія $\frac{\partial A_{ij}(M)}{\partial x_k}$ (формула (1.68)) може бути застосована до будь-якої точки простору. Її називають абсолютною похідною тензорного поля $A_{ij}(\vec{r})$ і для зручності позначають:

$$\frac{\partial A_{ij}(M)}{\partial x_k} \equiv A_{ij,k}(M). \quad (1.69)$$

Тобто $dA_{ij} = A_{ij,k}(M) dx_k$.

Відзначимо, що величина $A_{ij,k}(M) dx_k$ фактично отримана за допомогою згортки по індексам k, m тензора добутку $A_{ij,m}(M) dx_k$ по індексу k . При цьому згортка приводить до утворення тензора dA_{ij} другого рангу.

Тому $A_{ij,k}(M) \cdot dx_k$ – тензор четвертого рангу, оскільки під час згортки ранг зменшується на 2. З іншого боку, dx_k є вектором, тобто тензором першого рангу. Звідси зрозуміло, що абсолютна похідна тензорного поля $A_{ij,k}(M)$ є вже тензором третього рангу. Таким чином, під час знаходження похідної ранг тензора похідної збільшується на одиницю по відношенню до рангу самого тензора поля.

Наприклад, для тензора нульового рангу $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ тензорного поля (тобто скалярної функції скалярного поля) абсолютна похідна поля дає тензор першого рангу, функцію $\varphi_{,k}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ (іншого поля). Останнє є фактично полем градієнта скалярного поля, тобто $\varphi_{,k} \vec{l}_k = \overrightarrow{grad} \varphi$ ($k = 1, 2, 3$) є вектором, скалярний добуток якого на вектор $d\vec{r} = dx_n \vec{l}_n$ векторного поля ($n = 1, 2, 3$) дає скаляр $d\varphi$ – диференціал (першого порядку) від скалярної функції. Аналогічно формулюються похідні вищих порядків для тензора поля. Насамперед це означає, що тензор поля можна розкласти в ряд Тейлора. Формула такого розкладання тензора другого рангу A_{ij} біля точки $M(x_1, x_2, x_3)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} A_{ij}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) &= \\ &= A_{ij}(M) + dA_{ij}(M) + \frac{1}{2!} d^2 A_{ij}(M) + \frac{1}{3!} d^3 A_{ij}(M) + \dots \end{aligned} \quad (1.70)$$

Тут кожен диференціал є тензором, знайденим в точці M . Останній вираз можна переписати:

$$\begin{aligned} A_{ij}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) &= \\ &= A_{ij}(M) + A_{ij,k}(M) dx_k + \frac{1}{2!} A_{ij,kn}(M) dx_k dx_n + \dots \end{aligned} \quad (1.71)$$

Зрозуміло, що алгебра для диференціалів і похідних скалярних та векторних функцій відповідних полів узагальнюється в алгебру диференціалів і похідних тензорних полів. Наприклад, можна довести, що абсолютний диференціал суми тензорів дорівнює сумі диференціалів доданків:

$$d(A_{ij} + B_{ij}) = dA_{ij} + dB_{ij}. \quad (1.72)$$

Можна також показати, що абсолютний диференціал добутку тензорів отримується за звичайним правилом (диференціал першого множника, помножений на другий множник, плюс перший множник, помножений на абсолютний диференціал другого множника):

$$d(A_{ij}B_m) = B_m dA_{ij} + A_{ij} dB_m. \quad (1.73)$$

При цьому ця рівність зберігається також за наявності згортки помножених тензорів. Для похідних тензорів полів маємо:

$$(A_i + B_i)_{,n} = A_{i,n} + B_{i,n}, \quad (A_{ij} + B_{ij})_{,n} = A_{ij,n} + B_{ij,n} \text{ і т.д.} \quad (1.74)$$

Таким чином, визначені основні дії та властивості тензорів.

Контрольні питання та завдання:

1. Дати визначення похідної за напрямом.
2. Дати визначення градієнту скалярного поля та визначити його властивості.
3. Дати визначення векторного поля та векторної лінії. Що таке «диференціальне рівняння векторних ліній» ?
4. Дати визначення потоку векторного поля крізь поверхню.
5. Сформулювати поняття дивергенції векторного поля та її властивостей.
6. Дати поняття джерел та стоків векторних полів.
7. Дати визначення потенціальних та соленоїдних полів; які є їхні критерії ?
8. Сформулювати теорему Гауса-Остроградського.
9. Пояснити, як визначається циркуляція векторного поля ?
10. Сформулювати поняття ротора векторного поля та визначити його властивості.
11. Сформулювати теорему Стокса.
12. Визначити основні операції над скалярними та векторними полями.
13. Дати визначення тензору та показати його властивості.
14. Дати визначення основам тензорної алгебри та основним операціям над тензорами.
15. Якою є основна задача та основна операція тензорного аналізу ?

Розділ 2 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ В РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

2.1 Види передачі тепла. Теплопровідність твердих тіл, рідин та газів

Поняття теплообміну охоплює весь комплекс явищ перенесення теплоти в просторі, обумовлених різницею температур окремих елементів такого середовища. У загальному випадку перенесення теплоти – складний процес, пов'язаний з різноманітними фізичними явищами, проте можна виділити три основні види (механізми) теплообміну: теплопровідність, конвекційний теплообмін, теплообмін випромінюванням [11, 14, 19, 21, 51, 52, 63, 65, 79-81, 95, 102, 111, 128].

Теплопровідність – молекулярне перенесення теплоти в тілах (або в середовищі між ними), обумовлене неоднорідністю розподілу температури в просторі.

Теплопровідність не пов'язана з макрорухом тіл і здійснюється передачею енергії від одних макрочасток тіла до інших при їх взаємодії. Для газів, наприклад, такими частинками є молекули. Відомо, що молекули більш нагрітої частини будь-якого газу мають більшу середню кінетичну енергію в порівнянні з молекулами холодної його частини. При зіткненні молекул відбувається обмін кінетичною енергією, внаслідок чого здійснюється передача теплоти від нагрітої частини газу до холодної.

Процес теплопровідності в металах аналогічний процесу електропровідності і пов'язаний з рухом вільних електронів. У простому випадку можна вважати, що вільні електрони поведуться як молекули газу, тобто переміщуються між атомами і здійснюють передачу теплоти. Таким чином, в газах і металах процес передачі теплоти визначається дифузиею молекул і вільних електронів, відповідно.

У твердих тілах – діелектриках перенесення теплової енергії здійснюється пружними хвилями, що виникають в результаті коливання кристалічної решітки. Відзначимо, що в металах деяка частина енергії також

передається пружними хвилями, проте вона незначна в порівнянні з дифузним перенесенням теплоти вільними електронами.

Конвекція – перенесення теплоти при переміщенні об'ємів рідини (газу) в просторі. Конвекція можлива тільки в проточному середовищі, при цьому перенесення теплоти нерозривно пов'язаний з перенесенням самого середовища. У рідинах і газах конвекція завжди супроводжується теплопровідністю.

Теплове випромінювання – процес розповсюдження теплоти електромагнітними хвилями. При такому виді передачі теплоти відбувається перетворення внутрішньої енергії речовини на енергію випромінювання, перенесення випромінювання і його поглинання речовиною.

Теплове випромінювання обумовлене тільки температурою та оптичними властивостями випромінюючого тіла. Воно підкоряється основним законам розповсюдження світла, тобто законам віддзеркалення, заломлення і поглинання. У чистому вигляді (тобто без інших видів теплообміну) променистий теплообмін має місце лише в умовах глибокого вакууму, наприклад, при технологічних процесах обробки у вакуумі, до яких відноситься електронна обробка оптичних матеріалів.

У процесах, які спостерігаються в природі та техніці, теплообмін випромінюванням супроводжується конвекцією і теплопровідністю. В цьому випадку теплообмін називають складним або радіаційно-конвекційним. Проте комплексне математичне вивчення складного теплообміну утруднене, тому часто заздалегідь вивчають кожен вид теплообміну окремо, а потім переходять до розрахунку складного теплообміну.

Крім того, при розв'язанні конкретних завдань один з видів теплопередачі, як правило, є переважаючим, так що кількість теплоти, яка передається іншими видами теплообміну невелика тому нею можна нехтувати. В зв'язку з цим представляє інтерес вивчення кожного з видів теплообміну окремо. Розглянемо докладніше процес перенесення теплоти теплопровідністю.

Теплопровідність в чистому вигляді переважно має місце в твердих тілах. У рідинах і газах теплота, як правило, передається конвекцією, тобто чиста теплопровідність можлива лише за умови, що вони абсолютно нерухомі і повністю унеможливлено виникнення в них конвективних потоків.

При теоретичному дослідженні теплообміну необхідно враховувати властивості середовища, в якому відбувається теплообмін. Всі тіла, в яких розглядаються процеси теплопровідності, будемо вважати суцільним середовищем, тобто будемо нехтувати їх дискретною будовою. Такий феноменологічний підхід до дослідження процесів теплообміну взагалі і теплопровідності зокрема правомірний, якщо розміри об'єктів дослідження достатньо великі в порівнянні з відстанями ефективної міжмолекулярної взаємодії.

Надалі розглядатимемо лише однорідні суцільні середовища, для яких властивості в різних точках однакові при одних і тих же значеннях температури і тиску (у неоднорідних середовищах різні). Розрізняють ізотропні і анізотропні суцільні середовища. У перших середовищах фізичні властивості не залежать від вибраного напрямку; в інших – навпаки, деякі властивості в даній точці можуть бути функцією напрямку. На практиці найчастіше зустрічаються ізотропні тіла.

Під терміном «суцільне середовище» ми розуміємо не тільки чисту речовину, але й суміші речовин (газові суміші, розчини тощо). У сумішах різних речовин перенесення теплоти теплопровідністю пов'язане з перенесенням маси і в загальному випадку визначається не тільки наявністю градієнту температур, але й неоднорідністю розподілу полів інших фізичних величин. Наприклад, неоднорідність поля концентрацій приводить до дифузії речовини і додаткового молекулярного перенесення теплоти, яке називається дифузійною теплопровідністю (ефект Дюфо). Зазвичай перенесення теплоти, обумовлене подібними ефектами, невелике і ними майже завжди можна нехтувати.

Таким чином, надалі, за винятком спеціально оговорених випадків, розглядатимуться процеси теплопровідності в однорідних, ізотропних, однофазних суцільних середовищах.

2.2 Основні поняття та визначення теорії теплопровідності

Температурне поле. Будь-яке фізичне явище відбувається в просторі і в часі, тому вивчення його зводиться до знаходження просторово-часових характеристик величин, що визначають цей процес.

Сукупність миттєвих значень фізичної величини в усіх точках даної області називають полем цієї фізичної величини.

В процесах теплопровідності основною фізичною величиною, характерною для таких процесів, є температура. Завдання теплопровідності полягає в знаходженні поля температур даного об'єкту, тобто у визначенні залежності:

$$T = f(x, y, z, t), \quad (2.1)$$

де T – температура, t – час, x, y, z - просторові координати в декартовій системі.

Температура є величина скалярна, тому температурне поле – також скалярна величина. Відзначимо, що приведені вище визначення поля справедливі і для векторних величин, що показують і величину, і напрям (сила, швидкість, прискорення тощо).

Такі поля називають векторними полями фізичних величин.

Розрізняють стаціонарне і нестаціонарне температурні поля. Нестаціонарним температурним полем називають поле, температура якого змінюється і в просторі і з часом.

В цьому випадку кажуть, що температура є функція простору і часу. Прикладом математичного запису нестаціонарного температурного поля є рівняння (2.1).

Стаціонарним температурним полем називається поле, температура якого в будь-якій його точці не змінюється з часом, тобто є функцією тільки координат:

$$T = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2.2)$$

Теплові режими, що характеризуються нестаціонарними температурними полями, називаються несталими. У разі, коли температурні поля стаціонарні, теплові режими називають сталими.

Відповідно до числа просторових координат, від яких залежить температура, температурне поле може бути тривимірним (його запис має вигляд рівнянь (2.1), (2.2), двовимірним:

$$T = f_2(x, y, t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

і одновимірним

$$T = f_3(x, t), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Температурний градієнт. Якщо з'єднати точки тіла, що мають однакову температуру, тоді отримаємо поверхню рівних температур, яка називається ізотермічною. Ізотермічні поверхні є поверхнями рівня температурного поля і описуються рівнянням:

$$T = f(x, y, z, t) = C, \quad (2.5)$$

де $C = \text{const}$.

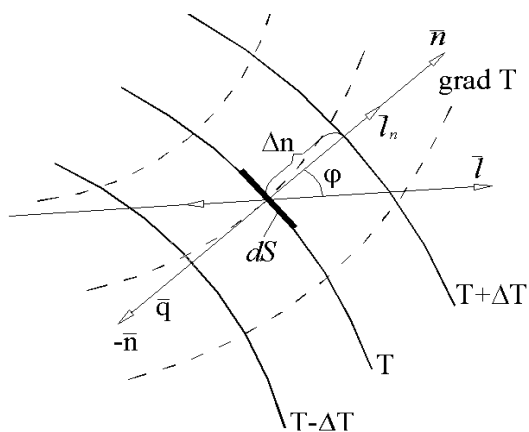


Рисунок 2.1 - Температурне поле

При перетині ізотермічної поверхні площиною отримаємо сімейство ізотерм (ліній, які відповідають однаковій температурі). Розглянемо дві близькі ізотермічні поверхні з температурами T і $T + \Delta T$ (рис. 2.1). Якщо температурне поле безперервне, ізотермічні поверхні та ізотермічні лінії для даних температур не перетинаються між собою і не обриваються

всередині нього, оскільки в одній і тій же точці тіла не може бути двох різних значень температури.

Уздовж ізотермічної поверхні T змінення температури не відбувається, оскільки ізотермічна поверхня – геометричне місце точок з однаковою температурою, а уподовж довільно вибраного напрямку l , що перетинає ізотерму $T + \Delta T$, спостерігається зміна температури.

При цьому найбільший перепад температури на одиницю довжини буде, очевидно, спостерігатися при переміщенні по напрямку нормалі \vec{n} до ізотермічної поверхні.

Межа відношення зміни температури ΔT до відстані між ізотермами T и $T + \Delta T$ по нормалі Δn при $\Delta n \rightarrow 0$ називають градієнтом температури, тобто:

$$|\text{grad } T| = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta n} \right). \quad (2.6)$$

Градієнт температури є вектор, направлений по нормалі до ізотермічної поверхні, причому за позитивний напрям цього вектора береться напрям у бік зростання температури:

$$\text{grad } T = \vec{l}_n \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right), \quad (2.7)$$

де \vec{l}_n – одиничний вектор нормалі до ізотермічної поверхні, направлений у бік зростання температури; $\frac{\partial T}{\partial n}$ – похідна від температури по нормалі n .

Похідна $\frac{\partial T}{\partial n}$ у напрямі убутання температури негативна. Для вектора градієнта використовується таке позначення:

$$\text{grad } T = \vec{\nabla} T. \quad (2.8)$$

Відповідно до позначення (2.8), вектор $\vec{\nabla}$ в декартовій системі координат може бути представлений таким чином:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні вектори обраної системи координат.

Проекції вектора $grad T$ на осі OX , OY , OZ очевидно дорівнюють:

$$\begin{aligned} (grad T)_x &= (\vec{\nabla} T)_x = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{i}) = \frac{\partial T}{\partial x}, \\ (grad T)_y &= (\vec{\nabla} T)_y = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{j}) = \frac{\partial T}{\partial y}, \\ (grad T)_z &= (\vec{\nabla} T)_z = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{k}) = \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned}$$

Тепловий потік. Основний закон теплопровідності Фур'є.

Перенесення теплоти в тілі за допомогою теплопровідності може здійснюватися тільки при неоднорідному розподілі в ньому температури, тобто необхідною умовою виникнення усередині тіла теплового потоку є відмінний від нуля градієнт температури.

Як показує досвід, теплота передається від точок з більшою температурою до точок з меншою температурою, тому тепловий потік на відміну від температури, яка є скалярною величиною, має певний напрям.

Позначимо повну кількість теплоти, що пройшла через елемент ізотермічної поверхні ds за час t через Q_t . Тоді, в одиницю часу dt через цю поверхню проходить кількість теплоти $Q = \frac{dQ_t}{dt}$.

Повна кількість теплоти Q_t може бути виражена таким чином:

$$Q_t = \int_0^t Q dt. \quad (2.9)$$

Для характеристики процесів теплоперенесення вводиться вектор теплового потоку \vec{q} , значення якого дорівнює кількості теплоти dQ_t , що проходить в одиницю часу dt через одиницю площі ізотермічної поверхні dS , а напрям в будь-якій точці ізотропного тіла протилежний напрямку градієнта температури:

$$q = |\vec{q}| = \frac{d^2 Q_t}{dt dS} = \frac{dQ}{dS}, \quad (2.10)$$

звідки,
$$Q = \int_S q dS, \quad Q_t = \int_0^t \int_S q dS. \quad (2.11)$$

Вектор щільності теплового потоку \vec{q} направлений у бік перенесення теплоти і є дотичним до ліній теплового потоку (див. рис. 2.1). Лінії теплового потоку перпендикулярні до ізотермічних поверхонь в точках перетину з ними.

Відповідно припущенню Фур'є, тепловий потік через елемент ізотермічної поверхні визначається значенням температурного градієнта в даній точці. Численні дослідження дозволили встановити наступну залежність між щільністю теплового потоку і градієнтом температур:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T, \quad q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.12)$$

де λ - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплопровідності, або теплопровідністю. При цьому, знак "–" у формулі (2.12) означає те, що вектор градієнта температури і вектор щільності теплового потоку направлені уздовж нормалі до ізотермічної поверхні, але в різні боки.

Основний закон теплопровідності Фур'є описується рівністю (2.12) і формулюється таким чином: щільність теплового потоку прямо пропорційна градієнту температури.

Проекції вектора \vec{q} на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_x &= |\vec{q}| \cos(\vec{l}_n, \vec{i}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{i}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y &= |\vec{q}| \cos(\vec{l}_n, \vec{j}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{j}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_z &= |\vec{q}| \cos(\vec{l}_n, \vec{k}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\vec{l}_n, \vec{k}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \end{aligned}$$

де $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = |\vec{q}| = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)$ - модуль вектора теплового потоку.

Теплопровідність λ є фізичним параметром і в загальному випадку залежить від температури, тиску та атомно-молекулярної будови речовини.

2.3 Диференціальне рівняння теплопровідності для нерухомих тіл

Аналітичне вивчення процесів теплопровідності неможливе без встановлення залежності між фізичними величинами, що характеризують ці процеси і які є функціями координат і часу. Математичний вираз такої залежності, що має форму диференціального рівняння, називають основним диференціальним рівнянням теплопровідності (або просто рівнянням теплопровідності).

Воно характеризує протікання процесу теплопровідності в будь-якій точці тіла у будь-який момент часу і дає залежність між температурою, часом і координатами довільного елементарного об'єму. Диференціальне рівняння теплопровідності є наслідком закону збереження енергії і закону теплопровідності Фур'є.

Виведення рівняння теплопровідності. Припустимо, що дане тіло нерухоме, процес теплопровідності нестационарний, а температурні деформації елементарного об'єму дуже маленькі в порівнянні з об'ємом.

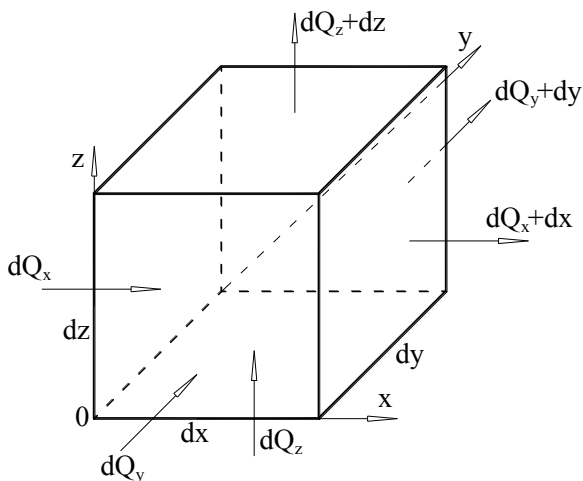


Рисунок 2.2 – Схема до виведення рівняння теплопровідності

Розглянемо нескінченно малий об'єм $dy dz$ в прямокутній системі координат $Oxyz$ (рис. 2.2).

Через грань $dydz$ до поверхні елементарного об'єму за час dt уздовж осі x підводиться кількість теплоти dQ_x . Через протилежну грань $x + dx$ відводиться кількість теплоти dQ_{x+dx} .

$$dQ_x = q_x dy dz dt. \quad (2.13)$$

Через протилежну грань $x + dx$

відводиться кількість теплоти dQ_{x+dx} .

Розкладемо функцію dQ_{x+dx} в ряд Тейлора, збережемо тільки два перші члени розкладання:

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x) dx + \dots \quad (2.14)$$

Підрахуємо різницю між кількістю теплоти, підведеної за рахунок

теплопровідності до елементарного об'єму за час dt уздовж осі OX і кількістю теплоти, відведеної від нього за цей же час уздовж осі OX :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x) dx dy dz dt. \quad (2.15)$$

Аналогічним чином записується зміна кількості теплоти уздовж осей OY, OZ :

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}(q_y) dx dy dz dt, \quad (2.16)$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}(q_z) dx dy dz dt.$$

Додаючи рівності (2.15) та (2.16), отримаємо відмінність між загальною кількістю підведеної та відведеної теплоти за час dt через поверхню елементарного об'єму:

$$dQ_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z) \right] dx dy dz dt. \quad (2.17)$$

Отже, до елементарного об'єму за час dt підведена за рахунок теплопровідності кількість теплоти dQ_1 , яка визначається рівністю (2.17).

Усередині тіла може виділятися або поглинатися теплота в результаті, наприклад, хімічних перетворень, випаровування вологи, дії електричного струму тощо. Тобто, в тілі можлива наявність об'ємних джерел (стоків) теплоти. Позначимо q_v потужність внутрішніх джерел теплоти (її ще називають об'ємною щільністю теплового потоку), яка визначається як кількість теплоти, що виділяється (або поглинається) внутрішніми джерелами (стоками) за одиницю часу в одиниці елементарного об'єму середовища.

Припустимо, що q_v є відомою функцією координат і часу $q_v = q_v(x, y, z, t)$, тоді кількість теплоти, що виділяється в елементарному об'ємі внутрішніми джерелами теплоти за час dt :

$$dQ_2 = q_v dx dy dz dt. \quad (2.18)$$

Акумуляована в елементарному об'ємі за рахунок теплопровідності теплота dQ_1 , а також виділена об'ємними джерелами теплота dQ_2 , згідно

закону збереження енергії, йде на збільшення внутрішньої енергії U , якщо процес протікає при постійному об'ємі V , або на збільшення ентальпії H , якщо процес протікає при постійному тиску p .

Складемо рівняння теплового балансу за час dt для елементарного об'єму $dx dy dz$ в кожному з цих випадків:

- при ізохорному процесі ($V = const$):

$$dQ_1 + dQ_2 = dV, \quad (2.19)$$

- при ізобарному процесі ($p = const$):

$$dQ_1 + dQ_2 = dH. \quad (2.20)$$

Вважаючи внутрішню енергію одиниці об'єму функцією об'єму і температури, отримаємо:

$$dV = C_v \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy dz = \vec{c}_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt, \quad (2.21)$$

де \vec{c}_v - ізохорна теплоємність одиниці маси, Дж/кг·К; ρ - щільність речовини, кг/м³; C_v - ізохорна теплоємність одиниці об'єму, Дж/м³·К.

Підставляючи вираз для dV (2.21) в рівність (2.19) і враховуючи (2.17), (2.18), знаходимо:

$$\rho \vec{c}_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v. \quad (2.22)$$

Оскільки $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \text{div} \vec{q}$, перепишемо (2.22) у вигляді:

$$\rho \vec{c}_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + q_v. \quad (2.23)$$

У разі ізобарного процесу, розглядаючи ентальпію одиниці об'єму H як функцію температури і тиску, можна отримати:

$$dH = C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy dz = \rho \vec{c}_p \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy dz, \quad (2.24)$$

де \vec{c}_p - ізобарна теплоємність одиниці маси, Дж/(кг·К); C_p - ізобарна теплоємність одиниці об'єму, Дж/(м³·К).

Підставляючи (2.24) в (2.19) і використавши рівності (2.17), (2.18),

отримаємо:

$$\rho \vec{c}_\delta \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v = -\text{div} \vec{q} + q_v. \quad (2.25)$$

Вирази (2.23), (2.25) є диференціальними рівняннями енергії, відповідно, для ізохорного і ізобарного процесів. Для твердих тіл \vec{c}_δ , \vec{c}_v близькі, тому можна прийняти $\rho \vec{c}_p = \rho \vec{c}_v = C_v$. Величину C_v називають ще об'ємною теплоємністю. Використовуючи закон Фур'є, запишемо рівняння (2.25) у вигляді:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \quad (2.26)$$

або при $\lambda = \text{const}$:

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) + F_v, \quad (2.27)$$

де $F_v = q_v / C_v$.

Рівняння (2.27) називають рівнянням теплопровідності, яке встановлює зв'язок між зміною температури будь-якої точки тіла у просторі та часі.

Коефіцієнт пропорційності в рівнянні (2.27) $a^2 = \frac{\lambda}{\tilde{N}_v}$ називається температуропровідністю і вимірюється в м²/с. Фізичний зміст температуропровідності полягає в тому, що a^2 дорівнює кількості теплоти, яка протікає в одиницю часу через одиницю поверхні при перепаді об'ємної концентрації внутрішньої енергії або ентальпії в 1 Дж/м³ на одиницю довжини нормалі, тобто температуропровідність є коефіцієнтом дифузії внутрішньої енергії при $V = \text{const}$ або ентальпії при $p = \text{const}$. В зв'язку з цим розрізняють температуропровідність при постійному об'ємі \dot{a}_v^2 і при постійному тиску \dot{a}_δ^2 . Для твердих тіл $\dot{a}_v^2 = \dot{a}_\delta^2 = a^2$.

Можна додати температуропровідності a^2 й інший фізичний зміст.

З рівняння (2.27) видно, що при $F_v = 0$ швидкість зміни температурного поля залежить від однієї фізичної величини – температуропровідності, а саме

похідна $\frac{\partial T}{\partial t}$ прямо пропорційна величині a^2 .

Величина, зворотна температуропровідності, характеризує інерціальні властивості тіла відносно розповсюдження температурного поля.

Температуропровідність, так само як і C_v залежить від температури, а температуропровідність пористих і порошкоподібних тіл ще й від щільності та вологості.

Проте для ряду задач в першому наближенні можна вважати a^2 постійною величиною.

Для стаціонарних процесів теплопровідності (при $\frac{dT}{dt} = 0$) рівняння (2.27) матиме вигляд:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + F_v = 0. \quad (2.28)$$

Вираз (2.28) називають рівнянням Пуассона. При $F_v = 0$ ($q_v = 0$) рівняння (2.28) називають рівнянням Лапласа.

Рівняння теплопровідності в циліндрових і сферичних координатах.
Разом з рівнянням теплопровідності в прямокутній системі координат (див. рівняння (2.27) в теплотехнічних розрахунках також широко використовується рівняння теплопровідності в циліндрових та сферичних координатах.

У циліндрових координатах (r, φ, z) пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \end{aligned} \quad (2.29)$$

рівняння теплопровідності приймає вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F_v. \quad (2.30)$$

У сферичних координатах (r, φ, θ) пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = z \cos \theta \\ 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi \end{aligned} \quad (2.31)$$

рівняння теплопровідності записується у вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + F_v. \quad (2.32)$$

В окремому випадку, коли температурне поле володіє сферичною симетрією, останнє рівняння (при $F_v = 0$) приймає вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2.33)$$

2.4 Диференціальне рівняння теплопровідності з рухомим джерелом теплової дії

Розглянемо спочатку рівняння теплопровідності для рухомого тіла.

В цьому випадку основний закон теплопровідності має вигляд:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T + C_v \vec{v} \vec{\nabla} T, \quad (2.34)$$

де \vec{v} - вектор швидкості тіла, м/с; $\vec{\nabla}$ - оператор.

Підставляючи (2.34) в (2.25), отримаємо наступне рівняння теплопровідності для рухомого тіла (прямокутна система координат $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$):

$$\begin{aligned} C_v \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right) - \\ &- C_v \left(v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} + v_z \frac{dT}{dz} \right) + q_v. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для випадку $\lambda = \text{const}$ отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - v_x \frac{\partial T}{\partial x} - v_y \frac{\partial T}{\partial y} - v_z \frac{\partial T}{\partial z} + F_v. \quad (2.36)$$

Наприклад, якщо тіло рухається тільки уздовж осі X , то рівняння (2.36) перетворюється в таке ($\vec{v} = (v_x, 0, 0)$, $v_x = v = \text{const}$):

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) - v \frac{dT}{dx} + F_v. \quad (2.37)$$

Тепер, якщо тіло нерухоме, а джерело зовнішньої теплової дії рухається у напрямі осі X із швидкістю v , то рівняння теплопровідності в цьому випадку (у системі координат, яка пов'язана з центром джерела) матиме вигляд:

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + v \frac{dT}{dx} + F_v. \quad (2.38)$$

Розглянемо випадок одновимірного рівняння теплопровідності із зовнішнім джерелом теплової дії з об'ємною щільністю теплового потоку q_v гауссівського типу (використовується при електронній обробці оптичних матеріалів у вигляді тонкоплівкових елементів і стрижнів, пластин тощо [124]):

$$q_v = p(t) e^{-k(t)x^2}, \quad (2.39)$$

де $p(t)$ – об'ємна щільність теплового потоку в центрі джерела, Вт/м³; k – коефіцієнт зосередженості джерела теплової дії (гострота теплового імпульсу), м⁻².

Підставляючи (2.39) в (2.38) і враховуючи (2.27), отримаємо наступне рівняння теплопровідності з рухомим джерелом теплової дії:

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + v \frac{dT}{dx} + \frac{p(t)}{C_v} e^{-k(t)x^2}. \quad (2.40)$$

Для приведення рівняння (2.40) до стандартного (фундаментального) вигляду

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + \frac{q_v}{c_v} \quad (2.41)$$

для якого в даний час розроблені класичні методи його розв'язку (методи інтегральних перетворень Фур'є, метод розділення змінних тощо [11, 18, 19, 51, 65, 79-81, 84, 111, 122]), використовується підстановка:

$$T(x, y, z) = V(x, y, z, t) e^{\frac{v_x}{2a^2} - \frac{v^2 t}{4a^2}}. \quad (2.42)$$

Підставляючи (2.42) в (2.40), отримаємо для функції $V(x, y, z, t)$ рівняння типу (2.41):

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dt^2} \right) + \vec{q}_v \quad (2.43)$$

де $\vec{q}_v = \frac{p(t)}{C_v} e^{-k(t)x^2 - \frac{v_x}{2a^2} - \frac{v^2 t}{4a^2}}$, яке широко використовується в практичних

розрахунках при проектуванні, наприклад, оптичних інтегральних схем (ОІС) в точному приладобудуванні [25, 30, 59, 114].

2.5 Диференціальне рівняння теплопровідності в деформованому твердому тілі

Розглянемо питання про зв'язок процесу теплопровідності і пружної деформації твердого тіла за наявності градієнта температури. При виведенні рівняння теплопровідності (2.25) передбачалося, що температурне поле, в першому наближенні, не залежить від деформацій, що викликаються цим полем. Проте, для проведення точніших теплових розрахунків (наприклад, в твердотільній електроніці, нанотехнологіях тощо [16, 59, 100, 114]) необхідно враховувати, що при деформації виділяється або поглинається теплота, яка впливає на розподіл температури. В цьому розділі, на відміну від існуючих, достатньо складних, викладів вказаного питання в літературі [15, 36, 45, 51, 52, 61, 79, 81, 85], розглядається у вигляді прийнятному для вивчення.

Виведення рівняння теплопровідності. Розглянемо тіло вільне від зовнішніх навантажень з нерівномірним розподілом температури. Якщо тіло ізотропне і однорідне, а усі елементарні об'єми тіла одночасно і однаковою мірою змінюють свою температуру, то деформація, що виникає в ньому, не викликає появи напружень. В цьому випадку деформації (подовження) по трьом осям координат (x, y, z) дорівнюють $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \vec{\alpha}(T - T_0)$, де $\vec{\alpha}$ -

коефіцієнт термічного розширення; $T(M, t)$ - температура точки M тіла у момент часу t ; $T_0 = const$ – початкова температура, при якій тіло знаходиться в недеформованому і ненапруженому стані (усі напруження та деформації дорівнюють нулю).

Насправді, зміна температури тіла, а отже, і теплове розширення (стискування) елементарних об'ємів відбувається нерівномірно, унаслідок чого в тілі виникають внутрішні напруження $\sigma_{ij}(i, j = x, y, z)$, які обумовлюють додаткові подовження та зрушення. Величини σ_{ij} є компонентами тензора напруження σ , що визначає напружений стан в будь-якій точці M усередині тіла і по будь-якій ділянці, яка проведена через точку M .

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

При цьому $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (тензор σ - є симетричним тензором другого рангу).

По аналогії з позначенням вектора в тензорному численні вводиться наступне позначення для тензора:

$$\sigma = \vec{\sigma}_x \cdot \vec{i} + \vec{\sigma}_y \cdot \vec{j} + \vec{\sigma}_z \cdot \vec{k}, \quad (2.45)$$

де $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ мають наступне розкладання по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{\sigma}_p = \sigma_{px} \cdot \vec{i} + \sigma_{py} \cdot \vec{j} + \sigma_{pz} \cdot \vec{k}, \quad (p = x, y, z). \quad (2.46)$$

Деформований стан в точці M визначається тензором деформації:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

При цьому також $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Напруження і деформації зв'язані між собою наступними співвідношеннями лінійної термопружності (закон Дюамеля-Неймана [15, 45, 61, 130]):

$$\sigma_{ij} = \lambda_T e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda_T + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij} \quad (2.48)$$

де λ_T, μ - постійні Ламе для ізотермічної деформації, які пов'язані з технічними пружними (модулем зрушення G , коефіцієнтом Пуассона $\bar{\nu}$, модулем пружності E (модулем Юнга) співвідношеннями [18, 116]:

$$\lambda_T = \frac{2G\bar{\nu}}{(1-2\bar{\nu})}; \mu = G; 2\mu = \frac{E}{(1+\bar{\nu})}; \alpha_T = \frac{\bar{\alpha}}{3}, \delta_{ij} - \text{символ Кронекера.}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.49)$$

$e = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ - об'ємне розширення, при цьому $\delta_{ij} = \frac{de}{d\varepsilon_{ij}}$.

Переміщення (l_x, l_y, l_z) , які виникають в тілі унаслідок деформації пов'язані з компонентами тензора деформації геометричними співвідношеннями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_i}{\partial j} + \frac{l_j}{\partial i} \right). \quad (2.50)$$

Перераховані величини $l_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ є функціями координат (x, y, z) і часу t .

У класичній теорії теплопровідності вважається, що єдиною причиною виникнення в тілі теплового потоку є наявність $grad T = 0$. Проте при тепловій деформації тіла у разі великої швидкості теплового потоку виникає так званий ефект зв'язності, що полягає у взаємодії полів деформації і температури. Виведемо диференціальне рівняння теплопровідності для даного випадку, застосовуючи для цього необхідні закони механіки суцільних середовищ і термодинаміки необоротних процесів [2, 75].

Розглянемо пружне тіло, усередині якого виділимо V , обмежений замкнутою поверхнею S . Унаслідок явища термопружної деформації на кожен елемент ds цієї поверхні діє сила з боку частинок тіла, які лежать поза об'ємом V . Ця сила пропорційна величині ділянки ds і залежить від напрямку вектора одиничної нормалі до даного елемента; позначимо її через $\vec{P}_n ds$ де вектор \vec{P}_n називається напруженням на ділянці ds з нормаллю \vec{n} (сила, яка віднесена до одиниці площі). Відзначимо, що напруження \vec{P}_n не буде

перпендикулярне ділянці ds . Нехай $\cos(\vec{n},x)$, $\cos(\vec{n},y)$, $\cos(\vec{n},z)$ - компоненти вектора зовнішньої нормалі \vec{n} до поверхні S . Згідно теорії пружності, вектор напружень \vec{P}_n може бути виражений через компоненти тензора напружень σ таким чином [15, 45]:

$$\vec{P}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\vec{n},x) + \vec{\sigma}_y \cos(\vec{n},y) + \vec{\sigma}_z \cos(\vec{n},z) = \sigma \vec{n}, \quad (2.51)$$

де вектори $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ визначаються виразами (1.120).

Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса для сумарної сили, що діє на виділений об'єм по поверхні S , отримаємо:

$$\iint_s \vec{P}_n ds = \iint_s \sigma \vec{n} ds = \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \operatorname{div} \sigma dV. \quad (2.52)$$

Нехай на кожен елемент маси об'єму V діє об'ємне навантаження $\vec{f}(M,t)$ (сила, яка віднесена до одиниці маси), що включає інерційні сили; нехай також $\vec{v}(M,t)$ – вектор швидкості частинки тіла в точці M ; ρ – щільність речовини ($\rho = \text{const}$). Відповідно до законів механіки можна записати:

$$\iint_s \vec{P}_n ds + \iiint_V \rho \vec{f} dV = \iiint_V \rho \vec{v} dV. \quad (2.53)$$

Оскільки розглядаються малі деформації (малі переміщення або швидкості) в рамках лінійної термопружності, то в правій частині рівності (2.53) можна нехтувати зміною границь інтегрування з часом і виконати диференціювання під знаком інтеграла. Крім того, враховуючи вираз (2.37), отримаємо:

$$\iiint_V \left[\operatorname{div} \sigma + \rho \vec{f} - \rho \vec{v} \right] dV = 0. \quad (2.54)$$

Оскільки рівняння (2.54) застосовне до будь-якого довільного об'єму V , то підінтегральний вираз має дорівнювати нулю в кожній точці цього тіла:

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \vec{f} - \rho \vec{v} = 0. \quad (2.55)$$

Вираз (2.55) є основним рівнянням механіки суцільних середовищ [2, 75].

Для зручності будемо відносити такі термодинамічні величини, як внутрішня енергія U , ентропія S_T , а також потужність тепловиділення F_T , до одиниці об'єму тіла (а не до одиниці маси). Нехай $U(M, t)$ – внутрішня енергія елемента тіла, розташованого в точці M у момент часу t ; тоді внутрішня енергія виділеного об'єму V у момент часу t дорівнює $\iiint_V U(M, t) dV$. Результуюче поверхневе навантаження (поверхневе напруження) діє на об'єм V , здійснює в одиницю часу роботу $\iint_S \vec{P}_n \vec{v} ds$. Так само об'ємна сила \vec{f} здійснює в одиницю часу роботу, яка дорівнює $\iiint_V \vec{f} \vec{v} dV$.

Нехай $F_T(M, t)$ – потужність теплового джерела, що діє у виділеному об'ємі; \vec{q} – вектор щільності теплового потоку. Сумарна кількість теплоти, отримана об'ємом V за одиницю часу :

$$-\iint_S q_n ds + \iiint_V F_T dV = \iiint_V \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV + \iiint_V F_T dV, \quad (2.56)$$

де q_n – проекція вектора \vec{q} на напрям зовнішньої нормалі \vec{n} до S . Із закону збереження енергії: робота, здійснена в одиницю часу поверхневими і об'ємними силами, які діють на виділену частину тіла, плюс енергія, отримана цією частиною тіла за одиницю часу шляхом теплопередачі і дії джерел, дорівнюють швидкості зростання суми кінетичної та внутрішньої енергії:

$$\iint_S \vec{P}_n \vec{v} ds + \iiint_V \vec{f} \vec{v} dV - \iint_S q_n ds + \iiint_V F_T dV = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint_V \rho \vec{v}^2 dV + \iiint_V U dV \right). \quad (2.57)$$

Розглянемо докладніше перший доданок в лівій частині (1.131):

$$\iint_S \vec{P}_n \vec{v} ds = \iint_S \sigma \vec{v} \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div}(\sigma \vec{v}) dV.$$

Можна показати, використавши правило множення тензора σ на вектор \vec{v} , що

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{div} \sigma + \left(\sigma_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right).$$

Здійснюючи перехід в (1.131) до об'ємного інтеграла за формулою Остроградського–Гаусса і використовуючи (1.129), отримаємо для довільної

точки $M(x, y, z)$:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + F_T + \left(\bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \dot{U}, \quad (2.58)$$

де знак « $\dot{}$ » над параметром U в цій формулі та інших формулах, що приводяться нижче, означає диференціювання параметра за часом t .

Далі, перетворимо третій доданок в лівій частині (2.58) використовуючи симетричність тензора напруження σ , геометричні співвідношення (2.50) і той факт, що $v_i = \dot{l}_i$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \sigma_{xz} \dot{\epsilon}_{xz} + \sigma_{yx} \dot{\epsilon}_{yx} + \\ &+ \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz} + \sigma_{zx} \dot{\epsilon}_{zx} + \sigma_{zy} \dot{\epsilon}_{zy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Позначимо розписану суму скорочено добутком $\sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) з індексами i та j , що повторюються. Повторення індексів означає, як це прийнято в тензорному обчисленні, підсумовування за цими індексами. Таким чином, остаточно матимемо наступне рівняння, що зв'яже між собою швидкість зміни внутрішньої енергії, кількість отриманої теплоти і швидкість роботи деформації, яка здійснена силами внутрішнього напруження:

$$\dot{U} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + F_T + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.60)$$

Розглянемо внутрішню енергію виділеного об'єму. Запишемо в диференціальній формі перший закон термодинаміки, вважаючи, що нескінченне мале переміщення одиниці об'єму тіла складається тільки з деформації:

$$dU = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + T_T dS_T. \quad (2.61)$$

Це співвідношення говорить про те, що мала зміна внутрішньої енергії дорівнює елементарній роботі деформації та кількості отриманої теплоти. Тут dS_T – диференціал ентропії S_T , причому внутрішня енергія і ентропія: $U = U(\epsilon_{ij}, S_T)$; $S_T = S_T(\epsilon_{ij}, T)$. Знаходимо:

$$dS_T = \left(\frac{\partial S_T}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v dT \quad (2.62)$$

і підставляємо (2.62) та (2.61). Це дає

$$dU = \left[T \left(\frac{\partial S_T}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v dT. \quad (2.63)$$

Оскільки dU є повним диференціалом, то має виконуватися рівність:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial S_T}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left[T \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v \right].$$

Звідси витікає, що

$$\left(\frac{\partial S_T}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_v = 0. \quad (2.64)$$

У законі Дюамеля–Неймана (2.48) незалежними змінними є ε_{ij} і T , оскільки $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, T)$, звідси $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\varepsilon = (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T \delta_{ij}$. Підставляючи в (2.64), знаходимо:

$$\left(\frac{\partial S_T}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_\delta \delta_{ij} = (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_\delta \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (2.65)$$

З урахуванням цього співвідношення вираз (2.63) запишеться таким чином:

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_\delta T de + T \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v dT. \quad (2.66)$$

С іншого боку, порівнюючи співвідношення:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v dT. \quad (2.67)$$

з (2.46), отримаємо $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = T \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v$. Але $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = C_V$, де C_V – об'ємна теплоємність при постійному об'ємі (постійній деформації). Таким чином,

$T \left(\frac{\partial S_T}{\partial T} \right)_v = C_V$ можна записати у вигляді:

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T T de + C_V dT. \quad (2.68)$$

Підставивши в (2.68) закон Дюамеля–Неймана (2.48), отримаємо:

$$dU = 2\mu\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} + \lambda_T e de + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T T de + C_v dT. \quad (2.69)$$

Інтегруючи отриманий вираз і припускаючи, що $U = 0$ в початковий момент часу, знайдемо:

$$U = \mu\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda_0 e^2}{2} + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T T e + C_v (T - T_0). \quad (2.70)$$

Підставляючи в ліву частину виразу (2.60) вираз (2.70) і враховуючи при цьому (2.48), а також рівність $\varepsilon_{ij} e \delta_{ij} = e \dot{e}$, знайдемо (при $\lambda = \text{const}$):

$$C_v \dot{T} + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T T \dot{e} + \left(1 + \frac{(T - T_0)}{T_0}\right) = \lambda \Delta T + F_T. \quad (2.71)$$

Згідно припущення про малість деформацій розглядається випадок, коли $\frac{(T - T_0)}{T_0} \ll 1$, що приводить до лінеаризації другого доданку в лівій частині рівності (2.71), остаточно отримаємо уточнене або зв'язане рівняння теплопровідності у вигляді:

$$C_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + (3\lambda_T + 2\mu)\alpha_T T \dot{e}(M, t) = \lambda \Delta T(M, t) + F_T(M, t). \quad (2.72)$$

Зокрема, для прямокутної системи координат ($M = M(x, y, z)$), $T(M, t) = T(x, y, z, t)$, $\dot{e}(M, t) = \dot{e}(x, y, z, t)$, $\Delta T(M, t) = \Delta T(x, y, z, t)$, $F_T(M, t) = F_T(x, y, z, t)$, рівняння (2.72) має вигляд:

$$C_v \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + (3\lambda_T + 2\mu) \cdot \alpha_T \cdot T \cdot \dot{e} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + F_T. \quad (2.73)$$

На відміну від класичного рівняння теплопровідності (2.27) рівняння (2.72) містить доданок, що зв'язує приріст температури із швидкістю зміни об'єму тіла, що деформується. Використання рівняння (2.72) показує на необхідність одночасного визначення полів, температури і деформації, що пов'язане з певними математичними труднощами при розгляді конкретних випадків.

Перейдемо тепер до аналізу зв'язної частини в рівнянні (2.72).

Перепишемо рівняння (2.72) в наступному вигляді (при $F_T = 0$):

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} \left[1 + \delta_0 \left(\frac{\lambda_T + 2\mu}{3\lambda_T + 2\mu} \right) \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha_T \dot{T}} \right) \right] = \lambda \Delta T. \quad (2.74)$$

Тут $\delta_0 = (3\lambda_T + 2\mu) \frac{\alpha_T^2 T_0}{\rho c_v v_e^2}$ – безрозмірний параметр; $v_e = \sqrt{\frac{(\lambda_T + 2\mu)}{\rho}}$ –

швидкість розповсюдження хвиль розширення в пружному середовищі.

У рівнянні (2.74) член, пропорційний δ_0 , відображає вплив зв'язаності, і ним можна нехтувати в порівнянні з одиницею, якщо

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha_T \dot{T}} \ll \frac{\lambda_T + \frac{2\mu}{3}}{\lambda_T + 2\mu} \frac{1}{\delta_0}. \quad (2.75)$$

Щоб провести числові порівняння, потрібно оцінити значення параметра δ_0 . Наприклад, для скла марки С-90-1 [97, 107, 109, 117]: $\lambda_T = 2,48 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\rho = 2550$ кг/м³; $\mu = 2,9 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_v = 8,33 \cdot 10^2$ Дж/(кг·град); $\alpha_T = 2,7 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹. Якщо узяти для прикладу $T_0 = 200$ °С, то отримаємо $\delta_0 = 0,0016$, а з (1.128) витікає, що в цьому випадку зв'язаність буде малою, якщо приблизно

$\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha_T \dot{T}} \ll 4 \cdot 10^2$. Для сталі [109, 119, 120]: $\rho = 7,7$ кг/м³; $\lambda = 1,26 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\mu = 8,4 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $c_v = 4,6 \cdot 10^2$ Дж/(кг·град); $\alpha_T = 3,5 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹ і якщо узяти для прикладу $T_0 = 900$ °С, то отримаємо $\delta_0 = 0,014$, а з (2.75) знайдемо, що $\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha_T \dot{T}} \ll 20$.

З наведених прикладів видно, що можливість нехтувати членом зв'язаності залежить не тільки від виконання вимоги $\delta_0 \ll 1$, але й від умови, щоб швидкості зміни деформації і температури мали значення одного і того ж порядку. Ця умова припускає, що зміна переміщень в часі відбувається безпосередньо услід за зміною температури. Це має місце, якщо поле температур з часом не випробовує різких змін або раптових стрибків. Розрахунки показують, що в кристалічних тілах ефект зв'язаності полів деформації і температури зазвичай малий. Проте для деяких матеріалів

(наприклад, для пластмас, керамік тощо), що мають великі значення параметра зв'язності, розрахунок температурного поля припускає розв'язок зв'язаної лінійної динамічної задачі термопружності. Для цього необхідно розглянути (коротко) виведення повної системи рівнянь. Приєднаємо до рівнянь (2.48), (2.50) та (2.72) (при $F_T = 0$) рівняння руху без об'ємних сил:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{l}_i \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.76)$$

Тут кома на рівні індексів означає диференціювання по координаті, яка відокремлена комою, тобто:

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}. \quad (2.77)$$

Аналогічно $T_{,i}$ та $l_{i,kk}$ означають: $T_i = \frac{\partial T}{\partial i}$ ($i = x, y, z$);

$$l_{i,\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^2 l_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 l_i}{\partial z^2} = \Delta l_i \quad (i, k = x, y, z). \quad (2.78)$$

Виразимо в рівняннях (2.78) напруження σ_{ij} через деформації ε_{ij} за формулою (2.48), враховуючи, що члени, що містять e та T зберігаються тільки при $i = j$:

$$2\mu \varepsilon_{ij,j} + \lambda_T e_i - (3\lambda_T + 2\mu) \alpha_\delta T_i = \rho \ddot{l}_i. \quad (2.79)$$

У цьому рівнянні заміняємо деформації ε_{ij} переміщеннями за формулою (2.50), вносячи замість j індекс k , що повторюється і враховуючи, що $l_{k,ik} = l_{k,ki}$. Отримаємо:

$$\mu \Delta l_i + (\lambda_T + \mu) l_{\varepsilon,\varepsilon i} - (3\lambda_T + 2\mu) \alpha_T T_i = \rho \cdot \ddot{l}_i. \quad (2.80)$$

Три рівняння (2.76) сумісні з четвертим рівнянням (2.80) за певних початкових і граничних умов описують зміну в просторі і в часі зв'язаних між собою полів деформації і температури. Запишемо рівняння у векторній формі:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu \Delta \vec{l} + (\lambda_T + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{l}) - (3\lambda_T + 2\mu) \alpha_\delta \text{grad} T &= \rho \ddot{\vec{l}}; \end{aligned} \right. \quad (2.81)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial T / \partial t + (3\lambda_T + 2\mu) (\alpha_T / C_v) T_0 \text{div} \dot{\vec{l}} &= \Delta T, \end{aligned} \right. \quad (2.82)$$

де $e = \text{div} \dot{\vec{l}}$; $\alpha^2 = \lambda_T / C_V$. З рівняння (2.81) може бути принципово визначена деформація (переміщення) тіла при довільно заданій температурі тіла. Підстановка в рівняння (2.82) отриманого таким чином виразу для $\text{div} \dot{\vec{l}}$ приведе до рівняння, що визначає розподіл температури, в якому невідомою функцією є тільки $T(x, y, z, t)$. У разі, коли швидкість зміни температури в часі мала, в рівнянні (2.82) можна нехтувати інерційним членом $\rho \ddot{\vec{l}}$; задача термопружності, яка описується рівнянням (2.81) без інерційного члену ($\rho \ddot{\vec{l}} = 0$) та рівнянням (2.82), називається зв'язаною квазістатичною задачею термопружності.

2.6 Диференціальне рівняння теплопровідності для анізотропних твердих тіл

Анізотропія – явище, яке полягає в тому, що фізичні властивості тіла різні в різних напрямках (наприклад, теплоємність, коефіцієнт теплопровідності, температуропровідність тощо) [11, 80, 111, 118, 122]. Анізотропія вказаних теплофізичних властивостей найбільш різко проявляється в кристалічних та волокнистих структурах (наприклад, в пластинах з ніобату літію та скловолокнах тощо). При цьому, в таких тілах вектор щільності теплового потоку \vec{q} в довільній точці М вже не направлений по нормалі до будь-якої ізотермічної поверхні, що проходить через дану точку.

Тому, замість співвідношення $\vec{q} = -\lambda \text{grad} T$ що є основним законом теплопровідності Фур'є (див. формулу (1.12)), для вказаних тіл має місце більш загальна залежність, що полягає в тому, що кожен компонент вектора \vec{q} є лінійною функцією компонентів градієнта температури [11]:

$$\left. \begin{aligned} -q_x &= \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_y &= \lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_z &= \lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.83)$$

В (2.83) величини λ_{ik} ($i, k = x, y, z$) є компонентами тензора другого рангу – тензора теплопровідності λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

де λ - симетричний тензор $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$.

Рівняння теплопровідності (2.25) залишається справедливим для випадку, коли λ є тензором (2.84). Звідси, використовуючи операцію множення тензора на вектор, можна записати рівняння (2.25) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div} \left[\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T \right] + F(M, t) = \\ &= \operatorname{div} \left[\begin{aligned} &\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) i + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) j - \\ &\left[\left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) k \right] \end{aligned} \right] + \\ &+ F(M, t). \end{aligned} \quad (2.85)$$

У разі однорідного (анізотропного) середовища $\lambda_{ik} = \text{const}$ і рівняння (2.85) набуде вигляд:

$$\begin{aligned} C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\lambda_{xy} + \lambda_{yx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ &+ (\lambda_{xz} + \lambda_{zx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (\lambda_{yz} + \lambda_{zy}) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y} + F(M, t). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Якщо скористатися симетричністю тензора λ , то рівняння (2.86) (при

$F = 0$) можна записати:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2\lambda_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 2\lambda_{xz} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + 2\lambda_{yz} \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y}. \quad (2.87)$$

Рівняння (2.87) можна перетворити до нової системи прямокутних координат (x', y', z') так, щоб звільнитися від змішаних похідних і перейти до вигляду:

$$C_v \frac{\partial W}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2}, \quad (2.88)$$

де $W(x', y', z', t) \equiv T(x, y, z, t)$.

Нові осі координат (x', y', z') називаються головними осями теплопровідності, а коефіцієнти $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – головними коефіцієнтами теплопровідності. На практиці вказане перетворення можна провести різними способами, зокрема шляхом попереднього приведення матриці (2.84) до діагонального вигляду за допомогою відповідного повороту системи координатних осей (x, y, z) :

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \end{cases} \quad (2.89)$$

де $l_i = \cos \alpha_i$, $m_i = \cos \beta_i$, $n_i = \cos \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), а $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$; $\cos \alpha_i$, $\cos \beta_i$, $\cos \gamma_i$ – направляючі косинуси нових координатних осей (нових змінних) (x', y', z') в старій системі координат (x, y, z) .

У нових координатах матриця (1.158) має вигляд:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Звідси неважко записати перетворене рівняння теплопровідності, яке у випадку $\lambda_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) має вигляд, який співпадає з (2.88):

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \operatorname{grad} W(x', y', z', t) \right] = \quad (2.91)$$

$$= \operatorname{div} \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial x'} i + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial y'} j + \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial z'} k \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2}.$$

Для відшукування коефіцієнтів перетворення (2.89) необхідно знайти послідовно три нормованих розв'язка (l_i, m_i, n_i) системи:

$$\begin{cases} (\lambda_{xx} - \lambda_i)l_i + \lambda_{xy}m_i + \lambda_{xz}n_i = 0 \\ \lambda_{yx}l_i + (\lambda_{yy} - \lambda_i)m_i + \lambda_{yz}n_i = 0, \dots, i = (1, 2, 3), \\ \lambda_{zx}l_i + \lambda_{zy}m_i + (\lambda_{zz} - \lambda_i)n_i = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{xx} - \lambda_i & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} - \lambda_i & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} - \lambda_i \end{vmatrix}. \quad (2.93)$$

Відмітимо, що рівняння (2.93) має тільки речові корені (це твердження доводиться в теорії квадратичних форм). Позначимо відмінні від нуля розв'язки системи (1.90) через $(l^{(i)}, m^{(i)}, n^{(i)})$, причому ці невідомі визначаються з точністю до довільного множника пропорційності d .

Прийmemo $d = \frac{1}{\sqrt{l^{(i)2} + m^{(i)2} + n^{(i)2}}}$, тоді $l_i = dl^{(i)}$, $m_i = dm^{(i)}$, $n_i = dn^{(i)}$.

Як приклад розглянемо довільне анізотропне тіло, для якого коефіцієнтом теплопровідності λ є тензор другого рангу, що має наступний вигляд:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

Отримаємо для даного тіла рівняння теплопровідності типу (2.88), для якого можна використовувати існуючі стандартні методи розв'язку [11, 79-81, 111, 122].

З урахуванням (2.94) отримаємо наступне змінене (в порівнянні з

рівнянням для ізотропного тіла (див. формулу (2.25) рівняння теплопровідності типу (2.86):

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}. \quad (2.95)$$

Приведемо це рівняння до вигляду (2.88). Перш за все складемо характеристичне рівняння (2.93):

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2.96)$$

звідки $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 8$. Згідно (2.88), рівняння (2.95) перейде в наступне:

$$C_v \frac{\partial W}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + 8 \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2}, \quad (2.97)$$

де (x', y', z') – нові змінні, які зв'язані із старими змінними (x, y, z) формулами перетворення (2.89).

Для обчислення коефіцієнтів (l_i, m_i, n_i) в цих формулах складаємо систему (2.92):

$$\begin{cases} (4 - \lambda_i)l_i + 2m_i = 0 \\ 2l_i + (5 - \lambda_i)m_i + 2n_i = 0, \\ 2m_i + (6 - \lambda_i)n_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.98)$$

Вважаючи, що $\lambda_1 = 5$, переходимо до системи:

$$\left. \begin{aligned} -l_1 + 2m_1 &= 0 \\ 2l_1 + 2n_1 &= 0 \\ 2m_1 + n_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.99)$$

Ненульовим розв'язком цієї системи є, $l^{(1)} = -2$, $m^{(1)} = -1$, $n^{(1)} = 2$; оскільки при цьому $d = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}$, тоді шуканий перший головний напрям буде:

$$l_1 = -2/3, m_1 = -1/3, n_1 = 2/3.$$

Аналогічним чином, вважаючи в (2.98), що $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 8$, знаходимо наступні два нормовані розв'язки – одиничні вектори другого і третього головного напрямів: $(2/3 -2/3, 1/3)$; $(1/3, 2/3, 2/3)$.

Таким чином, шукані формули перетворення і перетворена матриця (2.94) мають, відповідно, вигляд:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \\ y = -\frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' \end{cases}, \quad \lambda' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Після знаходження температурної функції $W(x', y', z', t)$, що задовольняє рівнянню (2.97), можна повернутися до шуканої функції $T(x, y, z, t)$, використовуючи формули перетворення (2.100) (розв'язані відносно (x', y', z')). Рівняння (2.88) можна спростити подальшою заміною змінних, вважаючи:

$$\begin{aligned} \xi &= x' \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}}; & \eta &= y' \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}}; \\ \zeta &= z' \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_3}}; & U(\xi, \eta, \zeta, t) &\equiv W(x', y', z', t); \end{aligned} \quad (2.101)$$

де λ вибирається довільним.

Оскільки за правилом диференціювання складної функції маємо, що $\frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx'} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{\partial U}{\partial \xi}$; $\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ і так далі, тоді рівняння (2.88) перейде

в наступне:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right), \quad (2.102)$$

тобто набере того ж вигляду, що й рівняння теплопровідності для ізотропного твердого тіла.

Слід зазначити, що хоча перетвореннями рівнянь (2.89) і (2.101) усуваються математичні труднощі, які пов'язані з анізотропією тіла, проте в новій системі координат (ξ, η, ζ) відбувається викривлення границь даного тіла, а саме: в рівняння нових граничних поверхонь починають входити просторові змінні. Це приводить, до ускладнення граничних умов задачі,

оскільки тепер вони виявляються заданими на змінних граничних поверхнях.

Розглянемо важливий для практичного використання випадок, коли анізотропне тіло є ще й ортотропним [11], тобто коли коефіцієнт теплопровідності в будь-якій точці тіла різний в трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$q_x = -\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad q_y = -\lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right); \quad q_z = -\lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.103)$$

Якщо тіло до того ж однорідне ($\lambda_i = \text{const}$, $i = x, y, z$), то рівняння (2.86) має вигляд (при $F = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_x^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.104)$$

де $a_i^2 = \frac{\lambda_i}{C_V}$, $i = x, y, z$.

Рівняння (2.104) може набути вигляд (2.102), наприклад, за допомогою наступних перетворень:

$$\xi = \left(\frac{a}{a_x} \right) x; \quad \eta = \left(\frac{a}{a_y} \right) y; \quad \zeta = \left(\frac{a}{a_z} \right) z \quad (2.105)$$

де a можна вибрати довільним.

Наприклад, в циліндровій системі координат рівняння теплопровідності для ортотропного однорідного тіла має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_r^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{a_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + a_z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.106)$$

де $a_r^2 = \frac{\lambda_r}{C_V}$; $a_\varphi^2 = \frac{\lambda_\varphi}{C_V}$; $a_z^2 = \frac{\lambda_z}{C_V}$.

Заміною змінних $r' = r \left(\frac{a}{a_r} \right)$; $\varphi' = \varphi \left(\frac{a}{a_\varphi} \right)$; $z' = z \left(\frac{a}{a_z} \right)$ рівняння (2.106)

приводиться до вигляду:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial W}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} \right). \quad (2.107)$$

Якнайповніший виклад фізичної теорії теплопровідності анізотропних твердих тіл можна знайти в роботі. Слід зазначити, що внаслідок труднощів вимірювання коефіцієнтів теплопровідності анізотропних тіл практика має в своєму розпорядженні досить малу кількість експериментальних даних, тому, натепер, в аналітичній теорії теплопровідності розв'язана обмежена кількість спеціальних задач.

2.7 Постановка крайових задач теорії теплопровідності

Умови однозначності. Диференціальне рівняння (2.27) теплопровідності виведене на основі загальних законів фізики і описує цілий клас явищ.

У загальному випадку диференціальне рівняння теплопровідності має безліч розв'язків. Щоб з цієї множини виділити розв'язок, який відповідає конкретному процесу, необхідно до диференціального рівняння приєднати умови, які дають математичний опис усіх специфічних особливостей процесу. Ці умови в сукупності з диференціальним рівнянням дають повний математичний опис конкретної задачі теплопровідності і називаються умовами однозначності.

Умови однозначності підрозділяються на геометричні, фізичні та краєві.

Геометричні умови задають форму і розміри тіла, в якому протікає процес.

Фізичні умови задають теплофізичні параметри середовища: ρ - щільність, λ - теплопровідність, C_V - об'ємну теплоємність, q_V - об'ємну щільність теплового потоку.

Крайовими умовами називають сукупність початкових і граничних умов. Початкові умови (тимчасові краєві умови) полягають в завданні розподілу температури в тілі в початковий момент часу і необхідні лише при розгляді нестационарних задач. Початкова умова вважається заданою, якщо для деякого моменту часу t_0 (зазвичай вибирають $t_0 = 0$) температура тіла є відомою функцією просторових координат.

У загальному випадку початкова умова має вигляд.

$$T = f(x, y, z) \text{ при } t = t_0 \text{ або } T|_{t=t_0} = f(x, y, z). \quad (2.108)$$

Зустрічаються процеси, в яких можна нехтувати початковими умовами. Наприклад, при нагріві (охолодженні) тіл кінцевої форми із зовнішніми умовами, що не змінюються, починаючи з деякого моменту t^* (наступає такий момент теплопровідності, при якому розподіл температур в тілі повністю визначається граничними умовами, а початкові умови впливають на температуру тіла лише на проміжку $(0 < t < t^*)$). Граничні умови можуть бути задані декількома способами. Основні з них в теорії теплопровідності називаються граничними умовами I - IV роду.

2.7.1 Граничні умови I - IV родів

Граничні умови I роду задаються розподілом температури по поверхні S тіла у будь-який момент часу:

$$T(x, y, z, t)|_s = \varphi(x, y, z, t) = T_s, x, y, z \in S. \quad (2.109)$$

Граничні умови I роду реалізуються в задачах теплопровідності якщо на поверхні тіла підтримується заданий режим зміни температури, або при інтенсивному теплообміні з навколишнім середовищем, коли температура поверхні тіла близька до температури середовища. Коло практичних завдань, в яких можна використовувати умови I роду, вкрай обмежений, вони є математичною ідеалізацією реальних фізичних умов і тому застосовуються, в основному, при оціночних теплових розрахунках, наприклад, для оцінки градієнтів температури, швидкостей нагріву (охолодження) тіл тощо.

Граничні умови II роду задаються щільністю теплового потоку на поверхні тіла як функції координат точок поверхні та часу, тобто:

$$q(x, y, z, t)|_s = q_s = \psi(x, y, z, t), x, y, z \in S. \quad (2.110)$$

Відповідно до закону Фур'є умову (3) можна переписати у вигляді

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} |_s = \psi(x, y, z, t), x, y, z \in S, \quad (2.111)$$

де n - нормаль до поверхні S .

Якщо функція ψ тотожно дорівнює нулю, співвідношення (2.111) називають умовою адіабатичності поверхні S : $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = 0$.

На практиці умови теплообміну другого роду мають місце, наприклад, при нагріванні тіл рухомими джерелами тепла (сфокусовані потоки заряджених частинок (електронів, йонів), лазерний промінь, потоки низькотемпературної плазми, електромагнітний імпульс та інші).

Граничні умови III роду задаються щільністю теплового потоку на поверхні тіла як функцією температур поверхні тіла і навколишнього середовища.

У разі конвекційного охолодження (нагрівання) поверхні тіла потоком рідини або газу, щільність теплового потоку визначається відповідно до закону Ньютона:

$$q_s = \pm \alpha (T_s - T_c), \quad (2.112)$$

де α - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом тепловіддачі і вимірюється, як Вт/(м²·К).

Коефіцієнт тепловіддачі чисельно дорівнює кількості теплоти, що віддається (отримується) одиницею площі поверхні тіла в одиницю часу при різниці температур між поверхнею і середовищем в один градус і характеризує інтенсивність теплової взаємодії середовища з поверхнею тіла.

Умови III роду використовуються в численних задачах дослідження теплообміну в твердих тілах, які обтікають рідиною або газом. Використовуючи закон Фур'є, останню рівність можна переписати в наступному вигляді:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = \alpha (T_s - T_c). \quad (2.113)$$

Співвідношення (2.113) є аналітичним виразом граничних умов III роду, який вживається найчастіше. Коефіцієнт тепловіддачі α в цій умові не є фізичною постійною, яка є характерною для тієї або іншої речовини. У загальному випадку він відображає сумісну дію теплопровідності, конвекції

та радіації, причому кожний з доданків α , який відповідає кожному з перерахованих способів теплообміну і залежить від багатьох чинників. Наприклад, конвекційна частина α_k залежить від геометрії і розмірів тіла, режиму обтікання, фізичних властивостей середовища, розподілу швидкостей в оточуючому тіло потоці, температури середовища.

У багатьох порівняно простих випадках коефіцієнт теплопровідності в першому наближенні можна вважати постійним. Проте для більшості складніших задач таке припущення вже не є вірним. Тому, при використанні граничних умов (2.113) для розв'язання задач про теплообмін між тілом і навколишнім середовищем виникає питання: *як визначити коефіцієнт α стосовно конкретних умов даного процесу?* Відповісти на це питання часто буває набагато важчим, ніж вирішити початкову задачу про визначення температурного поля при відомому α . Уся складність дослідження теплообміну в цьому випадку зосереджується на методі визначення коефіцієнта теплопередачі.

При розгляді деяких нестационарних задач конвекційного теплообміну використання закону Ньютона при постановці граничних умов взагалі неприйнятне. В цьому випадку доводиться розглядати температурні поля тіла і рідини разом, тобто, формулювати задачу як зв'язану. Такий підхід приводить до постановки на границі між тілом і рідиною умов сполучення, які називаються граничними умовами IV роду.

Граничні умови IV роду (сполучення) задаються на границі між тілом і навколишнім середовищем (при конвекційному теплообміні) або на границі дотичних твердих тіл і відображають рівність температур і щільності теплових потоків на межі розділу. У загальному випадку граничні умови IV роду можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_s = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_s + q(x, y, z, t) \\ T_1(x, y, z, t) = T_2(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S \end{cases}, \quad (2.114)$$

де $q = q(x, y, z, t)$ – поверхнева щільність джерел теплоти на границі S ; T_1 , T_2 , λ_1 ,

λ_2 – відповідно, температури та теплопровідності середовищ, які є дотичними.

Граничні умови IV роду широко застосовуються при розв'язанні задач в металургії, авіаційній та космічній техніці, розрахунках різних багатошарових конструкцій. Відзначимо, що в реальних умовах теплообмін між контактуючими тілами може здійснюватися не тільки теплопровідністю, але й конвекцією, тепловим випромінюванням, що вимагає використання складніших умов сполучення, що враховують ці явища.

Інші види граничних умов. Розглянемо граничні умови, які використовуються при розв'язанні задач з фазовими переходами. Такі задачі виникають при вивченні процесів кристалізації, плавлення, горіння тощо.

Нехай S – рухома межа розділу фаз, L – питома теплота фазових перетворень, яка виділяється на границі S . Індексами 1 і 2 позначимо параметри, що відносяться до рідкої і твердої фази. Тоді граничні умови на рухомій границі запишуться таким чином:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_s - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_s = L \rho \frac{\partial S}{\partial t}, \\ T_1 \Big|_s = T_2 \Big|_s = T_\phi \end{cases} \quad (2.115)$$

де $T_\phi = T_\phi(x, y, z, t)$ – температура фазових перетворень.

У разі, коли швидкість руху границі $S = S(x, y, z, t)$ невідома, така задача теплопровідності стає суттєво нелінійною і для її розв'язку необхідно використовувати спеціальні методи, головним чином чисельні.

Задачі теплопровідності з нелінійними граничними умовами типу (2.110) або (2.113), коли α є функцією температури, зазвичай називають задачами з зовнішньою нелінійністю.

2.7.2 Класифікація крайових задач та методів їх розв'язку

Сукупність диференціального рівняння теплопровідності та умов однозначності (початкові та граничні умови, фізичні характеристики

матеріалу, геометричні розміри тіла), що описують процес, називають математичною моделлю процесу.

Задача про визначення невідомої функції із системи рівнянь, які описують процес теплообміну, називається крайовою задачею теорії теплопровідності.

Залежно від того, які величини, що входять в математичну модель, невідомі, можна виділити два види задач:

- пряма задача - визначення температурного поля, якщо відоме диференціальне рівняння процесу і задані додаткові умови, які повністю визначають крайову задачу.
- зворотна задача - визначення граничних умов або коефіцієнтів, які входять в основне диференціальне рівняння, якщо відомий математичний опис процесу і температурне поле.

Надалі обмежимося розглядом лише прямих задач. Краєві задачі можна також розділити на лінійні та нелінійні. До перших відносяться задачі, математичний опис яких складається лише з лінійних рівнянь, тобто рівнянь, лінійних відносно невідомої функції (температури) та її похідних. Якщо хоча б одне рівняння математичної моделі нелінійне, то і крайова задача стає нелінійною. Нелінійність може бути зосереджена в різних членах рівняння і крайових умов. Залежно від цього нелінійні краєві задачі класифіковані таким чином:

- крайова задача з нелінійністю I роду – від температури залежать теплопровідність $\lambda(T)$ або об'ємна теплоємність $C_V(T)$;
- крайова задача з нелінійністю II роду – від температури нелінійно залежить щільність теплового потоку на поверхні тіла $q_s(T_s)$;
- крайова задача з нелінійністю III роду – від температури нелінійно залежить об'ємна щільність теплового потоку $q_V(T)$.

Така класифікація до певної міри умовна, оскільки, наприклад, задачі з фазовими переходами можна віднести до задач з нелінійністю як I, так II і III родів – залежно від способу врахування виділення теплоти фазових

перетворень.

Розв'язок нелінійних задач представляє набагато більші математичні труднощі, чим розв'язки лінійних і вимагає використання, як правило, громіздких методів. Методи, розроблені для розв'язання нелінійних задач, можуть застосовуватися і для розв'язку лінійних задач, але не навпаки.

Існуючі методи розв'язку крайових задач теплопровідності можна класифікувати різними способами та по різним ознакам. Виходячи з форми, в якій отримують результати розв'язку, методи розділяють на дві великі групи: аналітичні та чисельні. До першої групи відносяться методи, що дозволяють знайти розв'язок у вигляді формули, підставивши в яку задане значення аргументу, можна визначити відповідне значення шуканої функції. До другої – методи, що дозволяють набути чисельного значення шуканої функції для деяких заданих заздалегідь значень аргументу, тобто дискретний розв'язок.

Аналітичні методи можуть бути точними, якщо формулу розв'язку вдається розкрити і довести до числа без втрат, і наближеними, якщо такі втрати ϵ (наприклад, відкидаються якісь члени ряду, приблизно обчислюється інтеграл). Чисельні методи завжди наближені, оскільки основані на заміні початкових диференціальних рівнянь алгебраїчними.

Аналітичні методи є кращими за чисельні в тому сенсі, що дозволяють отримати більш наочні розв'язки, зручні для проведення аналізу впливу різних параметрів на результати.

Чисельні методи розв'язку хоча і менш наочні, проте можуть бути отримані для ширшого класу задач, які включають складні задачі, що аналітичними методами розв'язати неможливо.

Для розв'язання лінійних крайових задач теорії теплопровідності використовуються:

1. Класичні методи: розділення змінних (метод Фур'є), функції джерел (функції Гріна), теплових потенціалів.

2. Інтегральні перетворення в кінцевих межах (кінцеві косинус і синус-перетворення Фур'є, перетворення Лежандра тощо), в нескінченних межах

(Фур'є, Лапласа, Ханкеля, Мелліна, Бесселя, Канторовіча-Лебєдєва, Майєра тощо).

Для розв'язання нелінійних задач застосовуються:

1. Варіаційні методи (Рітца, Канторовіча, Лейбензона, Треффтца, Біо).
2. Методи лінеаризації (зведення нелінійної крайової задачі до лінійної), підстановок (алгебраїчні та інтегральні), послідовних наближень, збурень (метод малого параметра), ітерацій, прийоми лінеаризації.
3. Методи зважених вирахувань (проекційні методи), колокацій, Бубнова-Галеркіна, моментів, інтегральні.
4. Методи зведення крайових задач до рівнянь і задач інших типів (інтегральним рівнянням, рівнянням в часткових похідних, але відмінних від початкових, звичайним диференціальним рівнянням): підстановки (алгебраїчні та інтегральні), підстановки готових форм розв'язку, аналіз розмірностей (метод схожості).

З чисельних методів для розв'язку нелінійних крайових задач теорії теплопровідності застосовують наступні: метод кінцевих різниць (метод сіток); варіаційно-різницеви (локальних варіацій, кінцевих елементів); метод прямих; статистичні (імовірнісні).

Приведена класифікація є не повною і достатньо умовна, оскільки багато методів в окремому випадку можуть виявитися методами лінеаризації. Крім того, для розв'язання деяких задач застосовуються послідовно два і більше методів. Методи кінцевих відмінностей часто поєднують з ітераціями на кожному часовому пласті, а методи лінеаризації і зведення до рівнянь інших типів за своїм змістом є методами, за допомогою яких змінюється початкова математична модель і які припускають подальше використання будь-яких методів для розв'язання зміненої задачі. Те ж саме можна сказати про метод прямих, який оснований на заміні усіх похідних, окрім однієї (наприклад, часу), кінцевими різницями. В результаті виходить система диференціальних рівнянь, для розв'язання якої можна використовувати методи Рунге-Кутта, Адамса та інших.

Відзначимо, що найбільшого поширення для розв'язання нелінійних задач теплопровідності набули методи кінцевих різниць, що пояснюється їх універсальністю, алгоритмічністю, зручністю реалізації розв'язку на ПЕОМ.

Контрольні питання та завдання:

1. Дати визначення теплопровідності, конвекції та тепловому випромінюванню.
2. Пояснити: які оптичні середовища називаються ізотропними та анізотропними ?
3. Дати визначення температурного поля. Визначити, що є стаціонарним та нестаціонарним температурним полем.
4. Дати визначення температурному градієнту.
5. Визначити поняття теплового потоку та його щільності; сформулювати основний закон теплопровідності Фур'є.
6. Вивести диференціальне рівняння теплопровідності.
7. Дати визначення об'ємній щільності теплового потоку, об'ємної теплоємності, температуропроводності.
8. Пояснити постановку рівняння теплопровідності в циліндрових та сферичних координатах.
9. Вивести диференціальне рівняння теплопровідності з рухомим джерелом теплової дії
10. Написати диференціальне рівняння теплопровідності в деформованому твердому тілі та обґрунтувати його.
11. Вивести диференціальне рівняння теплопровідності для анізотропних твердих тіл
12. Дати визначення умовам однозначності розв'язків задач теплопровідності.

13. Дати визначення крайових та початкових умов рівняння теплопровідності.
14. Дати визначення граничним умовам I та II роду рівняння теплопровідності.
15. Дати визначення граничним умовам III та IV роду рівняння теплопровідності.

3.1 Основні поняття та визначення

Конвекційний теплообмін - передача теплоти при русі речовини (газу, рідини тощо). Конвекційне перенесення теплоти завжди супроводжується теплопровідністю, тому одна з проблем, з якими доводиться стикатися при вирішенні задач конвекційного теплообміну, це проблема оцінки впливу кожного з двох механізмів передачі теплоти. Визначення внеску теплопровідності і конвекції в загальний процес теплообміну в значній мірі полегшує побудову математичної моделі досліджуваного процесу.

Конвекційна тепловіддача - конвекційний теплообмін між поверхнею твердого тіла і речовиною.

Закон Ньютона-Ріхмана. Розрахунок процесу тепловіддачі базується на співвідношенні закону Ньютона-Ріхмана [11, 19, 79-81]:

$$dQ = \alpha(T_w - T_c)dS \quad (3.1)$$

згідно якому тепловий потік (dQ) від речовини до елементу поверхні тіла dS прямо пропорційний площі елементу dS і різниці температур між поверхнею тіла T_w і температурою речовини T_c . Різниця температур $\Delta T = T_w - T_c$ називають температурним натиском, а поверхня тіла, через яку відбувається перенесення теплоти - поверхнею теплообміну або поверхнею, що віддає тепло.

Коефіцієнт пропорційності α , Вт/(м²К) називається коефіцієнтом тепловіддачі. Перетворюючи співвідношення (3.1), отримуємо:

$$\alpha = \frac{dQ}{(T_w - T_c)dS} = \frac{q}{\Delta T}. \quad (3.2)$$

Співвідношення (3.2) дозволяє визначити коефіцієнт тепловіддачі як щільність теплового потоку q на границі «речовина – тіло, яке омивається», віднесеного до різниці температур поверхні цього тіла і навколишнього середовища.

Чисельно, коефіцієнт тепловіддачі дорівнює щільності теплового потоку, що передається через поверхню, яка омивається при одиничному температурному натиску $\Delta T = 1$. Коефіцієнт α характеризує інтенсивність процесу тепловіддачі і залежить від великого числа різних чинників.

У загальному випадку на коефіцієнт тепловіддачі α впливають геометричні розміри і форма тіла, яке омивається, температура його поверхні, природа виникнення і режим руху речовини, швидкість, температура і фізичні параметри речовини та багато інших чинників. Коефіцієнт тепловіддачі α може бути різним в різних точках поверхні, тому розрізняють середній по поверхні теплообміну і місцевий (локальний) коефіцієнти тепловіддачі. Для спрощення теплових розрахунків зазвичай користуються середнім по поверхні коефіцієнтом тепловіддачі $\bar{\alpha}$.

Природа виникнення конвекційного руху речовини. Розрізняють два види руху: вільний і вимушений. Вільним називається рух, який виникає внаслідок різниці щільності нагрітих і холодних частинок речовини, що знаходяться в полі дії сил тяжіння. Теплообмін при такому виді руху речовини називається вільною (природною) конвекцією.

Інтенсивність вільного руху залежить від роду речовини, різниці температур між окремими частинками речовини, об'єму простору, в якому протікає процес.

Вимушений рух (вимушена конвекція) речовини виникає під дією сторонніх збудників (наприклад, насосу, вентилятору, вітру тощо).

У загальному випадку вимушена конвекція може супроводжуватися вільною конвекцією. Такий теплообмін називають змішаною конвекцією. Можна побачити, що внесок вільної конвекції зростає із зменшенням швидкості вимушеного руху і, навпаки, при великих швидкостях вимушеного руху внесок вільної конвекції стає дуже малим.

Режим руху речовини. Великий вплив на процес теплообміну має режим руху речовини. Рух речовини може бути ламінарним або турбулентним. При ламінарному режимі окремі струмені, наприклад, газу

або рідини не перемішуються один з одним, тобто кожна їх частинка рухається паралельно стінці твердого тіла. При турбулентному режимі кожна частинка вказаних струменів бере участь в поступальному русі і здійснює різні поперечні рухи, тобто режим руху характеризується безперервним перемішуванням усіх шарів речовини.

Режим руху речовини зумовлює механізм перенесення теплоти. При ламінарному режимі перенесення теплоти до поверхні тіла (або від неї) здійснюється в основному теплопровідністю і визначається коефіцієнтом теплопровідності рідини. Оскільки теплопровідність багатьох речовин (газів, рідин та іншого) невелика, то і розповсюдження теплоти по всій їх масі при ламінарному режимі руху відбувається повільно. При турбулентному режимі перенесення теплоти в напрямку, нормальному до поверхні тіла, здійснюється як теплопровідністю, так і конвекцією. Інтенсивність перенесення теплоти при турбулентному режимі руху речовини в декілька тисяч разів вища, ніж при ламінарному режимі.

Необхідно відзначити, що при турбулентному режимі не вся маса речовини має нерегульований (хаотичний) характер руху. Завжди на поверхні твердої стінки є шар речовини, в якому внаслідок його в'язкості зберігається ламінарний характер руху.

Фізичні параметри речовини. В даний час в техніці в якості теплоносіїв використовуються найрізноманітніші речовини: повітря, різні гази, вода, масло, бензол, нафта, бензин, спирти, рідкі метали, спеціальні суміші. Залежно від фізичних властивостей цих речовин процес тепловіддачі протікає своєрідно.

Найбільш поширеним рідким теплоносієм є вода. Процеси теплообміну у воді проходять достатньо інтенсивно, використання води не вимагає великих затрат. Необхідно, проте, відзначити, що вода викликає корозію металів, дає сольові відкладення на поверхнях, які обтікає.

Поширеним газоподібним теплоносієм є повітря. Воно завжди є у необхідній кількості, його застосування дозволяє зменшити масу

теплообмінних пристроїв і систем. Крім того, повітря не залишає сольових відкладень на теплообмінних поверхнях. До недоліків повітря як теплоносія слід віднести невисокий коефіцієнт тепловіддачі, а також окислювальну здатність по відношенню до конструкційних матеріалів, які використовуються в теплообмінних системах.

У атомній енергетиці використовуються рідко-металеві теплоносії. Вони відрізняються високою теплопровідністю і температуропровідністю, відносно низькою в'язкістю і високою електропровідністю. Типовими рідко-металевими теплоносіями є натрій, літій, ртуть і сплави: натрій - калій, свинець - вісмут та інші.

Експериментально встановлено [63, 65, 80, 95], що, в загальному випадку, на коефіцієнт тепловіддачі α впливає багато чинників (наприклад, температура, швидкість і теплофізичні характеристики навколишнього середовища, температура і стан (шорсткість, чистота тощо) поверхні, яку обтікає, форма і геометричні розміри тіла, режими обтікання та інше). Тому теоретичне визначення величини α не представляється можливим.

В теперішній час є тільки експериментальні дослідження з визначення залежностей коефіцієнта тепловіддачі α від обмеженого числа вказаних чинників, які для даних випадків найсильніше впливають на його величину (наприклад, дані з продуву потоком повітря плоских та осесиметричних тіл в аеродинамічних трубах для різних швидкостей і режимів обтікання [2, 24, 40, 48, 75, 76, 87, 98, 108, 130]).

3.2 Рівняння конвекційного перенесення

Вивчення процесів конвекційного теплоперенесення зводиться до встановлення функціональних залежностей між змінними, що характеризують ці процеси. У загальному випадку встановити зв'язок хоч би між основними фізичними параметрами, що визначають досліджуваний процес теплоперенесення, дуже важко. Це пояснюється тим, що при

конвекційному теплообміні поля температур і швидкостей тісно взаємопов'язані. З одного боку, температурне поле рухомої речовини багато в чому визначається динамікою течії, тобто залежить від поля швидкостей і його змін. З іншого боку, теплофізичні властивості рідини (перш за все в'язкість) суттєво залежать від температури, що, у свою чергу, викликає зміну в полі швидкостей.

Конвекційне теплоперенесення описується за допомогою основних законів збереження маси, кількості руху і енергії. Щоб отримати диференціальні рівняння конвекційного теплообміну, закони збереження застосовують до виділеного елементарного об'єму, через межі якого протягом малого проміжку часу переносяться певні маса, кількість руху і енергія, що змінюються всередині цього об'єму.

Інтегрування складених таким чином диференціальних рівнянь дозволяє визначити (у тому або іншому вигляді) залежність між шуканими величинами для всієї області інтегрування і розглянутого проміжку часу.

Оскільки всі процеси теплоперенесення розглядаються в речовині, яка вважається суцільним середовищем, то теоретичне вивчення конвекційного теплообміну зводиться, в основному, до визначення залежностей для полів швидкостей, тиску, температури і фізичних властивостей.

Основні диференціальні рівняння, що описують процес конвекційного теплообміну, отримаємо з узагальненого рівняння перенесення субстанції (рівняння Умова [111, 113]) з використанням елементів векторного і тензорного аналізів (див. розділ 1).

Рівняння перенесення субстанції. Складемо рівняння перенесення субстанції (маси, імпульсу, енергії тощо) в рухомому суцільному середовищі. Позначимо через C - концентрацію субстанції (тобто її щільність - кількість в одиниці об'єму).

Розглянемо деякий нерухомий довільний об'єм V , обмежений поверхнею S . Зміна кількості субстанції в даному об'ємі $\frac{d}{dt} \left(\int \bar{C} dV \right)$

відбувається в результаті її перенесення через поверхню S і виробництва субстанції джерелами, що діють у вказаному об'ємі.

$$\int_S \bar{C} (\bar{W} \vec{n}) dS + \int_S \vec{j}_{\bar{C}} \vec{n} dS = \int_V \nabla (\bar{C} \bar{W}) dV + \int_V \nabla \vec{j}_{\bar{C}} dV, \quad (3.3)$$

де $\nabla \bar{W}$ - дивергенція вектора \bar{W} .

Підставляємо вираз (3.3) у попередній вираз і отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{C} dV = - \int_V \nabla (\bar{C} \bar{W}) dV - \int_V \nabla \vec{j}_{\bar{C}} dV + \int_V I_{\bar{C}} dV. \quad (3.4)$$

Змінюючи порядок диференціювання і інтегрування, а також здійснюючи перенесення всіх членів рівняння (3.4) в ліву частину, прийдемо до рівності:

$$\int_V \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \nabla (\bar{C} \bar{W}) + \nabla \vec{j}_{\bar{C}} - I_{\bar{C}} \right) dV = 0. \quad (3.5)$$

У цій рівності об'єм V вибраний довільно, у зв'язку з чим його виконання можливе тільки тоді, коли вираз під знаком інтеграла звертається в нуль в усіх точках даного простору, тобто

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \nabla (\bar{C} \bar{W}) + \nabla \vec{j}_{\bar{C}} - I_{\bar{C}} = 0. \quad (3.6)$$

У диференціальному рівнянні перенесення субстанції (3.6) перший доданок характеризує локальну зміну її концентрації, другий і третій - конвекційне і молекулярне (дифузійне) перенесення, а четвертий - дію джерел.

Рівняння (3.6) називають рівнянням Умова і, остаточно, записують у наступному вигляді:

$$\frac{d\bar{C}}{dt} + \nabla (\bar{C} \bar{W}) = - \nabla \vec{j}_{\bar{C}} + I_{\bar{C}}. \quad (3.7)$$

Рівняння перенесення маси. Диференціальне рівняння перенесення маси (рівняння безперервності, нерозривності або суцільності) виражає закон збереження маси рухомого суцільного середовища, тобто речовина

безперервно заповнює простір.

Рівняння нерозривності однокомпонентного суцільного середовища отримаємо з рівняння перенесення субстанції, вважаючи $C = \rho$, де ρ - щільність середовища:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{C} \vec{W}) = 0 \quad (3.8)$$

або в декартових координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (3.9)$$

Для встановленого процесу часткова похідна дорівнює нулю і рівняння нерозривності спрощується:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{W}) = 0. \quad (3.10)$$

У декартових координатах рівняння (3.10) має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3.11)$$

При русі нестисливої речовини її щільність не залежить від часу і просторових координат, тобто рівняння нерозривності для стаціонарних і нестаціонарних процесів має один і той же вигляд:

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (3.12)$$

або в декартових координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Рівняння перенесення імпульсу. Диференціальне рівняння перенесення імпульсу (кількості руху) виражає закон збереження кількості руху в суцільному середовищі. Його називають також рівнянням руху.

Рівняння руху однокомпонентного суцільного середовища може бути отримане з виразу (3.7), якщо в якості субстанції, що переносить прийняти кількість руху, віднесеного до одиниці об'єму (тобто замінюємо C на $\rho \vec{W}$).

В основі рівнянь руху лежить другий закон Ньютона, згідно з яким результуюча сила, що діє на довільний об'єм, дорівнює загальній зміні кількості руху в цьому об'ємі. Результуюча сила, що діє на цей об'єм, може бути обумовлена поверхневими і об'ємними силами. Таким чином, швидкість зміни імпульсу для довільного об'єму дорівнює сумі наступних доданків: поверхневого інтегралу від щільності конвекційного потоку імпульсу через границю об'єму, поверхневого інтегралу від тензора напруження і об'ємного інтегралу від повного вектора масових сил. Масова сила, що припадає на одиницю маси речовини, може бути результатом впливу гравітаційного, магнітного, електричного та інших силових полів. Поверхневим силам, що виникають при впливі сусідніх елементів субстанції довільного об'єму, відповідають напруження на шести граничних поверхнях цього об'єму.

Позначимо через $\vec{\bar{p}}$ - тензор напружень, а через \vec{F} - вектор масових сил, що діють на одиницю маси речовини. Тоді у виразі (3.7) задаємо $\vec{j} = \vec{\bar{p}}, \vec{I} = \rho \vec{F}$ і отримаємо рівняння перенесення імпульсу:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vec{W})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{W} \cdot \vec{W}) = -\nabla \cdot \vec{\bar{p}} + \rho \cdot \vec{F}. \quad (3.14)$$

Уявімо тензор напружень $\vec{\bar{p}}$ у вигляді суми кульового тензора і девіатора напруження:

$$\vec{\bar{p}} = \rho \vec{\delta} + \vec{\sigma}. \quad (3.15)$$

Кульовий тензор з точністю до величини, яка визначається об'ємною в'язкістю, дорівнює добутку тиску p на дельта-тензор Кронекера $\vec{\delta}$, а девіатор представляє собою тензор, обумовлений зсувною в'язкістю (тензор в'язких напружень). З урахуванням (3.15), рівняння (3.14) приймає вигляд:

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} \cdot \vec{W}) = -\nabla p - \nabla \vec{\sigma} + \rho \vec{F}. \quad (3.16)$$

Тут ліва частина представляє собою суму локальної зміни кількості руху в одиницю часу і його зміна за рахунок конвекційного перенесення. Перша і друга складова в правій частині – зміна кількості руху в одиницю

часу за рахунок тиску і внутрішнього тертя, третя – сумарна дія зовнішніх сил.

Якщо поле зовнішніх сил зводиться до гравітаційного ($\vec{F} \equiv \vec{g}$), то рівняння руху запишеться так:

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} \vec{W}) = -\nabla p - \nabla \vec{\sigma} + \rho \vec{g}. \quad (3.17)$$

При русі нестисливої субстанції ($\rho = const$) його можна перетворити наступним чином:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla(\vec{W} \vec{W}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{\sigma} + \vec{g}. \quad (3.18)$$

Рівняння Нав'є-Стокса. Отримане рівняння перенесення імпульсу не є замкнутим, оскільки поряд з невідомою величиною (вектором швидкості) містить, щільність її молекулярного потоку (тензор напружень). Щоб зменшити кількість невідомих функцій, необхідно встановити зв'язок між вектором швидкості і тензора напружень, тобто визначити реологічні рівняння для розглянутої субстанції. Ми будемо розглядати тільки ізотропні субстанції з лінійними законами перенесення.

Реологічними рівняннями (законами) середовищ називають рівняння, що встановлюють зв'язок між компонентами тензорів напружень, деформацій і швидкостей деформацій. Тензор напружень представляють у вигляді двох частин: ізотропної $p' \vec{\delta}$, що має таку ж форму, як і в рідині що знаходиться в стані спокою, хоча величина p' не обов'язково збігається зі статичним тиском p в рідині, і неізотропної (девіатор напружень) $\vec{\delta}$, що містить дотичні і деякі діагональні члени, в сумі рівні нулю:

$$\vec{P} = p' \vec{\delta} + \vec{\sigma}, \quad (3.19)$$

де величина p' пов'язана з термодинамічним тиском p залежністю [2, 75]:

$$p' = p - \chi(\nabla \vec{W}), \quad (3.20)$$

де χ - об'ємна в'язкість.

Ізотропна частина дорівнює одній третій суми діагональних членів (першого інваріанту тензора напружень). Наявність девіатора пов'язане виключно з рухом субстанції.

Реологічне рівняння плинності звичайної (ньютонівської) в'язкої рідини встановлює лінійний зв'язок між девіатором напружень і тензором швидкостей деформацій. При прямолінійному шаровому протіканні рідини закон Ньютона описується рівністю:

$$\sigma = -\mu \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (3.21)$$

де μ - динамічна в'язкість рідини, u - швидкість у напрямку руху рідини, n - нормаль до цього напрямку. У загальному випадку реологічне рівняння ньютонівської рідини має вигляд [40, 130]:

$$\vec{\sigma} = -\mu \left[\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c \right] + \frac{2}{3} \mu (\nabla \vec{W}) \vec{\delta}, \quad (3.22)$$

де $(\nabla \vec{W})_c$ - тензор, сполучений з тензорів $\nabla \vec{W}$. Маємо:

$$\vec{P} = p \vec{\delta} - \mu \left[\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c \right] + \left(\frac{2}{3} \mu - \chi \right) (\nabla \vec{W}) \vec{\delta}. \quad (3.23)$$

Об'ємна в'язкість χ є малою величиною і зазвичай її не враховують. Узагальнений закон Ньютона (3.22) або (3.23) справедливий, якщо тензор напружень лінійно залежить від тензора швидкостей деформацій і середовище ізотропне.

Він добре описує реологічні властивості газів і багатьох практично важливих рідин, у тому числі і води. Теплоносії (гази, рідини), для яких справедливий закон Ньютона, називають ньютонівськими.

Диференціальне рівняння Нав'є-Стокса випливає з рівняння перенесення імпульсу (3.16), якщо в нього підставити вираз для тензора в'язких напружень (3.22) з урахуванням об'ємної в'язкості (3.23):

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} \vec{W}) = -\nabla p - \nabla \left\{ \mu \left[\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c \right] \right\} + \nabla \left[\left(\chi - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \vec{W}) \right] + \rho \vec{F}. \quad (3.24)$$

У випадку субстанції, що нестискається ($\rho = const$, $\nabla \vec{W} = 0$) воно спроститься і прийме вигляд:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla(\vec{W} \vec{W}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left\{ \gamma \left[\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c \right] \right\} + \vec{F}, \quad (3.25)$$

де $\gamma = \frac{\mu}{\rho}$ [м² / с] - кінематична в'язкість. Якщо, до того ж, динамічна в'язкість постійна ($\mu = const$), то з урахуванням співвідношення $\nabla[(\nabla \vec{W})_c] = \nabla(\nabla \vec{W}) = 0$ рівняння (3.25) прийме вигляд:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla(\vec{W} \vec{W}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \gamma \nabla^2 \vec{W} + \vec{F}. \quad (3.26)$$

Співвідношення (3.26) є класичною формою рівняння Нав'є-Стокса, яке використовується в теорії конвекційного теплообміну.

Слід зазначити, що динамічна в'язкість постійна для ізотермічних потоків однокомпонентної субстанції. У загальному випадку вона залежить від температури і складу. Нестисливою субстанцією можна вважати однокомпонентні рідини або гази, що рухаються з дозвуківими швидкостями при нехтуванні масою неізотермічності їх потоків.

Рівняння Нав'є-Стокса для стисливої рідини при $\mu = const$, $\chi = const$ записується таким чином:

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} \vec{W}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{W} + \left(\chi + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla(\nabla \vec{W}) + \rho \vec{F}. \quad (3.27)$$

З урахуванням (3.8) ліву частину цього рівняння можна виразити через субстанціональний похідну:

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} \vec{W}) = \rho \left[\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \nabla) \vec{W} \right] = \rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}. \quad (3.28)$$

Тоді отримаємо:

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \left\{ \mu \left[\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c \right] \right\} + \nabla \left[\left(\chi - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \vec{W}) \right] + \rho \vec{F}. \quad (3.29)$$

або

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{W} \nabla \bar{W} \right) = -\nabla p + \nabla \left\{ \mu \left[\nabla \bar{W} + (\nabla \bar{W})_c \right] \right\} + \nabla \left[\left(\chi - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \bar{W}) \right] + \rho \bar{F}. \quad (3.30)$$

Для випадку, коли коефіцієнти в'язкості постійні, рівняння (3.29), (3.30) приймають вигляд:

$$\rho \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{W} + \left(\chi + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \bar{W}) + \rho \bar{F}; \quad (3.31)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{W} \nabla \bar{W} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{W} + \left(\chi + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \bar{W}) + \rho \bar{F}. \quad (3.32)$$

Для випадку нестисливої рідини ($\nabla \bar{W} = 0$) рівняння (3.32) в декартовій системі координат мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_x, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_y, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_x. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Рівняння перенесення енергії. Диференціальне рівняння перенесення енергії виражає закон її збереження в суцільному середовищі. Закон збереження енергії вимагає, щоб результуюча енергія, що пройшла через поверхні, що обмежують довільний об'єм, дорівнювала зміні енергії всередині об'єму. Таким чином, швидкість зміни повної (внутрішньої та кінетичної) енергії довільного об'єму середовища дорівнює сумі потужностей масових і поверхневих сил, прикладених до виділеного об'єму і його поверхні, а також молекулярного і молярного потоків енергії.

Рівняння енергії однокомпонентного суцільного середовища можна визначити з (3.7), прийнявши в ньому в якості субстанції, що переносить повну енергію одиниці об'єму середовища ($C = E$).

Позначивши внутрішню $U = \rho T$ і кінетичну $K = \frac{\rho \overline{W}^2}{2}$ енергію одиниці об'єму середовища, отримаємо: $E = \rho e = U + K = \rho \left(T + \frac{\overline{W}^2}{2} \right)$.

Оскільки енергообмін з навколишнім середовищем відбувається через поверхню виділеного об'єму конвекційним та дифузійним шляхом, а також за рахунок роботи поверхневих сил, тоді $\vec{J}_E = \vec{J}_U + \vec{P}\vec{W}$. Джерелом енергії всередині об'єму є робота масових сил $I = \rho \vec{F}\vec{W}$. Отже, диференціальне рівняння перенесення повної енергії в однокомпонентному суцільному середовищі записується так:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(\vec{W} E) = -\nabla \vec{J}_E + \rho \vec{F}\vec{W} \quad (3.34)$$

або

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} e) = -\nabla \vec{J}_U + \nabla(\vec{P}\vec{W}) + \rho \vec{F}\vec{W}. \quad (3.35)$$

Потік внутрішньої енергії однокомпонентного середовища дорівнює тепловому потоку $\vec{J}_U = \vec{q}$, що виникає внаслідок неізотермічності, тобто рівняння (3.35) можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W} e) = -\nabla \vec{q} + \nabla(\vec{P}\vec{W}) + \rho \vec{F}\vec{W}. \quad (3.36)$$

У теорії конвекційного теплообміну рівняння енергії використовується в різних формах або для окремих складових енергії в залежності від зручності їх застосування.

Диференціальне рівняння перенесення кінетичної енергії однокомпонентного середовища може бути отримане в результаті скалярного множення рівняння руху (3.15) на вектор швидкості \vec{W} :

$$\left[\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W}\vec{W}) \right] \vec{W} = -(\nabla \vec{P})\vec{W} + \rho \vec{F}\vec{W}. \quad (3.37)$$

Ліву частину рівності (3.37) перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{W}\vec{W}) \right] \vec{W} &= \left[\rho \frac{\partial\vec{W}}{\partial t} + (\rho\vec{W}\nabla)\vec{W} \right] \vec{W} = \rho \frac{\partial\left(\frac{\vec{W}^2}{2}\right)}{\partial t} + (\rho\vec{W}\nabla)\frac{\vec{W}^2}{2} = \\ &= \rho \frac{\partial\left(\frac{\vec{W}^2}{2}\right)}{\partial t} + \nabla\left[\rho\vec{W}\left(\frac{\vec{W}^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(\vec{W}K). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Підставляючи вираз (3.38) в рівняння (3.37) з урахуванням рівності $(\nabla\vec{P})\vec{W} = (\nabla\vec{P}\vec{W}) - \vec{P}:(\nabla\vec{W})$ (знак « : » означає подвійне скалярне множення), запишемо рівняння кінетичної енергії:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(\vec{W}K) = -\nabla(\vec{P}\vec{W}) + \rho\vec{F}\vec{W} + \vec{P}:(\nabla\vec{W}). \quad (3.39)$$

Складові в лівій частині співвідношення (3.39) характеризують, відповідно, швидкості локальних і конвекційних змін кінетичної енергії, що додаються, а в правій частині - потужності масових, зовнішніх і внутрішніх поверхневих сил. Представляючи тензор напруження у вигляді суми кульового тензора і девіатора, рівняння (3.39) можна перетворити до вигляду:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(\vec{W}K) = -\nabla(p\vec{W}) - \nabla(\vec{\sigma}\vec{W}) + \rho\vec{F}\vec{W} + p(\nabla\vec{W}) + \vec{\sigma}:(\nabla\vec{W}). \quad (3.40)$$

Віднімаючи почленно рівність (3.40) з рівняння перенесення повної енергії (3.36), отримуємо рівняння перенесення внутрішньої енергії однокомпонентного середовища:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{W}T) = -\nabla\vec{q} - \vec{P}:(\nabla\vec{W}) \quad (3.41)$$

або

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{W}T) = -\nabla\vec{q} - p\nabla\vec{W} - \vec{\sigma}:(\nabla\vec{W}). \quad (3.42)$$

З рівняння (3.42) за допомогою відомого з термодинаміки співвідношенні $h = v + \frac{p}{\rho}$ можна одержати рівняння перенесення ентальпії:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{W} h) = -\nabla \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p \bar{W}) - p(\nabla \bar{W}) - \vec{\sigma} : (\nabla \bar{W}) \quad (3.43)$$

або

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{W} h) = -\nabla \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{W} \nabla) p - \vec{\sigma} : (\nabla \bar{W}), \quad (3.44)$$

де h - ентальпія одиниці маси речовини.

При дослідженні теплообміну в ізобаричних течіях нестисливих рідин рівняння (3.44) істотно спрощується:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(\bar{W} h) = -\frac{1}{\rho} \nabla \vec{q} - \frac{1}{\rho} \vec{\sigma} : (\nabla \bar{W}). \quad (3.45)$$

Звідси, враховуючи, що в даному випадку $dh = c_p dT$, а також використовуючи закон теплопровідності Фур'є $\vec{q} = -\lambda \nabla T$, згідно з яким тепловий потік пропорційний градієнту температури, при постійній теплоємності рідини ($c_p = c_v = c$) і теплопровідності отримаємо рівняння енергії в найбільш розповсюдженному вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\bar{W} T) = a^2 \nabla^2 T + \frac{\mu}{c\rho} \hat{O}_v, \quad (3.46)$$

де член \hat{O}_v визначає в'язку дисипацію і описує необоротну частину перенесення енергії, обумовленого компонентами напружень.

У декартових координатах функція \hat{O}_v має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{O}_v = & 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \bar{W})^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ця функція завжди додатна і, отже, є дисипативною.

У декартових координатах рівняння енергії (3.46) має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{c\rho} \hat{O}_v, \quad (3.48)$$

де \hat{O}_v визначається за формулою (3.47).

Рівняння осередненого турбулентного потоку. Турбулентний рух відрізняється від ламінарного наявністю пульсацій - відхилень миттєвих значень характеристик перенесення (швидкість, температура, тиск тощо) від їх деяких середніх значень. Таким чином, турбулентний рух складається з руху, що описується усередненими характеристиками, і накладеного на нього хаотичного пульсаційного руху.

Позначимо осереднені за часом значення величини Φ через $\bar{\Phi}$, а пульсаційного - $\hat{\Phi}$, тоді миттєве значення величини Φ виразиться сумою

$$\hat{\Phi} = \bar{\Phi} + \hat{\Phi}'. \quad (3.49)$$

Під осередненим значенням розуміють середнє значення за часом у фіксованій точці простору, тобто

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \hat{\Phi} dt. \quad (3.50)$$

Слід зазначити, що інтервал часу $t_2 - t_1$, за яким проводиться осереднення, повинен бути вибраний досить великим, щоб осереднення значення величини від нього не залежало. Тоді, згідно з визначенням, осереднені значення пульсаційної величини:

$$\bar{\hat{\Phi}'} = 0. \quad (3.51)$$

Рівняння осередненого потоку одержують наступним чином: в рівняння конвекційного теплообміну замість залежних змінних (складових вектора швидкості, тиску, температури) представляють їх вираження через осереднені значення і пульсації (співвідношення виду (3.49)), а потім роблять осереднення за часом кожного отриманого члена.

Опускаючи досить громіздкі викладки запишемо систему рівнянь конвекційного теплообміну для осередненого турбулентного потоку (без урахування масових сил, внутрішніх джерел теплоти і дисипативної функції) в декартових координатах:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (3.52)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau'_{xz}}{\partial z} \right). \quad (3.53)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau'_{yz}}{\partial z} \right);$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial z} \right);$$

$$u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = a^2 \Delta \bar{T} \left(\frac{\partial \overline{U'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \right). \quad (3.54)$$

Рівняння (3.51) відрізняються від рівнянь для ламінарного потоку наявністю додаткових членів, що визначаються тензором напруження $\overline{\sigma'}$ виду:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{U'^2} & \overline{U'v'} & \overline{U'w'} \\ \overline{U'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{U'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Тензор $\overline{\sigma'}$ називають тензором умовних напружень турбулентної течії.

Щоб з'ясувати фізичний зміст додаткових членів в рівнянні енергії (3.54), представимо його у вигляді:

$$\rho c \overline{W} \nabla = -\nabla \vec{q} + \rho c \nabla (\overline{WT}). \quad (3.56)$$

Вводячи позначення $\vec{q}_m = \rho c \overline{W'T}$ перепишемо (3.56) наступним чином:

$$\rho c \overline{W} \nabla \bar{T} = -\nabla (\vec{q} + \vec{q}_m). \quad (3.57)$$

Зі співвідношення (3.57) видно, що додатковий член в рівнянні енергії (3.54) характеризує додаткове перенесення теплоти за рахунок турбулентних пульсацій, які здійснюються поряд з молекулярним (ламінарним) перенесенням теплоти теплопровідністю. Основна складність при вирішенні рівняння осередненого турбулентного потоку полягає в тому, щоб правильно доповнити ці рівняння необхідними замикаючими співвідношеннями, що

пов'язують турбулентні напруження і тепловий потік з усередненими значеннями швидкостей і температури. Детальніше розгляд цього складного і об'ємного питання можна знайти в роботах [2, 40, 75, 130].

3.3 Основи теплообміну при обтіканні газовим потоком поверхні твердого тіла

Практичний інтерес представляє теплообмін між газом і оптичною поверхнею, що ним обдувається. Розглянемо особливості течії та перенесення теплоти в приповерхневому газовому шарі.

Умови "прилипання". У аеродинаміці в'язкого газу відома гіпотеза про те, що його частинки, безпосередньо прилеглі до твердої поверхні, адсорбуються (прилипають до неї) і мають швидкість, рівну швидкості тіла, а якщо тіло нерухоме, то швидкість дорівнює нулю. Шар «прилиплового» газу має нескінченно малу товщину. Гіпотеза про рівність нулю швидкостей газу на твердій поверхні знайшла експериментальне підтвердження [17, 40, 75, 121, 129, 130].

Рівність нулю швидкості на твердій поверхні справедлива до тих пір, поки газ можна вважати суцільним середовищем. При малих тисках послаблюється взаємодія газу з твердою поверхнею і розріджений газ поблизу твердої поверхні починає просочуватися. Ступінь розрідження газу характеризується величиною параметра Кнудсена: l_0 - відношення середньої довжини вільного пробігу молекул газу $\langle l \rangle$ до характерного розміру твердого тіла. l_0 при $\frac{\langle l \rangle}{l_0} > 0,001$ газ не можна розглядати як суцільне середовище.

Нижче розглядаються в основному суцільні середовища.

Динамічний пограничний шар. Розглянемо процес утворення пограничного шару при поздовжньому обтіканні поверхні твердого тіла безмежним газовим потоком. Швидкість і температура газового потоку постійні, тобто $u_0 = const$ і $T_0 = const$.

Як вже зазначалося, частки газу, які безпосередньо контактують з твердою поверхнею, адсорбуються (прилипають) до неї. У результаті біля поверхні, яка обтікає

Таким чином, увесь газовий потік може бути розділений (умовно) на пограничний шар і зовнішній потік, який називають незбурених або потенціальним. У зовнішньому потоці сили в'язкості дуже малі в порівнянні з силами інерції, і газ можна розглядати в якості невязкого середовища. Середовища всередині пограничного шару сили інерції і сили в'язкості співрозмірні за величиною. Тонкий шар газу близько поверхні, в якому швидкість газу змінюється від нуля до швидкості незбуреного потоку u_0 (далеко від поверхні тіла), називається динамічним пограничним шаром.

На рис. 3.1 показана схема динамічного пограничного шару при повздовжньому обтіканні плоскої поверхні твердого тіла (наприклад, пластини) швидкістю u_0 . З рис. 3.1 витікає, що товщина динамічного пограничного шару виникає від лобової точки пластини (передня критична точка), що визначається координатою $x = 0$, далі вздовж потоку.

При цьому товщина динамічного пограничного шару залежить від в'язкості і швидкості газового потоку. За товщину пограничного шару умовно приймають відстань по нормалі від поверхні, яка обдувається та на якому швидкість досягає значення рівного 99% швидкості незбуреного потоку u_0 . Крім цього при русі газового потоку поблизу поверхні виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &\neq 0 && \text{при } 0 < y < \delta \\ \frac{du}{dy} &= 0, \quad u = u_0 && \text{при } y > \delta. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Характер течії і товщина ламінарного (δ) і турбулентного ($\delta_{турб}$) пограничних шарів визначаються, в основному, числом Рейнольдса:

$$Re_x = \frac{u_0 x}{\gamma}. \quad (3.59)$$

При малих значеннях x рух в динамічному пограничному шарі є ламінарним. У турбулентному динамічному пограничному шарі поблизу поверхні тіла існує тонкий газовий шар, рух в якому має ламінарний характер.

Цей шар називають ламінарним або в'язким підшаром, в якому швидкість є лінійною функцією відстані від поверхні тіла.

Експериментальні дослідження показують [2, 75], що перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного здійснюється при

$$10^4 < Re x_{\text{ед}} < 10^5, \quad (3.60)$$

де $Re x_{\text{ед}} = \frac{u_0 x_{\text{ед}}}{\nu}$; $x_{\text{ед}}$ - відстань від передньої критичної точки.

Необхідно відзначити, що пограничний шар виникає не тільки при зовнішньому обтіканні тіл різної геометрії, але і при внутрішніх рухах різних речовин (газів, рідин тощо) в трубах і каналах [2, 40, 75, 130].

Аналогічно утворенню динамічного пограничного шару біля поверхні, яка має температуру, відмінну від температури набігаючого потоку, утворюється тепловий пограничний шар.

Тепловий пограничний шар – пристінний шар рідини, в межах якого її

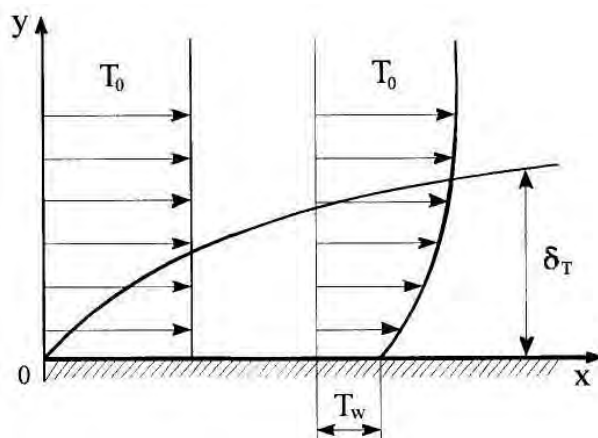


Рисунок 3.1 - Розподіл температури в тепловому пограничному шарі:

δ_T - товщина теплового пограничного шару

температура змінюється від значення, рівного температурі стінки T_w , до значення, рівного температурі незбуреного потоку T_0 .

Зміна температури в тепловому пограничному шарі (рис. 3.1) залежить від режиму течії рідини в динамічному пограничному шарі.

Товщини динамічного та теплового пограничних шарів у загальному випадку не збігаються (рис. 3.2).

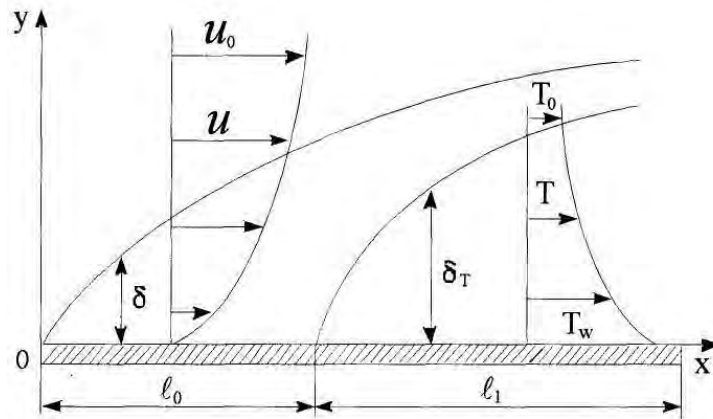


Рисунок 3.2 - Динамічний та тепловий пограничні шари при повздовжньому ламінарному обтіканні пластини: l_0 - відстань від передньої критичної точки до точки на поверхні пластини, де стає помітним її аеродинамічний нагрів; $l_0 + l_1$ - загальна довжина пластини

При ламінарному пограничному шарі співвідношення товщини динамічного та теплового пограничних шарів визначається числом Прандтля $\left(Pr = \frac{\gamma}{a^2} \right)$, тобто залежить від роду речовини. Для в'язких рідин з малою теплопровідністю (наприклад, масла) $Pr > 1$ і товщина динамічного пограничного шару більше товщини теплового пограничного шару. Для газів $Pr = 1$ товщини шарів приблизно однакові. Для рідких металів $Pr > 1$ тепловий пограничний шар проникає в область потенційної течії.

Механізм і інтенсивність перенесення теплоти залежать від режиму руху речовини в пограничному шарі. У ламінарному пограничному шарі перенесення теплоти між шарами речовини, що рухається уздовж пластини здійснюється теплопровідністю. У турбулентному граничному шарі основна зміна температури відбувається в тонкому шарі речовини (в'язкий або ламінарний підшар), де теплота передається теплопровідністю.

У турбулентному динамічному пограничному шарі зміна температури досить незначна, що пояснюється інтенсивним перемішуванням речовини і якісно схоже зі зміною швидкості.

Розглянемо задачу знаходження коефіцієнта тепловіддачі α при ламінарному обтіканні тіла найбільш простої геометрії - пластини (тіло з плоскою поверхнею).

З математичної точки зору завдання знаходження характеристик теплообміну при обтіканні плоскої поверхні зводиться до розв'язання системи рівнянь енергії, руху, нерозривності (ці рівняння можуть бути доповнені і іншими співвідношеннями) для пограничного шару з відповідними граничними умовами. Наведемо цю систему для найбільш простого випадку стаціонарного безградієнтного ламінарного пограничного шару (безградієнтний пограничний шар характеризується відсутністю градієнта тиску вздовж поверхні пластини, тобто $\frac{dp}{dx} = 0$) при постійних теплофізичних характеристиках газового потоку рівняння тепловіддачі:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_0 - T_w} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (3.61)$$

рівняння енергії:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3.62)$$

рівняння руху:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (3.63)$$

рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3.64)$$

граничні умови:

$$\text{при } y = 0, u = v = 0, T = T_w,$$

$$\text{при } y = \infty, u = u_0, T = T_0. \quad (3.65)$$

Система (3.61) - (3.65) показує, що навіть у розглянутому простому випадку руху і теплообміну в пограничному шарі визначення коефіцієнта тепловіддачі є досить складним завданням аеродинаміки.

Тертя і тепловіддача в ламінарному пограничному шарі. Щоб визначити коефіцієнти тертя і тепловіддачі в ламінарному пограничному шарі, необхідно знати розподіл швидкості і температури.

Представимо розподілення швидкості і температури в ламінарному пограничному шарі у вигляді поліномів третьої степені. Степінь апроксимуючих поліномів визначається кількістю співвідношень, які використовуються для визначення вхідних до поліному невідомих коефіцієнтів.

Таким чином, розподіл швидкостей описується степеневим рядом з чотирьох членів:

$$u(y) = a + by + cy^2 + dy^3. \quad (3.66)$$

Це співвідношення повинно задовольняти наступним граничним умовам: при $y = 0$, $u = 0$ (умова прилипання) $u = v = 0$, тому з рівняння (3.63)

$$\text{отримуємо } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = \delta, u = u_0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Задовольняючи ці умови, отримуємо наступні значення для коефіцієнтів полінома (3.66):

$$a = 0, b = \frac{3}{2} \frac{u_0}{\delta}, c = 0, d = -\frac{u_0}{2\delta^3}.$$

Підставляючи їх в рівняння (3.66) і приводячи його до безрозмірного виду, отримуємо:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 = \frac{3}{2} Y - \frac{1}{2} Y^3, \quad (3.67)$$

де $Y = \frac{y}{\delta}$.

При підстановці виразу (3.67) для розподілу швидкостей в інтегральне рівняння імпульсів знаходимо:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}. \quad (3.68)$$

Зі співвідношення (3.67) маємо

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_0}{\delta}. \quad (3.69)$$

Після підстановки рівності (3.69) в (3.68) та інтегрування останнього отримуємо:

$$\frac{d}{dx} \left(\rho u_0^2 \frac{396}{280} \right) = \frac{3}{2} \mu \frac{u_0}{\delta}. \quad (3.70)$$

Інтегруючи цей вираз, знаходимо залежність товщини граничного шару від в'язкості, відстані від передньої кромки і швидкості незбуреного потоку у вигляді:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140\gamma x}{13u_0} + C. \quad (3.71)$$

Для визначення константи C використовуємо умову $\delta|_{x=0} = 0$, з якої випливає, що $C = 0$. Тоді $\delta^2 = \frac{280\gamma x}{13u_0}$ або

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.72)$$

Звідси видно, що зі збільшенням Re_x товщина теплового та динамічного пограничних шарів зменшується.

Підставляючи вираз (3.72) в (3.69), визначимо дотичне напруження на стінці:

$$0,32 \frac{\mu u_0}{x} \sqrt{Re_x}, \quad (3.73)$$

звідси неважко вирахувати коефіцієнт тертя:

$$c_{f_x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{0,647}{\sqrt{Re_x}}. \quad (3.74)$$

Для розв'язання інтегрального рівняння теплового потоку допустимо, що розподіл температур в пограничному шарі має такий же вигляд, як і розподілення швидкостей:

$$T(y) = e + fy + gy^2 + hy^3. \quad (3.75)$$

Це співвідношення повинно задовольняти наступним граничним умовам; при $y = 0, T = T_w, \frac{d^2T}{dy^2} = 0$ (це випливає з рівняння енергії (3.62) і умов прилипання); при $y = \delta_m, T = T_0, \frac{dT}{dy} = 0$.

Задовольняючи цим умовам, отримуємо наступні значення невідомих коефіцієнтів:

$$e = T_0, f = \frac{3T_0}{2\delta_m}, g = 0, h = -\frac{T_0}{2\delta_m^3}.$$

Підставляючи їх в рівняння (3.75) і приводячи його до безрозмірного виду, знаходимо:

$$\frac{T - T_0}{T_0 - T_w} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_m} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_m} \right)^3. \quad (3.76)$$

Підставляючи вираз $T = T_w$ з (3.76) та u з (3.67) в інтеграл рівняння (3.65), перетворимо його до виду:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_m} (T_0 - T) u \, dy &= \int_0^{\delta_m} [(T_0 - T_c) - (T - T_c)] u \, dy = \\ &= (T_0 - T_c) u_0 \int_0^{\delta_m} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_m} \right)^3 \right] \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \\ &= (T_0 - T_c) u_0 \delta \left(\frac{3}{20} \beta^2 - \frac{3}{280} \beta^4 \right), \end{aligned}$$

де $\beta = \frac{\delta_m}{\delta}$.

Для газів $Pr \geq 1, \beta \leq 1$, і тоді другим членом у дужках в порівнянні з першим можна знехтувати. Підставляючи цей наближений вираз для інтеграла в рівняння (3.65), отримуємо:

$$\frac{3}{20} u_0 (T_0 - T_w) \beta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = a^2 \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} a^2 \frac{T_0 - T_w}{\delta \beta}.$$

або

$$\frac{1}{10} u_0 \beta^3 \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = a^2.$$

Із співвідношення (3.72) отримуємо, $\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = 10,75 \frac{\gamma}{u_0}$ звідки

$$\beta^3 = \frac{10}{10,75} \frac{a^2}{\gamma}$$

або

$$\delta_m = 0,9767 \delta Pr^{-1/3}. \quad (3.77)$$

Вираз (3.77) встановлює зв'язок між δ і δ_T (товщиною динамічного і теплового пограничних шарів) при ламінарному режимі течії. При $Pr = 1$ товщини динамічного та теплового шарів однакові, при $Pr < 1$ тепловий пограничний шар товщай динамічного, а при $Pr > 1$ – навпаки.

Опускаючи знак мінус в рівнянні (3.61) і з огляду (3.76), отримуємо:

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_0 - T_c} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_m}. \quad (3.78)$$

Звідси витікає, що коефіцієнт тепловіддачі обернено пропорційний товщині теплового пограничного шару.

Додаючи обидві частини співвідношення (3.78) на $\frac{x}{\lambda}$ і підставляючи в нього δ_m з (3.77), отримуємо наступний вираз для безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі (число Нуссельта) $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$:

$$Nu_x = 0,33 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (3.79)$$

Ця формула отримана в припущенні, що температура поверхні пластини постійна, теплофізичні властивості рідини не залежать від температури і на початку пластини немає ділянки яка обігривається (l_0 , див. рис. 3.2). Врахування впливу зазначених факторів на тепловіддачу робить практично неможливим аналітичне рішення задачі про визначення числа Nu . Тому основним шляхом вирішення цього завдання залишається

експериментальний: облік тих чи інших факторів здійснюється введенням у формули типу (3.79) різних додаткових множників [11, 40, 130].

Задача 1.

По трубі діаметром $d = 120$ мм і довжиною $l = 2$ м рухається повітря зі швидкістю $w = 2,45$ м/сек. Визначити значення коефіцієнта тепловіддачі α , якщо середня температура повітря $t_f = 100$ °С.

Розв'язок:

Для $t_f = 100$ °С за даними [81]: $\lambda_f = 0,0322$ Вт/мград; $\nu_f = 23,13/10^{-6}$ м²/с

Тоді, значення критерію Рейнольда:

$$Re = \frac{\omega d}{\nu_f} = \frac{2,5 \cdot 0,12}{23,13 \cdot 10^{-6}} \approx 13000;$$

$$Re^{0,8} = 1956.$$

Для повітря критеріальне рівняння має вид:

$$Nu_f = 0,18 Re^{0,8} = 0,18 \cdot 1956 \approx 35,3.$$

Відповідно, коефіцієнт тепловіддачі:

$$\alpha' = \frac{Nu_f \lambda_f}{d} = 35,3 \frac{0,0322}{0,12} = 9,4 \text{ Вт/м}^2 \text{ град.}$$

Оскільки $\frac{l}{d} = \frac{2}{0,12} = 16,6$, то необхідно ввести поправку ε_l . За даними

[81] приймаємо $\varepsilon_l = 1,12$.

Тоді $\alpha = \alpha' \varepsilon_l = 9,4 \cdot 1,12 \approx 10,5$ Вт/м² град.

Відповідь: коефіцієнт тепловіддачі дорівнює $\alpha = 10,5$ Вт/м² град.

Великий вплив на тепловіддачу має і змінність температури обтічної поверхні. Цей фактор в багатьох випадках враховують за допомогою залежності:

$$\theta_w(x) = Ax^m, \quad (3.80)$$

де $\theta_w(x) = T_w(x) - T_0$; $T_0 = const$; $T_w(x)$ - місцеве значення температури поверхні;

A, m постійні, що визначаються експериментально.

При $m = 0$, $\theta_w = A = T_w - T_0$, тобто із залежності (3.80) отримуємо випадок ізотермічної поверхні.

Вплив початкової ділянки, що не обігривається, на теплообмін полягає в тому, що в даному випадку має місце неодноразовий розвиток динамічного і теплового пограничних шарів. Для розрахунку місцевих коефіцієнтів тепловіддачі при наявності ділянки, що не обігривається, було отримано рівняння [130]:

$$Nu_x = 0,33 \varepsilon_u Re_{0,x1}^{0,5} Pr_0^{0,33} \left(\frac{x_1}{x} \right)^{0,2} \left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad (3.81)$$

де $\varepsilon_u = \frac{Nu_x(m \neq 0)}{Nu_x(m = 0)}$; $x_1 = x - l_0$ координата, за якою розраховуються критерії

подібності. Фізичні параметри вибираються за температурою зовнішнього потоку T_0 (індекс «0»). Виняток становить число Pr_w , яке обчислюється за температурою стінки в даному перерізі.

Тертя і тепловіддача в турбулентному граничному шарі. Рівняння турбулентного пограничного шару, що відповідає рівнянням (3.62) - (3.64) для ламінарного пограничного шару, мають наступний вигляд:

$$\rho c_p \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho c_p \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\lambda + \lambda_m) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right), \quad (3.82)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho c_p \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Співставляючи рівняння руху та енергії для ламінарного та турбулентного пограничних шарів, відзначаємо, що в останніх з'явилися додаткові члени: турбулентне дотичне напруження:

$$\mu_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\overline{\rho u'v'} = \tau_m \quad (3.84)$$

і тепловий потік, обумовлений дією турбулентної теплопровідності:

$$\lambda_m \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = -c_p \overline{\rho v' T'} = q_m. \quad (3.85)$$

Величини μ_m , λ_m , що є турбулентними аналогами динамічного коефіцієнта в'язкості і коефіцієнта теплопровідності, мають складні залежності від швидкості і температури в пограничному шарі. На відміну від ламінарних коефіцієнтів перенесення, що є функціями стану газу, турбулентні характеристики залежать від режиму його перебігу. Щоб вирішити систему рівнянь турбулентного пограничного шару (з відповідними граничними умовами), її необхідно доповнити деякими співвідношеннями, які пов'язували б турбулентні дотичне напруження і турбулентний тепловий потік відповідно зі швидкістю та температурою. Однією з найбільш поширених теорій турбулентності є напівемпірична теорія турбулентності Прандтля, згідно з якою

$$\tau_\delta = -\rho \bar{l}^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (3.86)$$

$$q_\delta = -c_p \rho \bar{l}^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy}, \quad (3.87)$$

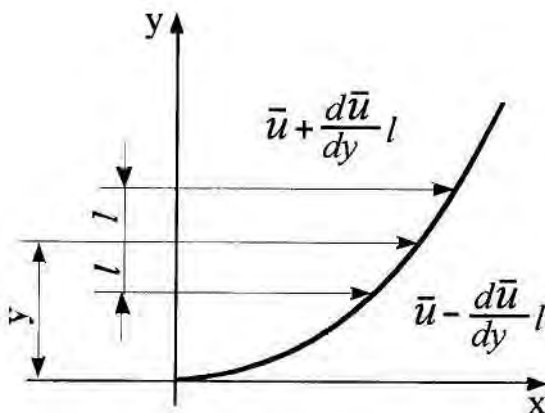


Рисунок 3.3 - До визначення дотичного напруження τ_m в турбулентному пограничному шарі

Тут \bar{l} - довжина шляху змішування (рис. 3.3).

Відзначимо, що довжина шляху змішування - величина змінна, вона залежить від координати y . Для випадку без градієнтної течії вздовж пластини ($dp/dx=0$) була встановлена наступна залежність $\bar{l} = \delta \delta_0$, де δ_0 - константа, яка

визначається експериментально. Для більш складних течій ($dp/dx \neq 0$) функціональна залежність $l = l(y)$ може бути іншою і містити кілька констант.

Розглянемо спрощену схему турбулентного пограничного шару, згідно з якою в турбулентному граничному шарі є в'язкий ламінарний підшар, що переходить у турбулентну течію.

При такій постановці задачі з ціллю спрощення не враховується буферний шар, який існує між ламінарним підшаром і турбулентним шаром. Аналогічну структуру приймають і для теплового пограничного шару.

Оскільки товщина в'язкого підшару дуже мала, швидкість течії в ньому приймається лінійно залежною від координати y . Аналогічно в тепловому підшарі, де перенесення теплоти здійснюється головним чином за рахунок теплопровідності, температура лінійно залежить від координати y .

Нехай на границі ламінарного підшару (динамічного та теплового) і власне турбулентного шару значення швидкості і температури рівні u_r, \dot{O}_r .

Тоді для динамічного і теплового підшару запишемо:

$$\tau_s = \mu \frac{u_r}{\delta_i}, q_s = \lambda \frac{\theta_r}{\delta_{m_i}}. \quad (3.88)$$

З цих рівнянь випливає, що

$$q_s = \tau_s \frac{\lambda \theta_r \delta_i}{\mu u_r \delta_{m_i}}, \quad (3.89)$$

де $\theta_r = \dot{O}_r - \dot{O}_w$.

Для турбулентної частини пограничного шару з рівнянь (3.86), (3.87) маємо наступний вираз:

$$q_m = \tau c_p \frac{\frac{d\bar{T}}{dy}}{\frac{d\bar{u}}{dy}}. \quad (3.90)$$

Інтегруючи вираз (3.90), приходимо до співвідношення:

$$q_m = \tau c_p \frac{T_0 - T_r}{u_0 - u_r}. \quad (3.91)$$

На границі теплового підшару $\dot{o} = \delta_{m_i}$ втрат теплоти немає, тому значення q_w та q_m співвідношень (3.89) і (3.91) можна прирівняти.

При цьому не беремо до уваги різницю значень дотичного напруження в рівняння (3.89) і (3.91), тобто покладемо $\tau = \tau_w$. Тоді з виразів (3.89), (3.91) маємо:

$$T_r - T_w = \frac{q_s \mu}{\tau_s \lambda} u_r \frac{\delta_{m_i}}{\delta_i}, \quad \dot{O}_0 - \dot{O}_i = \frac{q_s u_0}{\tau_s c_p} u_0 \left(1 - \frac{u_r}{u_0} \right).$$

Підсумовуючи ці співвідношення, одержуємо

$$T_r - T_w = \frac{q_s u_0}{\tau_s c_p} \left(1 + \frac{\mu c_p u_r \delta_{m_i}}{\lambda u_0 \delta_i} - \frac{u_r}{u_0} \right). \quad (3.92)$$

Значення швидкості u_r на границі в'язкого підшару і власне турбулентного шару визначають за допомогою логарифмічного розподілу осередненої швидкості в пристінній турбулентній частині пограничного шару:

$$u_{\bar{A}} = 12 \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}. \quad (3.93)$$

Приймаючи відношення товщини теплового та в'язкого підшару аналогічним відношенню товщини шарів у випадку ламінарної течії в пограничному шарі і підставляючи в рівність (3.92) значення $u_r, \frac{\delta_{m_i}}{\delta_i}$ з виразів (3.93), (3.77), отримуємо:

$$q_s = \frac{\tau_s c_p (T_0 - T_w)}{u_0 \left[1 + \frac{12}{u_0} \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} (Pr^{2/3} - 1) \right]}. \quad (3.94)$$

Дотичне напруження на стінці визначають за допомогою коефіцієнта тертя, що обчислюється за формулою (3.73).

Підставивши (3.73) в (3.94) і розділивши обидві частини рівняння (3.94) на $\rho c_p u_0 (T_0 - T_w)$, отримаємо:

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_0} = \frac{\frac{c_f}{2}}{1 + \frac{12}{u_0} \sqrt{\frac{c_f}{2}} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (3.95)$$

Вираз $St = \frac{\alpha}{\rho c_p u_0}$ називають критерієм Стантона. З критеріями Re , Nu ,

Pr його пов'язує наступне співвідношення:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr}.$$

При $Pr = 1$ співвідношення (3.95) приймає дуже простий вигляд:

$$St = \frac{c_f}{2}. \quad (3.96)$$

Співвідношення (3.96) є математичним виразом аналогії перенесення кількості теплоти і кількості руху при $Pr = Pr_T = 1$.

Таким чином, використання аналогії перенесення теплоти та кількості руху дозволяє визначити коефіцієнт тепловіддачі при рішенні гідродинамічної задачі, тобто критерій Nu визначається зі співвідношення (3.95) за відомим коефіцієнтом тертя без розв'язання теплової задачі.

Експерименти показують, що коефіцієнт тепловіддачі залежить від режиму обтікання газовим потоком (ламінарного або турбулентного), його температури, температурного напору та напрямку теплового потоку, що є функцією температури.

Велике значення має зміна в'язкості газу в пограничному шарі. При малих швидкостях газового потоку великий вплив на тепловіддачу має природна конвекція.

В даний час вплив усіх цих факторів на тепловіддачу теоретичним шляхом встановити неможливо, тому розрахунок конвекційної тепловіддачі зазвичай проводять за експериментальними формулами.

Результати експериментального дослідження тепловіддачі при вимушеному русі газового потоку вздовж пластини.

В результаті проведених досліджень [11, 40, 75] для розрахунку локальних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі пластини, що поздовжньо обтікається газовим потоком (дозвуковий режим обтікання) і при ламінарному режимі в пограничному шарі, була отримана наступна емпірична формула (для $Re_{0,x} < 4 \cdot 10^4$):

$$Nu_{0,x} = 0,33 Re_{0,x}^{0,5} Pr_0^{0,33} \left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25}. \quad (3.97)$$

Середнє значення безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі пластини отримується інтегруванням по поверхні пластини виразу (3.97):

$$\overline{Nu}_{0,L} = 0,66 Re_{0,L}^{0,5} Pr_0^{0,43} \left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad (3.98)$$

де $L = l_0 - l_1$ довжина пластини (див. рис. 3.2).

Експерименти показують, що коефіцієнт тепловіддачі пластини при нагріванні газовим потоком більше, ніж при охолодженні.

При цьому вплив напрямку теплового потоку враховується множителем $\left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25}$, який, зокрема для повітря приблизно дорівнює одиниці.

Враховуючи, що для повітря $Pr_0 = 0,71$, отримуємо: $\overline{Nu}_{0,L} = 0,57 Re_{0,L}^{0,5}$.

Для визначення локальних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі пластини, що поздовжньо обтікається газовим потоком з дозвуковою швидкістю і для турбулентного режиму обтікання, було отримано наступний вираз (при $Re_{0,x} > 4 \cdot 10^4$) [11, 40, 75]:

$$Nu_{0,x} = 0,03 Re_{0,x}^{0,8} Pr_0^{0,43} \left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25}. \quad (3.99)$$

Середнє значення вказаного коефіцієнта теплообміну має вигляд:

$$\bar{Nu}_{0,L} = 0,037 Re_{0,L}^{0,8} Pr_0^{0,43} \left(\frac{Pr_0}{Pr_w} \right)^{0,25} \quad (3.100)$$

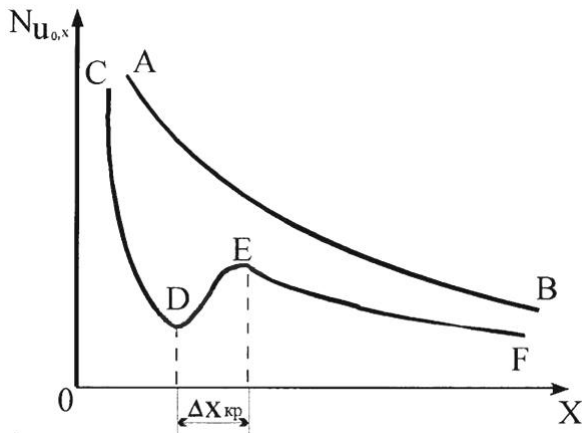


Рисунок 3.4 - Зміна коефіцієнта тепловіддачі вздовж пластини: АВ - повністю турбулентна течія в пограничному шарі; CDEF - змішана течія в пограничному шарі (CD-ламінарна, DE - перехідна, ED-турбулентна); $\Delta X_{кр}$ - область переходу від ламінарної течії до турбулентності

При цьому, також як і раніше, індекси «0», «w» і «0, L» означають, що параметри обчислюються відповідно при температурах T_0 , T_w , T_0 й усереднюється по всій довжині пластини.

На рис. 3.4 показано зміну коефіцієнта тепловіддачі вздовж пластини.

З графіків рис. 3.4 видно, що за наявності на передній частині пластини ламінарного пограничного шару коефіцієнт тепловіддачі змінюється за складним законом (крива CDEF).

В цьому випадку середню тепловіддачу необхідно розраховувати окремо для кожної ділянки з різними режимами течії. При цьому область переходу $\Delta X_{кр}$ не можливо визначити досить точно. Тому в інженерних теплових розрахунках приймають, що перехід з ламінарного режиму до турбулентного відбувається при певному X , тобто відрізок $\Delta X_{кр}$ замінюють точкою $X_{кр}$

3.4 Зв'язані задачі конвекційного теплообміну між газовим потоком та стінкою

Характеристики конвекційного теплообміну істотно залежать від граничних умов на стінці, які, у свою чергу, залежать від геометричних розмірів і теплофізичних властивостей обтічного тіла, а також властивостей

газового потоку. Весь цей взаємозв'язок дозволяє врахувати так звана спряжена постановка завдань теплообміну, яка, на відміну від традиційного підходу, передбачає визначення температурного поля в стінці і рідині в результаті спільного рішення рівнянь енергії з рівняннями руху. При такому підході важливим є питання про граничні умови на поверхні розділу «газ – тіло».

При аналізі сполучених завдань конвекційного теплообміну необхідно виділити два великих класи завдань: внутрішні і зовнішні. Перші постановки внутрішніх сполучених завдань відрізнялися цілою низкою істотних спрощених припущень [78, 90, 96, 108].

Розглядалися газові потоки з постійною витратою в каналі постійного поперечного перерізу. Передбачалося, що температура газу на його поперечному перетині і по товщині стінки, теплофізичні характеристики газу і матеріалу стінки постійні, немає внутрішніх джерел теплоти. Теплопередача вздовж газового потоку і стінки за рахунок теплопровідності вважалася дуже малою в порівнянні з теплопередачею від газу до стінки. Таким чином, спряженість температурних полів стінки і газового потоку враховувалася за допомогою граничної умови III роду, які включались в праву частину рівнянь енергії для газу та теплопровідності для стінки.

У такій постановці задача вважалася спряженою в тому сенсі, що температури газу і стінки визначаються в результаті спільного розв'язку рівнянь енергії та теплопровідності.

Ця постановка прийнятна, коли температура стінки постійна в перерізі, що можливо лише у винятковому випадку нескінченно великої теплопровідності твердого тіла при нескінченно малій його товщині.

Реальній фізичній ситуації відповідають цілком певні теплопровідність і товщина стінки. Попереднє завдання температури стінки неможливе і у випадку високо інтенсивного теплообміну.

Тому закон залежності температури стінки від координат і від часу має бути отриманий шляхом спільного рішення рівнянь теплоперенесення в

газовому потоці і твердому тілі з рівняннями руху, причому розв'язок необхідно проводити за допомогою граничних умов IV роду.

При такій постановці задачі враховується взаємний тепловий вплив тіла і газу, в результаті чого теплообмін виявляється залежним від властивостей тіла, його теплофізичних характеристик, розмірів, розподілу джерел в тілі.

В даний час сполученими називають завдання конвекційного теплообміну з граничними умовами IV роду на межі розподілу твердого тіла і теплоносіїв.

Розв'язок сполучених задач конвекційного теплообміну викликає великі математичні труднощі, що змушує йти на спрощення, які часто роблять розв'язану задачу далекою від поставленої.

Тому розробка методів рішення сполучених задач є одним з напрямів, що забезпечують ефективність і надійність інженерних розрахунків різних теплообмінних систем.

Критерій спряженості. При розгляді задач конвекційного теплообміну виникає питання про те, за яких умов їх можна вирішувати традиційним шляхом без урахування теплопровідності тіл, що обтікаються газовим потоком, а в яких випадках задачі мають вирішуватися в спряженій постановці.

У роботі [11] було показано, що критерієм спряженості задач конвекційного теплообміну є величина, пропорційна відношенню теплового навантаження шару газового потоку до термічного опору стінки твердого тіла, названа критерієм Брюно.

Розв'язок задач в спряженій постановці припускає завдання на границі розділу «газ – тіло» замість граничних умов III роду граничних умов IV роду, тобто:

$$-\lambda_r \left(\frac{\partial T_r}{\partial y} \right)_s = -\lambda_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial y} \right)_s ; \quad (3.101)$$

$$(T_r)_s = (T_w)_s , \quad (3.102)$$

де індекси «r» і «w» позначають відповідно газ і стінку (тверде тіло), індекс «s» - поверхня тіла; координатна вісь у спрямована перпендикулярно до поверхні тіла.

Гранична умова (3.101) може бути замінена наближеним співвідношенням:

$$\frac{(\Delta T_w)_b}{(\Delta T_r)_{\delta'_m}} = \frac{\lambda_r}{\lambda_w} \frac{b}{\delta'_m}, \quad (3.103)$$

де b - товщина стінки; δ'_m - умовна товщина теплового пограничного шару.

З формули (3.103) витікає, що відношення перепаду температури по товщині стінки $(\Delta T_w)_b$ до перепаду температури в пограничному шарі газового потоку $(\Delta T_r)_{\delta'_m}$ залежить не тільки від відношення коефіцієнтів

теплопровідності газу і стінки $\frac{\lambda_m}{\lambda_w}$, але і від відношення товщини стінки до

умовної товщині теплового пограничного шару $\frac{b}{\delta'_m}$. Слід зазначити, що

апроксимація теплового потоку на поверхні твердого тіла:

$$-\lambda_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial y} \right)_s = \frac{\lambda_c (\Delta T_w)_b}{b} \quad (3.104)$$

справедлива тільки у випадку лінійного розподілу температури вздовж товщини стінки. Лінійний закон зміни температури справедливий при малій товщині або при дуже великих значеннях коефіцієнтів теплопровідності тіла (передбачається також, що внутрішні джерела тепла (стоки тепла) відсутні).

У випадку лінійного вздовж товщини стінки розподілу температури в формулу (3.104) вводять поправочний множник $\bar{\varepsilon}$, що є однозначною функцією $\frac{(\Delta T_w)_b}{b}$, який враховує спотворення температурного профілю.

Вираз (3.104) при цьому приймає наступний вигляд:

$$\left(\frac{\partial T_c}{\partial y} \right)_s = \bar{\varepsilon} \frac{(\Delta T_w)_b}{b}, \quad (3.105)$$

Введемо величину

$$(\Delta\theta)_b = \frac{(\Delta T_w)_b}{(\Delta T_w)_{\delta'_m}}, \quad (3.106)$$

яка називається відносним перепадом температури вздовж товщини стінки. З урахуванням (3.99), (3.106) співвідношення (3.103) прийме вигляд:

$$(\Delta\theta)_b = \varepsilon \frac{\lambda_r b}{\lambda_w x} \left(\frac{x}{\delta'_m} \right), \quad (3.107)$$

де $\theta = \frac{T - T_0}{u_0^2 / 2c_p}$.

Звідси видно, що умови постійності температури на поверхні тіла відповідають нескінченно великій теплопровідності стінки ($\lambda_w \gg \lambda_r$), що призводить до нескінченно малого перепаду температури $(T_w)_b \rightarrow 0$.

При $(\Delta\theta)_b < 0,01$ перепадом температури в стінці з точністю до 1% можна знехтувати і вважати її температуру постійної $(T_w)_s = const$.

Співвідношення (3.107) показує, що відносний перепад температури в стінці залежить не тільки від ставлення коефіцієнтів теплопровідності, товщини стінки, а й від товщини умовного теплового пограничного шару δ'_m , який, у свою чергу, залежить від швидкості руху газу, його в'язкості і змінюється вздовж напрямку руху (уздовж осі x).

З теорії пограничного шару відомо, що величина $\frac{x}{\delta'_m}$ дорівнює локальному числу Нуссельта:

$$Nu_x = \frac{x}{\delta'_m} = A_x Pr^m Re_x^n, \quad (3.108)$$

де A_x , m та n - постійні.

Підставляючи співвідношення (3.108) в (3.107), отримаємо

$$(\Delta\theta)_b = A_x \varepsilon \frac{b \lambda_r}{x \lambda_w} Pr^m Re_x^n. \quad (3.109)$$

Таким чином, відносний перепад температури $(\Delta\theta)_b$ є однозначною функцією безрозмірної величини $\frac{\lambda_r}{\lambda_{\bar{n}}} Pr^m Re_n^x$, і називається числом Брюна:

$$(\Delta(\theta)_b) = f(Br_x), \quad (3.110)$$

де

$$Br_x = \frac{\lambda_r b}{\lambda_w x} Pr^m Re_n^x \quad (3.111)$$

- локальне число Брюна, є критерієм спряженості.

При малих числах Брюна ($Br_x < Br_{xmin}$) завдання конвекційного теплообміну можна вирішувати без урахування сполучення температурних полів рідини і тіла. Величину Br_{xmin} визначають на основі оцінки точних аналітичних рішень деяких модельних задач, а також експериментальним шляхом. З співвідношення (3.111) видно, що значення Br_x буде залежати від режиму руху газового потоку (ламінарного або турбулентного). Для ламінарної течії $m = 1/3$ і $n = 0,5$, для турбулентної - $n = 0,2$. Для газів значення Br_x зазвичай не перевищує 0,001 (для $b/x \approx 0,1 \dots 0,001$).

При $Br_x < 0,02$ результати спряженого і неспряженого розв'язків співпадають з точністю до 1%. Оскільки, зазвичай, при проведенні теплотехнічних розрахунків допустима велика величина похибки (до 5-10%), допустиме значення числа Брюна може бути істотно збільшене.

Постановка сполучених крайових задач конвекційного теплообміну.

Сполучена постановка завдань конвекційного теплообміну в загальному випадку передбачає спільне рішення рівнянь нерозривності, руху і енергії для потоку і теплопровідності для стінки, при цьому на межі розділу газ - тверде тіло задаються граничні умови IV роду (рівність температур теплоносія і стінки і густин теплових потоків у теплоносії і стінці).

Розглянемо, наприклад, систему диференціальних рівнянь, описуючих нестационарний пов'язаний теплообмін у каналі довільного поперечного перетину.

Рівняння нерозривності, газу та енергії для теплоносія такі:

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_r \vec{W}_r) = 0, \quad (3.112)$$

$$\rho_r \left[\frac{\partial \vec{W}_r}{\partial t} + (\vec{W}_r, \operatorname{grad}) \vec{W}_r \right] = \vec{F} - \operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div}(\mu_r S_r) - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu_r \operatorname{div} \vec{W}_r), \quad (3.113)$$

$$\rho_r C_r \left[\frac{\partial T_r}{\partial t} + (\vec{W}_r, \operatorname{grad} T_r) \right] = \operatorname{div}(\lambda_r \operatorname{grad} T_r) + \frac{dp}{dT}. \quad (3.114)$$

Рівняння теплопровідності для стінки:

$$\rho_w C_w \frac{dT_w}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_w \operatorname{grad} T_w) + q_v. \quad (3.115)$$

Умови сполучення на границі розділу газовий потік - стінка:

$$((T_r)_s = (T_w)_s, \quad (3.116)$$

$$-\lambda_r \left(\frac{\partial T_r}{\partial n} \right)_s = -\lambda_w \left(\frac{\partial T_w}{\partial n} \right)_s. \quad (3.117)$$

Граничні умови для газового потоку і стінки у вхідному, вихідному перерізах, а також на площині симетрії (якщо вона є) залежать від конкретного завдання

Теоретичне рішення нестационарних тривимірних сполучених задач для більшості практично важливих випадків є дуже складними і громіздкими. Тому в інженерній практиці широке розповсюдження отримав метод розрахунку, заснований на одновимірному способі опису процесів у каналі.

Припускають, що швидкість і температура постійні вздовж перерізу каналу і можуть змінюватися лише за довжиною каналу (вісь x). В якості швидкості беруть середньовитратну швидкість:

$$\bar{u} = \frac{G}{\rho F}, \quad (3.118)$$

де G - масова витрата; F - площа поперечного перерізу каналу, а в якості температури – середньо масову температуру в даному перерізі (припускається, що $c_p = \text{const}$):

$$\bar{T} = \frac{\int u T \rho dF}{\int u \rho dF}. \quad (3.119)$$

Зв'язок між середньо масовою температурою теплоносія, щільністю теплового потоку через одиницю площі поверхні стінки q_s і температурою стінки T_s виражається співвідношенням:

$$q_s = \alpha (T_s - \bar{T}), \quad (3.120)$$

де α - місцевий коефіцієнт тепловіддачі, що враховує реальні процеси, що відбуваються в тривимірній течії і визначає теплообмін зі стінкою при одновимірному описі цих процесів.

У розглянутій одномірній теорії рівняння конвекційного теплообміну істотно спрощуються.

Рівняння руху:

$$\frac{G}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial T} + G \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = F \bar{\rho} F_x - F \frac{\partial p}{\partial x} - s \frac{\bar{\rho} \bar{u}^2}{2d_e} F, \quad (3.121)$$

де F_x - проекція щільності масових сил на вісь x ;

$$\xi = - \frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2d_e} F}, \quad (3.122)$$

де ξ - місцевий коефіцієнт гідравлічного опору;

$$d_e = \frac{4F}{\bar{I}}, \quad (3.123)$$

де d_e - еквівалентний діаметр каналу; \bar{I} - периметр каналу; $\bar{\rho}$ - середня густина рідини, віднесена до \bar{O} і p в перерізі x .

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} F + \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \quad (3.124)$$

Рівняння енергії:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial t} F \bar{\rho} = \bar{I} q_s + F \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{\text{еб}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + F \frac{dp}{dt} + F \bar{T} \sigma_s \quad (3.125)$$

де $\lambda_{\text{еб}}$ - середній вздовж перерізу ефективний коефіцієнт теплопровідності в напрямку осі x ; σ_s - виробництво ентропії в одиниці об'єму за рахунок в'язкого тертя.

Нехтуючи в рівнянні (3.125) трьома останніми членами в правій частині, які для більшості випадків набагато менше першого члена, приходимо до вираження виду:

$$\frac{G}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + G \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \dot{I} \alpha (T_s - \bar{T}), \quad (3.126)$$

де $\bar{T} = \int_F \frac{\rho I u dF}{G}$ - середньомасова ентальпія потоку.

Часто відношення dp/dx мале (безградієнтна течія) і процес можна вважати ізобарним. Тоді для ізобарного процесу будь-якого газу і для будь-якого процесу ідеального газу (з рівнянням стану $p = \rho RT$) з термодинаміки маємо $\bar{T} = c_p dT$.

У цьому випадку рівняння (3.125) прийме вигляд:

$$\frac{G c_p}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + G c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \dot{I} \alpha (T_\omega - \bar{T}). \quad (3.127)$$

Математичне спрощення задачі при одномірній постановці досягається введенням коефіцієнтів тепловіддачі та гідравлічних втрат, які складним чином пов'язані з реальним тривимірним перебігом і не можуть бути визначені в одномірній теорії. Їх знаходять або експериментально, або з розв'язку наведеної вище тривимірної системи рівнянь за допомогою визначень (3.119), (3.121). Очевидно, що одновимірний спосіб опису не є всеосяжним. Більш загальною та суворою є тривимірна сполучена постановка, реалізація якої можлива лише за допомогою чисельних методів, орієнтованих на застосування швидкодіючих ПЕОМ.

3.5 Теплообмін при русі газів з великими швидкостями

Суттєвою особливістю процесу теплообміну в цьому випадку є виникнення при обтіканні поверхонь тіл значних градієнтів швидкості,

наслідок яких - великі сили тертя. У свою чергу, робота сил тертя переходить у теплоту, і в пограничному шарі виділяється значна кількість теплової енергії (процес дисипації). Таким чином, при вирішенні рівняння енергії для високошвидкісних потоків газів, що стискаються не можна нехтувати дисипативним членом, внесок якого в загальний тепловий баланс є дуже суттєвим. Теплові потоки, що виділяються за рахунок дії сил тертя в пограничному шарі, наприклад при обтіканні літаючого апарату, що проходить з великою швидкістю щільні шари атмосфери, настільки великі, що без спеціальних теплозахисних покриттів настає руйнування корпусу апарату внаслідок перегріву обшивки, що приводить до значних термічних напружень. На практиці для оберігання корпусів літальних апаратів від руйнування застосовуються різні покриття, матеріали яких мають низькі теплофізичні характеристики.

Крім цього, високошвидкісні газові потоки, як правило, мають надзвукову швидкість ($M > 1$, $M = U/a^*$ (число Маха) - безрозмірна швидкість потоку вздовж обдуваної поверхні; a^* - швидкість звуку). При цьому понадзвукові потоки поділяють на надзвукові ($1 < M < 6$) і гіперзвукові ($M > 6$). Для правильного розрахунку процесів теплообміну при течії газів з великими швидкостями суттєвого значення набуває аналіз тепловіддачі в пограничному шарі, який має тут свої особливості. Визначимо зміни температури в передній критичній точці тіла, що обтікається адіабатним потоком (рис. 3.5).

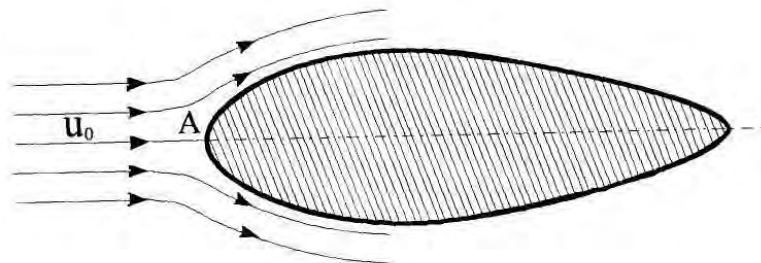


Рисунок 3.5 - Схема обтікання тіла газовим потоком: A - передня критична точка тіла, в якій швидкість потоку, що набігає $U_A = 0$; U_0 - швидкість потоку далеко від тіла

Підвищення температури $\Delta T_{\dot{a}\dot{a}} = \dot{O}_A - \dot{O}_0$ (індекс «0» означає, що параметра береться далеко від тіла, тобто в незбуреному потоці, а індекс «A» - у розглянутій критичній точці A) визначається підвищенням тиску відповідно від P_0 до P_A .

Вважаючи течію стаціонарною, а також нехтуючи теплопровідністю і силами тертя, що в даному випадку цілком припустимо, так як визначальною є стиснення потоку, приходимо до спрощеного рівняння енергії [11, 75]:

$$\rho \tilde{n}_p u \frac{dT}{ds_T} = u \frac{dp}{ds_T}, \quad (3.128)$$

де s_T - координата,

Після найпростіших перетворень та інтегрування вздовж лінії струму отримуємо:

$$c_p (T - T_0) = \int_{s_{T0}}^{s_T} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds_T = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (3.129)$$

Крім того, згідно рівнянню Бернуллі, для стиснення газу маємо [2, 47]:

$$\frac{u^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} \frac{dp}{\rho} = \frac{u_0^2}{2}. \quad (3.130)$$

Останнє рівняння можна представити в наступному вигляді:

$$\frac{u^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{u_0^2}{2}$$

звідки

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} (u_0^2 - u^2). \quad (3.131)$$

Підставляючи отримане значення інтеграла у співвідношення (3.129), отримуємо:

$$T = T_0 + \frac{1}{2c_p} (u_0^2 - u^2). \quad (3.132)$$

Температура досягає свого максимуму в критичній точці A, де відбувалося повне гальмування потоку. З урахуванням $u = 0$ з (3.132):

$$T_A = T_0 + \frac{u_0^2}{2c_p}. \quad (3.133)$$

Температура T_A називається температурою гальмування. З урахуванням відомих співвідношень термодинаміки [2, 75] температура гальмування може бути виражена через число Маха для набігаючого потоку:

$$\frac{T_A}{T_0} = 1 + \frac{k-1}{2} M_0^2, \quad (3.134)$$

де $k = C_p / C_v$ - показник адіабати; $M_0 = u_0 / a^*$.

Відзначимо, що повністю адіабатичний потік в реальних умовах неможливий, в ньому завжди присутній процес обміну механічної і теплової енергії між суміжними шарами газу. Цей процес відбувається і в межах поверхні, навіть якщо вона тепло ізольована.

У результаті цього тепло ізольована поверхня тіла буде мати деяку температуру, що перевищує температуру незбуреного потоку, але не рівну температурі гальмування.

Цю температуру називають адіабатною, власною або рівноважною, і визначають за наступною формулою:

$$T_r = T_0 + \bar{r} \frac{u_0^2}{2c_p}, \quad (3.135)$$

де

$$\bar{r} = \frac{T_r - T_0}{T_A - T_0} \quad (3.136)$$

- коефіцієнт відновлення.

Коефіцієнт \bar{r} може приймати значення як більше, так і менше одиниці. Нерівність $\bar{r} < 1$ відповідає випадку, коли інтенсивність тепловиділення за рахунок роботи сил тертя переважає над тепловідведенням за рахунок конвекції і теплопровідності.

Якщо $\bar{r} > 1$ - переважає відведення теплоти. При $\bar{r} = 1$ $T_r = T_A$ є процеси виділення і відведення теплоти врівноважені і течія є адіабатна.

Згідно з експериментальними даними, при течії в ламінарному пограничному шарі:

$$\bar{r} = \sqrt{Pr}, \quad 0,5 \leq Pr \leq 5, \quad (3.137)$$

а в турбулентному пограничному шарі

$$\bar{r} = \sqrt[3]{Pr}. \quad (3.138)$$

Так як у високошвидкісному потоці градієнти температури в пограничному шарі великі, то зміни фізичних властивостей газу також значні. Тим не менше припустиме використання співвідношень для теплообміну, отриманих при постійних фізичних властивостях, тільки всі фізичні характеристики слід брати при наступній характеристичній температурі:

$$T^* = T_0 + 0,5 \cdot (T_w - T_0) + 0,22 \cdot (T_{\bar{r}} - T_0). \quad (3.139)$$

На рис. 3.6 показано, як впливає тепловіддача на зміну температури в пограничному шарі.

У разі тепло ізолюваної поверхні маємо $T_w > T_{\bar{r}}$ (крива 2). Крива 1 відповідає випадку, коли має місце теплопідведення з внутрішньої області тіла до його поверхні, тобто температура стінки перевищує адиабатну температуру $T_w > T_{\bar{r}}$. Криві 3, 4 відповідають випадку тепловідведення з поверхні всередину тіла, коли $T_w < T_{\bar{r}}$. Якщо тепловідведення

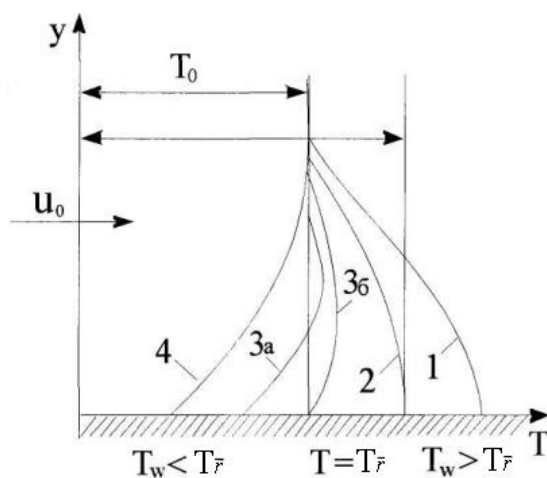


Рисунок 3.6 - Зміна температури в пограничному шарі високошвидкісного газового потоку при різних умовах

через поверхню домінує над виділенням теплоти за рахунок роботи сил тертя, то останні практично не впливають на формування температурного профілю в пограничному шарі, і розподіл температури за характером близький до випадкового, наприклад нестисливої рідини. Криві 3а, 3б відповідають випадку, коли тепловиділення за рахунок тертя значне, тому максимум температури досягається всередині пограничного шару. Відстань

від поверхні до точки максимуму температури визначається співвідношенням кількості теплоти, що виділяється силами тертя і що відводиться через поверхню тіла. Крива 3б ілюструє окремий випадок, коли $T_w = T_0$, але при цьому тепловий потік на поверхні відмінний від нуля. Цей приклад наочно показує, що виконання закону Ньютона-Ріхмана в традиційній формі для течій з більшими швидкостями неправомірно. Справді, відповідно до закону Ньютона-Ріхмана, $q_w = \alpha(T_0 - T_w)$. При $T_w = T_0$ $q_w = 0$, однак, як було показано вище, $q_w \neq 0$. Крім цього, з температурних профілів, які знаходяться між кривими 1 та 3б (див. рис. 3.6), випливає, що у високошвидкісному газовому потоці теплота може передаватися поверхні навіть у тому випадку, коли її температура вище температури незбуреного потоку. Це явище є наслідком інтенсивного тепловиділення за рахунок роботи сил тертя і називається аеродинамічним нагрівом.

Щоб при розрахунку тепловіддачі високошвидкісних газових потоків використовувати закон Ньютона-Ріхмана, в його формулу замість температури незбудженого потоку T_0 вводять адіабатні температуру $T_{\bar{r}}$:

$$q_w = \alpha(T_{\bar{r}} - T_w) = \alpha \left(T_0 + \bar{r} \frac{u_0^2}{2c_p} - T_w \right). \quad (3.140)$$

При швидкостях потоку, коли $\bar{r} \frac{u_0^2}{2c_p} \ll T_0$, ця формула призводить до закону Ньютона-Ріхман для нестисливого газу.

Згідно з результатами, отриманими в роботі [2], ця формула дає задовільні результати для $M < 20$ при $Pr = 0,65-0,75$. При цьому число Прандтля повинно визначатися за характерною температурою, що обчислюється за формулою (3.139).

Якщо теплообмін між поверхнею тіла і потоком газу супроводжується хімічними реакціями, то кількість переданої теплоти визначається вже не різницею температур, а різницею повних ентальпій газу. Тому замість виразу (3.140) тепловий потік розраховують за співвідношенням:

$$q_w = \frac{\alpha}{c_{p_c}} (I_{\bar{r}} - I_w), \quad (3.141)$$

де $I_{\bar{r}}, I_w$ - повні ентальпії газу при адіабатній температурі і температурі стінки, c_{p_c} - теплоємність газу при температурі стінки. Таким чином, співвідношення (3.141) дозволяє при розрахунку теплових потоків враховувати два основних фактора, що визначають процес нагрівання тіл при їх обтіканні високошвидкісними потоками: нагрівання газу в пограничному шарі і зміна його повної ентальпії внаслідок хімічних реакцій. Інші особливості цих процесів враховуються при визначенні коефіцієнта тепловіддачі.

Через складність розв'язання сполучених задач конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і надзвуковим потоком повітря, в даний час існує обмежене число аналітичних рішень цих задач [44, 78, 90], а чисельне рішення цих задач на комп'ютері наштовхується на великі складності обчислювального характеру (вибір стійких чисельних алгоритмів, режимів реального часу і т.д.) [17, 44, 107, 108].

Тому на практиці зазначені задачі частіше вирішують з використанням емпіричних формул для локальних коефіцієнт тепловіддачі α (або локальних теплових потоків q_w з пограничного шару на поверхню обтічного тіла) при різних режимах обтікання (ламінарний, турбулентний), отриманих на основі експериментальних даних з надзвукового обдування плоских і асиметричних тіл в аеродинамічних трубах [2, 40, 75, 87, 130]. Нагрівання обтічного тіла в цьому випадку розраховується відомими методами теорії теплопровідності (в основному, використовуються лінійні рівняння теплопровідності) з використанням граничних умов 2 роду на поверхні газ - тверде тіло (використовуються знайдені вирази для q_w) або 3 роду (використовуються знайдені вирази для α). При цьому відносна похибка зазначених методів рішення розглянутих задач збільшується з 5...10% до 10...15% [24, 44, 48, 76, 78].

Контрольні питання та завдання:

1. В чому полягає природа виникнення конвекційного руху речовин ?
2. Сформулювати основні принципи конвекційного теплообміну.
3. Перелічити основні режими руху речовини.
4. Вивести рівняння перенесення субстанції.
5. Вивести рівняння перенесення маси.
6. Вивести рівняння перенесення імпульсу.
7. Написати рівняння Нав'є-Стокса.
8. Дати визначення дивіатору напружень.
9. Вивести рівняння перенесення енергії.
10. Вивести рівняння осередненого турбулентного потоку.
11. Дати визначення динамічного та теплового пограничного шару.
12. Пояснити явища тертя та тепловіддачі в ламінарному та турбулентному пограничних шарах.
13. Перелічити критерії зв'язаності для задач конвекційного теплообміну між газовим потоком і стінкою.
14. В чому полягає постановка сполучених крайових задач конвекційного теплообміну ?
15. Пояснити явище теплообміну при русі газів з великими швидкостями.

**Розділ 4 РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДАМИ
ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є, МЕТОДОМ РОЗДІЛЕННЯ
ЗМІННИХ ТА МЕТОДОМ РОЗКЛАДУ ЗА ВЛАСНИМИ
ФУНКЦІЯМИ**

Методи інтегральних перетворень Фур'є, розділення змінних та розкладання за власними функціями є класичними аналітичними методами розв'язання задач теплопровідності для оптично прозорих тіл (необмежених, напівобмежених та обмежених), які широко використовуються для розрахунків температурних полів.

Основною перевагою цих методів є те, що вони дозволяють звести розв'язок суцільної вихідної задачі (рівняння теплопровідності в частковим похідних другого порядку), прямих аналітичних методів розв'язання якої на теперішній час немає, до простої задачі (звичайному диференціальному рівнянню першого або другого порядку для перетворення за Фур'є або декільком функціям), яка вже легко розв'язується стандартними методами. Загальний алгоритм використання методів інтегральних перетворень Фур'є наведений на рис.4.1.

4.1 Розв'язок одновимірних задач теплопровідності для необмежених та напівобмежених тіл методами інтегральних перетворень Фур'є

4.1.1 Розв'язок задач теплопровідності для необмежених тіл

Розв'язок задач теплоперенесення в необмежених тілах необхідні для оцінки теплових полів в різних виробках (наприклад, гострих кромках різальних інструментів, основ оптичних інтегральних схем, вікон видимості у виробках ІЧ-техніки та іншому [51, 52, 88]) при їхніх фізико-технічних методах обробки.

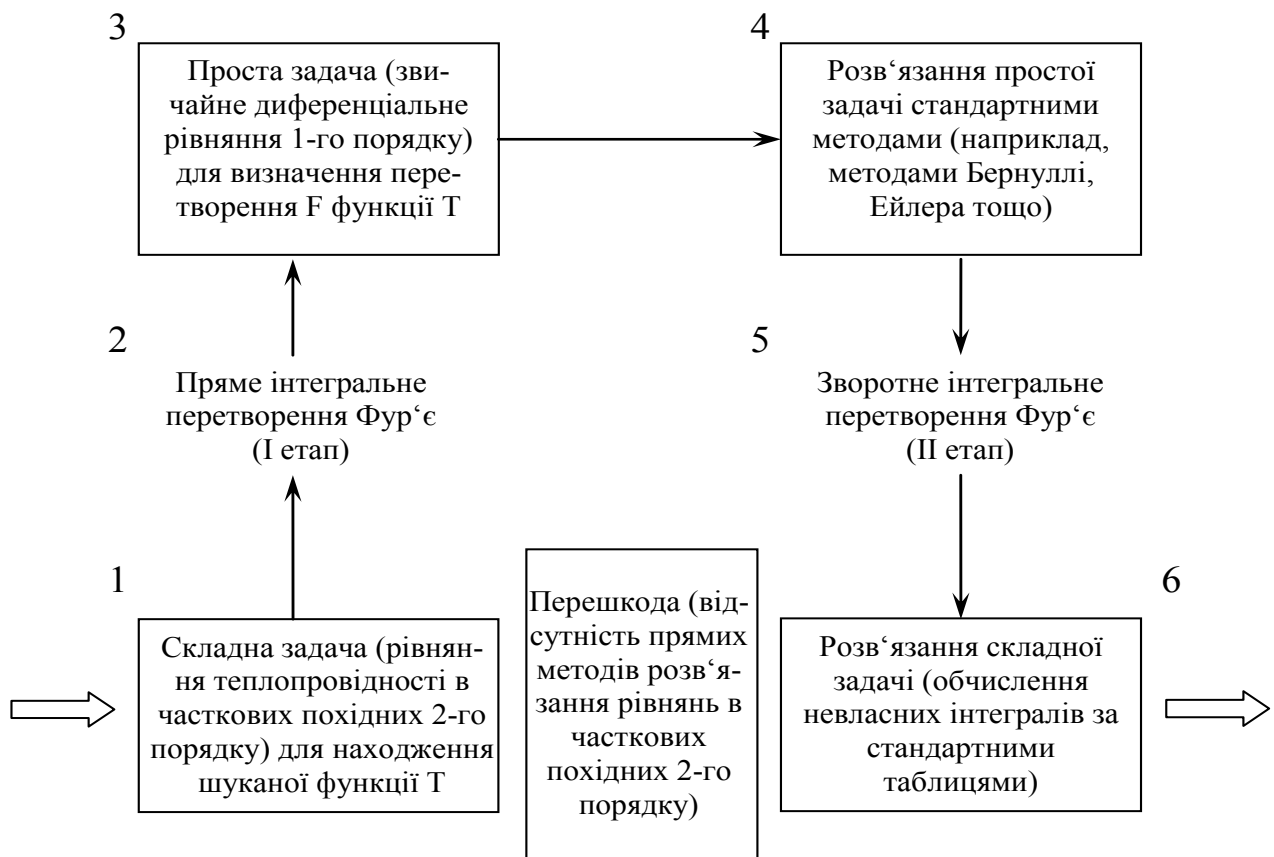


Рисунок 4.1 - Алгоритм застосування інтегральних перетворень Фур'є

До типових задач належать, наприклад, задачі охолодження оптичного виробу після його нерівномірної поверхневої обробки, тобто коли уздовж виробу в початковий момент часу заданий розподіл температур, а також задача нагріву виробу при впливі на нього деякого рухомого джерела тепла. При цьому, як правило, розглядаються випадки одновимірних нестационарних теплових полів. Застосуємо метод інтегральних перетворень Фур'є для розв'язку вказаних вище задач.

Задача 1

Процес охолодження виробу після його нерівномірної поверхневої обробки описується наступним рівнянням теплопровідності (рис. 4.2):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

$$-\infty < x < \infty, t > 0$$

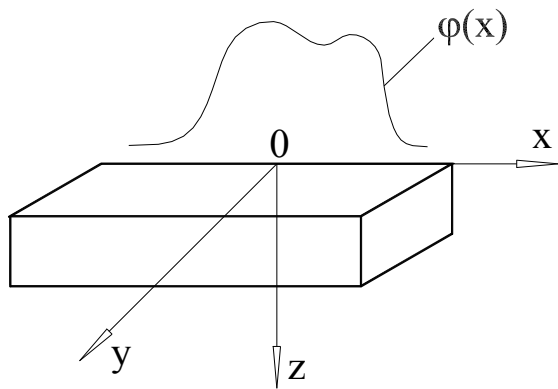


Рисунок 4.2 - Схема охолодження виробу з початковим розподілом температури $\varphi(x)$

і початковою умовою

$$T|_{t=0} = \varphi(x) \quad (4.2)$$

та граничними умовами: $T \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (4.3)$$

Потрібно, використовуючи метод інтегральних перетворень Фур'є, знайти загальний розв'язок задачі $T(x,t)$.

Розв'язок.

На першому етапі розв'язку задачі застосовується до функції $T(x,t)$ пряме перетворення Фур'є по змінній x :

$$T(x,t) \rightarrow F(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(u,t) e^{-i\omega u} du, \quad (4.4)$$

де $T(x,t)$ – оригінал (шукана функція); $F(\omega,t)$ – зображення для функції T ($-\infty < \omega < +\infty$ – деякий параметр).

Метою даного етапу є знаходження зображення $F(\omega,t)$ за допомогою перетвореної системи рівнянь (4.1) - (4.2) відповідно до формули (4.4). Використовуючи формули, аналогічні (4.4), отримуємо для лівої і правої частин рівняння (4.1), а також початкового (4.2) наступні перетворення Фур'є

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial t} e^{-i\omega u} du = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T e^{-i\omega u} du \right) = \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{dF}{dt}, \quad (4.5)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} e^{-i\omega u} du \right) \quad (4.6)$$

Застосовуючи до інтеграла, що стоїть в правій частині (4.6), двічі метод інтеграції по частинах і враховуючи граничні умови (4.3), отримуємо, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} e^{-i\omega u} du = -\omega^2 F. \quad (4.7)$$

Тоді,
$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow -a^2 \omega^2 F. \quad (4.8)$$

Для початкової умови (4.2) маємо:

$$\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{-i\omega u} du. \quad (4.9)$$

Таким чином, з врахуванням (4.5) - (4.9) для знаходження зображення $F(\omega, t)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку із змінними, що розділяються (замість диференціального рівняння в часткових похідних 2-го порядку для функції $T(x, t)$):

$$\frac{dF}{F} = -a^2 \omega^2 dt \quad (4.10)$$

з початковою умовою

$$F|_{t=0} = \bar{\phi}(\omega). \quad (4.11)$$

Розв'язок рівняння (4.10) з врахуванням (4.11) отримаємо прямою інтеграцією лівої і правої його частин:

$$F(\omega, t) = \bar{\phi}(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (4.12)$$

На другому етапі розв'язок задачі для знаходження шуканого вирішення $T(x, t)$ використовується зворотне перетворення Фур'є:

$$F(\omega, t) \rightarrow T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega. \quad (4.13)$$

Підставляючи (4.12) в (4.13), отримаємо:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}(\omega) e^{i\omega x - \omega^2 a^2 t} d\omega. \quad (4.14)$$

З урахуванням (4.9) для визначення $T(x, t)$ отримуємо наступний подвійний інтеграл:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) du \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} e^{i\omega(x-u)} d\omega \right)}_I. \quad (4.15)$$

Для обчислення внутрішнього інтеграла I скористаємося відомою формулою Ейлера:

$$e^{i\omega(x-u)} = \cos \omega(x-u) + i \sin \omega(x-u). \quad (4.16)$$

Отримаємо:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega(x-u) d\omega + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \sin \omega(x-u) d\omega}_{I'}. \quad (4.17)$$

Враховуючи, що $I' = 0$ (інтеграл від непарної функції з симетричними границями), маємо

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega(x-u) d\omega. \quad (4.18)$$

Вираз для інтегралів типу (4.18) можна знайти в довідниках [18]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.19)$$

Підставляючи (4.19) в (4.15), отримаємо наступний розв'язок вихідної задачі:

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du. \quad (4.20)$$

Як приклад використання формули (4.20) розглянемо окремий випадок із заданою функцією $\phi(x)$ у вигляді деякого прямокутного імпульсу:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x \geq 1, \\ 300, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.21)$$

де x – в м, $\phi(x)$ – в $^{\circ}\text{C}$.

Підставляючи (4.21) в (4.20), маємо

$$T(x,t) = \frac{150}{a\sqrt{t}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du. \quad (4.22)$$

Зведемо інтеграл, що стоїть в правій частині (4.18), до спеціальної функції (інтеграл помилок, інтеграл Лапласа, інтеграл вірогідності) [18]:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy, \quad (4.23)$$

значення якої при різних значеннях аргументу z можна знайти в довідковій

літературі. Для цього зробимо заміну змінних в інтегралі (4.22):

$$\frac{x-u}{2a\sqrt{t}} = \mu, \quad du = -2a\sqrt{t} d\mu. \quad (4.24)$$

Отримаємо:

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-1)/2a\sqrt{t}}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{300}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu - \int_0^{(x-1)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu \right]. \quad (4.25)$$

З врахуванням (4.23) отримуємо наступну формулу для розподілу температури в даному середовищі у будь-який момент часу:

$$T(x,t) = 150 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Задача 2.

Процес нагріву виробу рухомих джерелом теплової дії описується наступним рівнянням теплопровідності (рис.4.3, рухома система координат):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + V \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{q_v(x,t)}{c_v}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (4.27)$$

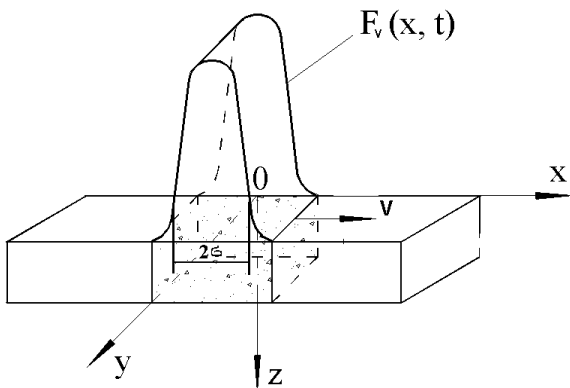


Рисунок 4.3 - Схема теплової дії рухомого джерела тепла на оброблюваний виріб

$\left(\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right)$ - розглядається одновимірне

нестационарне температурне поле $T(x,t)$: $\pm\delta$ - координати точок перегину на кривій

$$F_v(x, t) = \frac{q_v(x, t)}{C_v}$$

з початковою умовою

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (4.28)$$

і граничними умовами: $T \rightarrow T_0, \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0,$

$$q_v(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (4.29)$$

де V - швидкість руху джерела;

$q_v(x, t)$ - об'ємна щільність теплового потоку; T_0 - початкова температура виробу.

Потрібно, використовуючи метод інтегральних перетворень Фур'є, знайти загальний розв'язок задачі $T(x, t)$.

Розв'язок.

Шляхом відповідної заміни змінних приведемо систему рівнянь (4.27) - (4.29) до вигляду, зручного для використання методу інтегральних перетворень Фур'є при знаходженні розв'язку початкової задачі $T(x,t)$. Спочатку зробимо заміну:

$$\bar{O} = \dot{O} - \dot{O}_0. \quad (4.30)$$

Отримуємо

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x^2} + V \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{q_V(x,t)}{c_V}, \quad (4.31)$$

$$\bar{T}|_{t=0} = 0, \quad (4.32)$$

$$\bar{T} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \rightarrow 0, \quad q_V(x,t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (4.33)$$

Далі виключимо з рівняння (1.220) член $V \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$, зробивши заміну змінних

$$\bar{T}(x,t) = \theta(x,t) e^{-\frac{Vx}{2a^2} - \frac{V^2 t}{4a^2}}. \quad (4.34)$$

Підставляючи (4.34) в (4.31) - (4.33), отримуємо для функції наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \Phi(x,t), \quad (4.35)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (4.36)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \hat{O}(x,t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (4.37)$$

$$\hat{O}(x,t) = \frac{q_V}{c_V} e^{-\frac{Vx}{2a^2} - \frac{V^2 t}{4a^2}}. \quad (4.38)$$

Як і при розв'язанні *першої задачі*, для знаходження функції $\theta(\delta,t)$ на *1-му етапі* використовуємо пряме перетворення Фур'є по координаті x :

$$\theta(x,t) \rightarrow F(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u,t) e^{-i\omega u} du. \quad (4.39)$$

Також як і при розв'язанні попередньої задачі, знайдемо $F(\omega,t)$,

перетворюючи (4.35) - (4.37) відповідно до (4.39):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{dF}{dt}, \quad (4.40)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \rightarrow -a^2 \omega^2 F, \quad (4.41)$$

$$\hat{O}(x, t) \rightarrow \bar{O}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{O}(u, t) e^{-i\omega u} du. \quad (4.42)$$

Використовуючи (4.40)-(4.42), для знаходження $F(\omega, t)$ отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку, яке вже можна розв'язати одним із стандартних методів (наприклад, методами Бернуллі, Ейлера тощо) [18, 64].

$$\frac{dF}{dt} = -a^2 \omega^2 F + \bar{\Phi}(\omega, t), \quad (4.43)$$

$$F|_{t=0} = 0. \quad (4.44)$$

Знайдемо розв'язок (4.43) - (4.44) методом Бернуллі [18, 64]

$$F = m(t)n_1(t), \quad (4.45)$$

де $m(t)$ і $n_1(t)$ - дві невідомі функції, які знаходяться в процесі розв'язування (4.43) - (4.44). Підставляючи (4.45) в (4.43), отримуємо:

$$m'n_1 + mn'_1 + a^2 \omega^2 mn_1 = \bar{\Phi}(\omega, t), \quad (4.46)$$

$$m'n_1 + m(n'_1 + a^2 \omega^2 n_1) = \bar{\Phi}(\omega, t)$$

Функцію $n_1(t)$ знаходимо, спростивши (4.46):

$$\frac{dn_1}{dt} + a^2 \omega^2 n_1 = 0. \quad (4.47)$$

Інтегруючи (4.47) (константу в розв'язку опускаємо):

$$n_1(t) = e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (4.48)$$

Далі, знаходимо:

$$\frac{dm}{dt} = \bar{O}(\omega, t) e^{a^2 \omega^2 t}. \quad (4.49)$$

Звідки

$$m(t) = \int_0^t \bar{O}(\omega, \tau) e^{a^2 \omega^2 \tau} d\tau + c, \quad (4.50)$$

де c - деяка постійна. Підставляючи (4.1) в (4.6), отримуємо

$$F(\omega, t) = \int_0^t \bar{O}(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau + c e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (4.51)$$

З урахуванням початкової умови (4.5), остаточно, для $F(\omega, t)$ отримуємо наступний вираз:

$$F(\omega, t) = \int_0^t \bar{O}(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (4.52)$$

На другому етапі розв'язання задачі для знаходження оригіналу $\theta(x, t)$ скористаємося зворотним перетворенням Фур'є для функції $F(\omega, t)$.

$$F(\omega, t) \rightarrow \theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega. \quad (4.53)$$

Підставляючи (4.52) в (4.53), отримуємо:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{O}(u, \tau) e^{-i\omega u} du \right) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \right] e^{i\omega x} d\omega \right\}. \quad (4.54)$$

Згрупувавши інтеграли в (4.54) і розбивши їх на внутрішній і зовнішній, знаходимо:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \hat{O}(u, \tau) du d\tau \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} e^{i\omega(x-u)} d\omega}_{I'} \right]. \quad (4.55)$$

Також як і в попередній задачі, для знаходження внутрішнього інтеграла I' використовується (4.16) і довідкова література:

$$I' = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.56)$$

Підставляючи (4.56) в (4.55), отримуємо наступний розв'язок для функції $\theta(x, t)$:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{O}(u, \tau) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du \right]. \quad (4.57)$$

Використовуючи (4.50), (4.34) і (4.57), остаточно, для розв'язання

початкового завдання маємо:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{e^{-\frac{Vx}{2a^2} - \frac{V^2 t}{4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_V(u,\tau)}{c_V} e^{\frac{Vu}{2a^2} + \frac{V^2 \tau}{4a^2} - \frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du. \quad (4.58)$$

Розглянемо, як приклад, джерело тепла з нормально розподіленою об'ємною щільністю теплового потоку (електронний потік стрічкової форми, сфокусований потік йонів, лазерний промінь тощо [41-43, 71, 105, 114]):

$$q_V(x,t) = q_{V0} e^{-k_0 x^2}, \quad (4.59)$$

де q_{V0} - об'ємна щільність теплового потоку в центрі дії джерела; $k_0 = 1/2\delta^2$ (рис.4.3 - коефіцієнт зосередженості (гострота теплової дії) джерела тепла.

Підставляючи (4.59) в (4.58) і вважаючи, що p_0, k_0 - сталі величини, отримаємо наступний розв'язок задачі:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q_{V0}}{c_V} e^{-\frac{Vx}{2a^2} - \frac{V^2 t}{4a^2}} \int_0^t e^{\frac{V^2 \tau - 4a^2 k_0 X^2 - V[2x+V(t-\tau)]}{4a^2} - \frac{4a^2 [1+4a^2 k_0(t-\tau)]}{4a^2 [1+4a^2 k_0(t-\tau)]}} \frac{d\tau}{\sqrt{1+4a^2 k_0(t-\tau)}}. \quad (4.60)$$

4.1.2 Розв'язок задач теплопровідності для напівобмежених тіл

Розв'язок задач теплоперенесення в напівобмежених тілах необхідний для оцінки теплових полів вздовж глибини матеріалів при їх поверхневій обробці різними фізико-технічними методами. До типових задач належать, наприклад, задача нагріву матеріалів для випадків, коли на оброблюваній поверхні підтримується задана температура (граничні умови I роду) або заданий тепловий потік (граничні умови II роду), а також задача конвекційного охолодження в зонах дії при різних фізико-технічних методах обробки (граничні умови III роду). Окрім цього, для більшості практичних розрахунків, як правило, використовуються одновимірні, нестационарні рівняння теплопровідності.

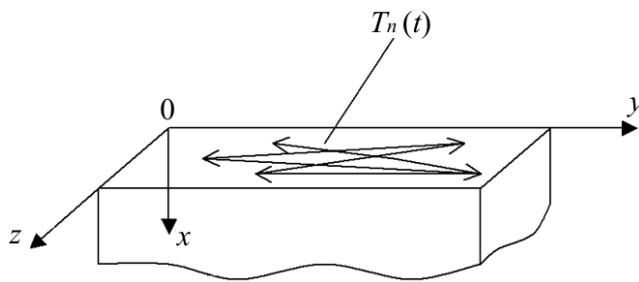
Використовуємо метод інтегральних перетворень Фур'є для розв'язування такого типу задач.

Задача 3.

Процес обробки виробу здійснюється таким чином, що температура оброблюваної поверхні залежить тільки від часу і дорівнює $T_n(t)$.

При цьому теплоперенесення у виробі описується наступним рівнянням теплопровідності з граничною умовою на поверхні I роду (рис.4.4):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < +\infty, \quad t > 0 \quad (4.61)$$



з початковою умовою

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (4.62)$$

і граничними умовами

$$T|_{z=0} = T_s(t), \quad (4.63)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0$$

$$\text{при } z \rightarrow +\infty, \quad (4.64)$$

Рисунок 4.4 - Схема нагріву виробу при багатоцикловому русі джерела тепла

$\left(\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right)$ - розглядається одновимірне

нестационарне температурне поле $T(z,t)$:

→ - можливі траєкторії багатоциклового руху джерела

Потрібно, використовуючи метод інтегральних перетворень Фур'є, знайти загальне розв'язання задачі $T(z,t)$.

Розв'язок

Зробимо заміну змінних:

$$\bar{O} = \dot{O} - \dot{O}_0. \quad (4.65)$$

Отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \quad (4.66)$$

$$\bar{T}|_{t=0} = 0, \quad (4.67)$$

$$\bar{T}|_{z=0} = \bar{T}_s(t), \quad (4.68)$$

$$\bar{T} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty, \quad (4.69)$$

де
$$\bar{T}_s(t) = T_s(t) - T_0. \quad (4.70)$$

Тепер для знаходження функції $\bar{T}(z,t)$ на I-му етапі розв'язування

задачі використовуємо пряме синус-перетворення Фур'є по координаті z :

$$\bar{T}(z, t) \rightarrow F_S(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{T}(u, t) \sin \omega u \, du. \quad (4.71)$$

Знайдемо $F_S(\omega, t)$ перетворюючи (4.66) - (4.69) у відповідно (4.71):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial F_S}{\partial t} \equiv \frac{dF_S}{dt}, \quad (4.72)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \rightarrow a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial u^2} \sin \omega u \, du. \quad (4.73)$$

Інтегруючи праву частину (4.73) двічі по частинам і враховуючи (4.68) та (4.69), отримаємо:

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \rightarrow -a^2 \omega^2 F_S + a^2 \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{T}_s(t). \quad (4.74)$$

Таким чином, система рівнянь (4.66) - (4.69) переходить в наступне звичайне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку для функції $F_S(\omega, t)$:

$$\frac{dF_S}{dt} = -a^2 \omega^2 F_S + a^2 \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{T}_s(t), \quad (4.75)$$

$$F_S|_{t=0} = 0. \quad (4.76)$$

Розв'язуємо (4.75) - (4.76) методом Бернуллі:

$$F_S = m_0(t) n_0(t). \quad (4.77)$$

Отримаємо для знаходження функції $n_0(t)$ диференціальне рівняння з роздільними змінними:

$$\frac{dn_0}{dt} = -a^2 \omega^2 n_0, \quad (4.78)$$

розв'язання якого має вигляд:

$$n_0(t) = e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (4.79)$$

Аналогічно, для функції $m_0(t)$:

$$\frac{dm_0}{dt} = a^2 \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{T}_s(t) e^{a^2 \omega^2 t}, \quad (4.80)$$

$$m_0(t) = a^2 \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \bar{T}_s(\tau) e^{a^2 s^2 \tau} d\tau + c, \quad (4.81)$$

де c – постійна.

Підставляючи (4.79) і (4.81) в (4.77) і враховуючи початкову умову (4.76), маємо:

$$F_s(\omega, t) = a^2 \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \bar{T}_s(\tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (4.82)$$

На другому етапі розв'язування задачі для знаходження оригіналу $T(z, t)$ використовуємо зворотнє синус-перетворення Фур'є для функції $F_s(\omega, t)$:

$$F_s(\omega, t) \rightarrow \bar{T}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega, t) \sin \omega x d\omega. \quad (4.83)$$

Підставляючи (4.82) в (4.83), отримаємо

$$\bar{T}(z, t) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \bar{T}_s(\tau) d\tau \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \sigma e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \sin \omega z d\omega}_I \right] \quad (4.84)$$

Внутрішній інтеграл I знаходимо методом інтеграції по частинам:

$$I = \frac{z}{2a^2(t-\tau)} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \cos \omega z d\omega. \quad (4.85)$$

З використанням довідкової літератури отримуємо:

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \cos \omega x d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.86)$$

Підставляючи (4.85) і (4.86) в (4.84) і враховуючи (4.65) і (4.70), знаходимо загальний розв'язок початкової задачі:

$$T(z, t) = T_0 + \frac{z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{T_s(\tau) - T_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (4.87)$$

Якщо прийняти у формулі (4.87) $T_s(t) = T_{nl}$ (температура плавлення матеріалу), тоді отримаємо:

$$T(z,t) = T_0 + \frac{(T_{i\infty} - T_0)z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (4.88)$$

Задача 2

При обробці виробу через його поверхню углиб матеріалу поступає тепловий потік $F_n(t)$. Процес теплопередачі в цьому випадку описується наступним рівнянням теплопровідності з граничною умовою 1-го роду на поверхні (рис.4.5):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < +\infty, \quad t > 0, \quad (4.89)$$

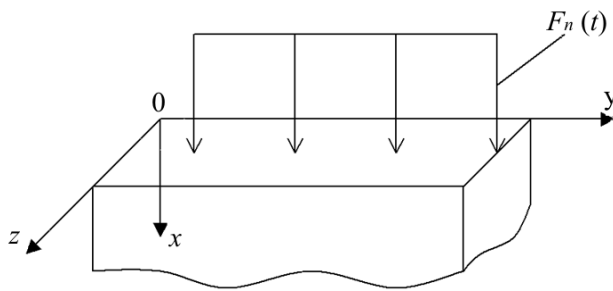


Рисунок 4.5 - Схема нагріву виробу зовнішнім тепловим потоком $F_n(t)$ (тут $F_n(t)=q$)

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (4.90)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = F_n(t), \quad (4.91)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.92)$$

Необхідно, використовуючи метод інтегральних перетворень

Фур'є, знайти загальний розв'язок задачі $T(z, t)$.

Розв'язок.

Використовуючи заміну змінних (4.65), отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \quad (4.93)$$

$$\bar{T}|_{t=0} = 0, \quad (4.94)$$

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} = F_n(t), \quad (4.95)$$

$$\bar{T} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.96)$$

Для знаходження функції $T(z, t)$ на I-му етапі розв'язування задачі використовуємо пряме косинус-перетворення Фур'є по координаті z :

$$\bar{T}(z,t) \rightarrow F_c(\omega,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{T}(u,t) \cos \omega u \, du. \quad (4.97)$$

З використанням (4.97) перетворимо систему рівнянь (4.93) – (4.96):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} &\rightarrow \frac{dF_c}{dt}, \\ a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} &\rightarrow a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial u^2} \cos zu \, du \end{aligned} \quad (4.98)$$

Інтегруючи (4.98) двічі по частинах, отримуємо:

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \rightarrow -a^2 \omega^2 F_c + \frac{a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_n(t). \quad (4.99)$$

В результаті для знаходження функції $F_c(\omega,t)$ отримуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{dF_c}{dt} = -a^2 \omega^2 F_c + \frac{a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_n(t), \quad (4.100)$$

$$F_c|_{t=0}. \quad (4.101)$$

Для розв'язання (4.100) - (4.101) використовується, також як і в попередній задачі, метод Бернуллі:

$$F_c(\omega,t) = \frac{a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t F_n(\tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (4.102)$$

На II-м етапі розв'язання задачі оригінал $\bar{T}(z,t)$ знайдемо, використовуючи зворотне косинус-перетворення Фур'є для функції $F_c(\omega,t)$:

$$F_c(\omega,t) \rightarrow \bar{T}(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega,t) \cos \omega z \, d\omega. \quad (4.103)$$

Підставляючи (4.102) в (4.103), маємо

$$\bar{T}(z,t) = \frac{2a^2}{\pi\lambda} \int_0^t F_n(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \cos \omega z \, d\omega. \quad (4.104)$$

З використанням (4.65) і (4.87) отримаємо наступний загальний розв'язок задачі:

$$T(z,t) = T_0 + \frac{a}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F_n(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.105)$$

Задача 3

В процесі поверхневої обробки оптичного матеріалу в зоні впливу джерела тепла відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона. При цьому процес теплопровідності описується наступним рівнянням теплопровідності з граничною умовою III роду на поверхні (рис.4.6):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < +\infty, \quad t > 0, \quad (4.106)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (4.107)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha [T - T_c(t)] \Big|_{z=0}, \quad (4.108)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0$$

$$\text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.109)$$

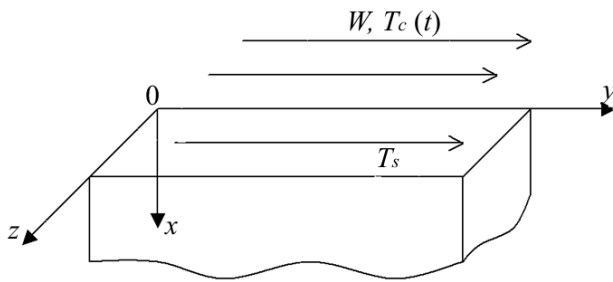


Рисунок 4.6 - Схема конвекційного теплообміну між потоком рідини (газу) і охолоджуваною поверхнею оптичного виробу: H - напрям руху рідини (газу), що має температуру $T_c(t) < T_s$ (T_s - температура оброблюваної поверхні)

Потрібно, використовуючи метод інтегральних перетворень Фур'є, отримати загальний розв'язок задачі $\bar{T}(z, t)$.

Розв'язок.

Перетворимо систему рівнянь (4.106) - (4.109), зробивши наступні заміни:

$$\bar{T} = T - T_0, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \varphi(t) = T_c(t) - T_0. \quad (4.110)$$

Отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \quad (4.111)$$

$$\bar{T}|_{t=0} = 0, \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} = h [\bar{T} - \varphi(t)] \Big|_{z=0}, \quad (4.113)$$

$$\bar{T} \rightarrow 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.114)$$

Для знаходження функції $\bar{T}(z, t)$ на I-му етапі розв'язання задачі використовуємо наступне пряме синус-косинус перетворення Фур'є по координаті:

$$\bar{T}(z, t) \rightarrow F_{sc}(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{T}(u, t) \frac{h \sin \omega u + \omega \cos \omega u}{\omega^2 + h^2} du. \quad (4.115)$$

Далі за допомогою (4.115) перетворимо систему рівнянь (4.111)-(4.114):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial F_{sc}}{\partial t} \equiv \frac{dF_{sc}}{dt}, \\ a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} &\rightarrow a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial u^2} \frac{h \sin \omega u + \omega \cos \omega u}{\omega^2 + h^2} du. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Інтегруючи праву частину (4.116) двічі по частинах і враховуючи (4.113) та (4.114), отримуємо:

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \rightarrow -a^2 \omega^2 F_{sc} + \frac{a^2 \omega h}{\omega^2 + h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t). \quad (4.117)$$

Таким чином, для отримання функції $F_{sc}(\omega, t)$ маємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{dF_{sc}}{dt} = -a^2 \omega^2 F_{sc} + \frac{a^2 \omega h}{\omega^2 + h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t), \quad (4.118)$$

$$F_{sc} \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.119)$$

Розв'язки (4.118) - (4.119) отримуємо, також як і в попередніх задачах, методом Бернуллі:

$$F_{sc}(\omega, t) = \frac{a^2 \omega h}{\omega^2 + h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (4.120)$$

На II-му етапі розв'язання задачі оригінал $\bar{T}(z, t)$ знайдемо, використовуючи зворотне синус-косинус перетворення Фур'є для функції $F_{sc}(\omega, t)$:

$$F_{sc}(\omega, t) \rightarrow \bar{T}(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_{sc}(\sigma, t) \frac{h(\sigma \sin \sigma x + h \cos \sigma x)}{\sigma} d\sigma. \quad (4.121)$$

Підставляючи (4.120) в (4.121), отримуємо:

$$\bar{T}(z,t) = \frac{2a^2 h}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \frac{h^2 \cos \omega x}{\omega^2 + h^2} d\omega}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} \frac{h \omega \sin \omega x}{\omega^2 + h^2} d\omega}_{I_2} \right]. \quad (4.122)$$

Внутрішні інтеграли I_1 та I_2 знаходимо з довідникової літератури [18]:

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-hu} \left[e^{\frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{\frac{(x+u)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] du, \quad (4.123)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-hu} \left[e^{\frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{(x+u)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] du. \quad (4.124)$$

Підставляючи (4.123) та (4.124) в (4.122), отримуємо:

$$\bar{T}(z,t) = \frac{a \cdot h^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-hu - \frac{(z-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du - \int_0^{+\infty} e^{-hu - \frac{(z+u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du \right]. \quad (4.125)$$

Внутрішні інтеграли в (4.125) обчислимо, використовуючи, згідно довідкової літератури, наступний вираз [18]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(au^2 + 2bu + c)} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right]. \quad (4.126)$$

З урахуванням (4.126) отримуємо:

$$\int_0^{+\infty} e^{-hu - \frac{(x-u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du = a \sqrt{\pi(t-\tau)} e^{-h[z - ha^2(t-\tau)]} \times \left[1 - \operatorname{erf} \left(ha \sqrt{t-\tau} - \frac{z}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right], \quad (4.127)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-hu - \frac{(z+u)^2}{4a^2(t-\tau)}} du = a \sqrt{\pi(t-\tau)} \times e^{h[z + ha^2(t-\tau)]} \left[1 - \operatorname{erf} \left(ah \sqrt{t-\tau} + \frac{z}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right]. \quad (4.128)$$

Підставляючи (4.127) та (4.128) в (4.126) і враховуючи (4.110), отримуємо загальний розв'язок задачі:

$$T(z,t) = T_0 + \frac{a^2 \alpha^2}{\lambda^2} \int_0^t \varphi(\tau) \times$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{\alpha}{\lambda} \left[z - \frac{\alpha}{\lambda} a^2 (t-\tau) \right]} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\lambda} a \sqrt{t-\tau} - \frac{z}{2a \sqrt{t-\tau}} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{\alpha}{\lambda} \left[z + \frac{\alpha}{\lambda} a^2 (t-\tau) \right]} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\lambda} a \sqrt{t-\tau} + \frac{z}{2a \sqrt{t-\tau}} \right) \right] \right\} d\tau \quad (4.129)$$

4.2 Розв'язок одновимірних задач теплопровідності для обмежених тіл методом розділення змінних

Метод розділення змінних є одним з фундаментальних аналітичних методів розв'язання різних задач теплопровідності для обмежених тіл (пластини кінцевої товщини, тонкі стрижні тощо).

4.2.1 Загальні принципи методу розділення змінних

Метод розділення змінних - один з найбільш відомих методів розв'язання задач теплоперенесення в різних тілах. Проте, не дивлячись на простоту вказаного методу, є ряд обмежень в його застосуванні.

Розглянемо ці обмеження на прикладі простого одновимірного, нестационарного температурного поля $T(x,t)$:

1) рівняння теплопровідності для функції $T(x,t)$ є лінійним і однорідним (не обов'язково з постійними коефіцієнтами), тобто

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (4.130)$$

2) граничні умови I-III родів задані у вигляді:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_1 T \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.131)$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta_1 T \Big|_{x=l} = 0, \quad (4.132)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – константи (граничні умови, задані у такому вигляді, називаються лінійними однорідними граничними умовами).

Як приклад розглянемо наступну задачу охолодження обмеженого стрижня (рис.4.7): знайти розв'язок рівняння теплопровідності (4.130) за граничних умов:

$$T|_{x=0} = 0, \quad (4.133)$$

$$T|_{x=l} = 0, \quad (4.134)$$

і початковій умові: $T|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.135)$

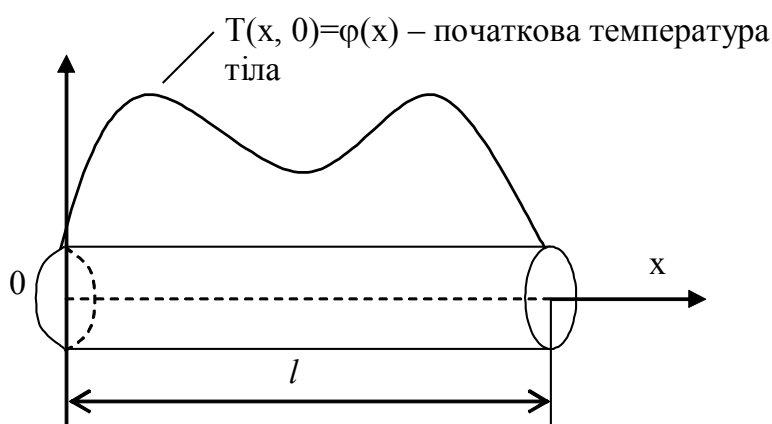


Рисунок 4.7 - Схематичне зображення процесу охолодження стрижня, що задовольняє граничним умовам

Перш ніж приступити до розв'язання системи рівнянь (4.130), (4.133) - (4.135), розглянемо фізичну інтерпретацію сформульованої задачі. Отже, є стрижень кінцевої довжини, кінці якого підтримуються при постійній, рівній нулю

температурі (насправді кінці можуть підтримуватися при набагато вищій температурі, значення якої беруться за початок відліку). Додаткові дані про завдання представлені у вигляді початкової умови.

Наша мета - знайти розподіл температури $T(x,t)$ в подальші моменти часу. Для простого рівняння з частковими похідними типу (4.130) розділення змінних - це пошук розв'язків вигляду:

$$T(x, t) = M(x) \cdot N(t), \quad (4.136)$$

де $M(x)$ – функція, яка залежить лише від змінної x , а $N(t)$ - функція залежна тільки від t . Такий розв'язок є в якомусь сенсі простим, оскільки температура $T(x, t)$, представлена у такому вигляді, зберігатиме «форму» профілю в різні моменти часу t (рис.4.8).

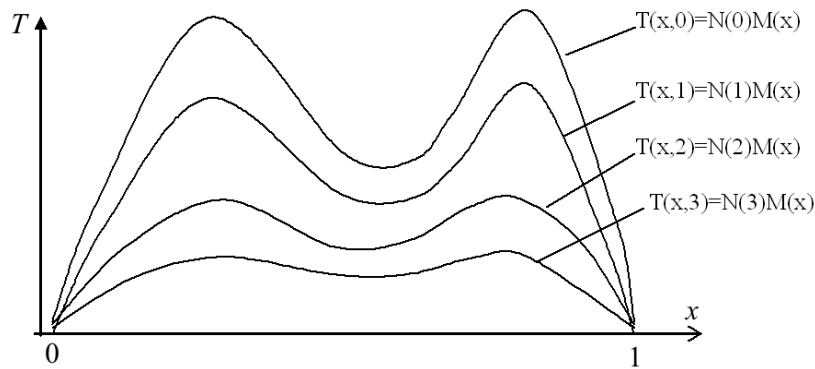


Рисунок 4.8 - Графік функції $M(x)N(t)$ у різні моменти часу t

Загальна ідея полягає в тому, щоб знайти нескінченне число таких розв'язків рівняння з частковими похідними (4.130) які задовольняють граничним умовам. Ці прості функції $T_n(x,t)=M_n(x)N_n(t)$ (називаються фундаментальними розв'язками) є як би елементарною цеглою, з якої будується розв'язок початкової задачі.

Розв'язок початкової задачі $T(x,t)$ знаходяться у вигляді такої лінійної комбінації фундаментальних розв'язків $M_n(x)N_n(t)$, що результуюча сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n M_n(x) T_n(t) \quad (4.137)$$

задовольняє початковим умовам. Оскільки ця сума задовольняє рівнянню і граничним умовам, вона є розв'язком початкової задачі. Тепер виконаємо всі ці викладення детально.

Методика методу розділення змінних.

Крок 1. (Знаходження елементарних розв'язків рівняння з частковими похідними).

Ми хочемо знайти функцію $T(x,t)$, яка є розв'язком задачі (4.130), (4.133) - (4.135). Шукатимемо розв'язки, представлені у вигляді (4.136). Для цього підставимо вираз (4.136) в рівняння (4.130). В результаті підстановки отримуємо:

$$M(x)N'(t) = a^2 M''(x)N(t). \quad (4.138)$$

Тепер виконаємо операцію, властиву даному методу: розділимо обидві частини останнього рівняння на $a^2 M(x)N(t)$, внаслідок чого отримуємо:

$$\frac{N'(t)}{a^2 N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)}. \quad (4.139)$$

Про цей вираз говорять, що в нім змінні *розділені*, тобто ліва частина рівняння залежить тільки від t , а права частина тільки від x . Оскільки x і t не залежать один від одного, то кожна частина цього рівняння повинна бути константою. Позначимо цю константу \bar{k} , тоді

$$\frac{N'}{a^2 N} = \frac{M''}{M} = \bar{k}, \quad N' - \bar{k} a^2 N = 0, \quad M'' - \bar{k} M = 0. \quad (4.140)$$

Тепер можна розв'язати кожне з цих звичайних диференціальних рівнянь. Добуток відповідних розв'язків задовольнятиме початковому рівнянню з частковими похідними.

(Відмітимо, що ми істотно спростили початкове рівняння з частковими похідними другого порядку, перетворивши його на два звичайні диференціальні рівняння).

Звернемо тепер увагу на наступну важливу обставину: константа розділення \bar{k} повинна бути *негативною* (інакше рівняння $M'' - \bar{k} M = 0$ з обмеженою умовою $M(0)=M(1)=0$ має тільки тривіальне рішення $M(x) \equiv 0$), іншими словами функції $N(t)$ повинні прагнути до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Маючи це на увазі, введемо позначення $\bar{k} = -\bar{\omega}^2$, де $\bar{\omega}$ не дорівнює нулю (в цьому випадку вираз $-\bar{\omega}^2$ буде завжди негативним).

З урахуванням нового позначення для константи розділення два звичайні диференціальні рівняння запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} N' + \bar{\omega}^2 a^2 N &= 0, \\ \dot{I}'' + \bar{\omega}^2 M &= 0. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Отримані рівняння є звичайними диференціальними рівняннями.

Їх загальні розв'язки записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} N(t) &= A e^{-\bar{\omega}^2 a^2 t}, \\ M(x) &= B \sin \bar{\omega} x + C \cos \bar{\omega} x, \end{aligned} \quad (4.142)$$

де A , B , C – деякі постійні, які обираються шляхом розв'язку

диференціального рівняння.

Отже, функція (4.136) набуде наступного вигляду:

$$T(x,t) = e^{-\bar{\omega}^2 a^2 t} (C_1 \sin \bar{\omega} x + C_2 \cos \bar{\omega} x), \quad (4.143)$$

де $C_1 = A B$ та $C_2 = A C$ – розв'язки, що задовольняють рівнянню (1.318).

Отже, ми отримали нескінченний набір функцій, що задовольняють початковому рівнянню з частковими похідними.

Крок 2 (Знаходження розв'язків, що задовольняють граничним умовам).

Положення зараз таке: у нас є нескінченна безліч розв'язків початкового рівняння, але не всі вони задовольняють граничним або початковим умовам.

Наступний крок полягає у виборі такої *підмножини* розв'язків вигляду (4.143), які задовольняють граничним умовам (4.133) і (4.134). Щоб зробити це, підставимо розв'язок (4.143) в ці граничні умови.

В результаті отримуємо:

$$T|_{x=0} = C_2 e^{-\bar{\omega}^2 a^2 t} = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad (4.144)$$

$$T|_{x=l} = C_1 e^{-\bar{\omega}^2 a^2 t} \sin \bar{\omega} l = 0 \Rightarrow \sin \bar{\omega} l = 0. \quad (4.145)$$

Друга гранична умова накладає обмеження на можливі значення константи розділення $\bar{\omega}$: вона повинна бути коренем рівняння $\sin \bar{\omega} l = 0$. Іншими словами, щоб задовольнити умові $T|_{x=l} = 0$ необхідно зажадати виконання співвідношень

$$\bar{\omega} l = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \quad (4.146)$$

або

$$\bar{\omega}_n = \pm \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, \dots \quad (4.147)$$

Відзначимо, що можна задовольнити другій граничній умові якщо покласти $C_1 = 0$, але тоді розв'язок (4.143) тотожно дорівнюватиме нулю.

Отже, ми закінчили виконання другого кроку і маємо в своєму розпорядженні нескінченний набір функцій:

$$T_n(x,t) = C_{1n} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, n = 1, 2, \dots, \quad (4.148)$$

кожна з яких задовольняє рівнянню з частковими похідними і граничним умовам (відзначимо, що функції T_n і T_{-n} відрізняються тільки знаком). Розв'язання початкової задачі буде деякою сумою з цих простих функцій. При цьому конкретний вид суми залежатиме від початкової умови.

Крок 3. (Знаходимо розв'язок, що задовольняє рівнянню, граничним і початковим умовам). Останній крок полягає в знаходженні такої суми фундаментальних розв'язків

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (4.149)$$

тобто в підборі таких коефіцієнтів C_{1n} , що функція задовольнятиме початковій умові (4.135). Підстановка (4.149) в (4.135) дає

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{N}_{1n} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4.150)$$

Вираз (4.150) є розкладаннями функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є, згідно якому вираз для коефіцієнта C_{1n} має наступний вигляд:

$$C_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (4.151)$$

Підставляючи (4.151) в (4.149), отримуємо загальний розв'язок початкової задачі:

$$T(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \left[\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right] \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4.152)$$

Можна переконатися в тому, що отриманий нами розв'язок задовольняє всім умовам початкового завдання.

4.2.2 Перетворення неоднорідних граничних умов до однорідних при використанні методу розділення змінних

Вище було показано, що метод розділення змінних є достатньо простим і ефективним, а отримувані з його допомогою розв'язки представляються в зручній формі. Проте цей метод застосовний не до всіх задач. Для застосовності методу розділення змінних граничні умови повинні бути

лінійними і однорідними, тобто представлятися у вигляді:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_1 T|_{x=0} = 0,$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta_1 T|_{x=l} = 0.$$

Покажемо, яким чином представляються задачі з неоднорідними граничними умовами вигляду:

- рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

граничні умови

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta_1 T|_{x=0} = g_1(t),$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta_1 T|_{x=l} = g_2(t),$$
(4.153)

початкова умова (неоднорідні граничні умови)

$$T|_{x=0} = \varphi(x)$$

може бути розв'язане шляхом зведення його до задачі з однорідними граничними умовами. Розглянемо просту задачу про розповсюдження тепла в теплоізованому стрижні, кінці якого підтримуються при постійних температурах T_1 , T_2 , тобто

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (4.154)$$

$$T|_{x=0} = T_1, \quad (4.155)$$

$$T|_{x=l} = T_2, \quad (4.156)$$

$$T|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.157)$$

Трудність цієї задачі в тому, що, оскільки граничні умови в ній неоднорідні, ми не можемо вирішувати її методом розділення змінних. Проте, очевидно, що розв'язок нашої задачі прагне до стаціонарного значення, яке лінійно змінюється (уподовж x) від температури T_1 до температури T_2 .

Іншими словами, розумно припустити, що температуру в нашій задачі – $T(x, t) = \left[T_1 + \frac{x}{l}(T_2 - T_1) \right] + \bar{U}(x, t)$ можна представити у вигляді суми двох доданків: стаціонарна температура (граничний розв'язок для великих проміжків часу) + перехідна температура (частина розв'язку, яке залежить від початкових умов і прагне до нуля із зростанням часу).

В даному випадку наше завдання знайти *перехідну температуру* $\bar{U}(x, t)$:

Підставляючи

$$T(x, t) = \left[T_1 + \frac{x}{l} \cdot (T_2 - T_1) \right] + \bar{U}(x, t) \quad (4.158)$$

у початкову задачу, ми приходимо до нової задачі щодо невідомої функції $\bar{U}(x, t)$. Розв'язавши цю задачу щодо нової невідомої функції $\bar{U}(x, t)$, можна додати її до стаціонарного розв'язку, внаслідок чого вийде шукана функція $T(x, t)$. Проробляючи ці прості перетворення з (4.154) - (4.157), отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (4.159)$$

$$\bar{U}|_{x=0} = 0, \quad (4.160)$$

$$\bar{U}|_{x=l} = 0, \quad (4.161)$$

$$\bar{U}|_{t=0} = \varphi(x) - \left[T_1 + \frac{x}{l}(T_2 - T_1) \right] = \bar{\varphi}(x), \quad (4.162)$$

де $\bar{\varphi}(x)$ нова, але відома початкова умова.

Це завдання не тільки з однорідним рівнянням, але і з однорідними граничними умовами, що дозволяє розв'язати її методом розділення змінних. Насправді, використовуючи розглянутий вище метод розділення змінних, для функції $\bar{U}(x, t)$ отримуємо наступний вираз:

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (4.163)$$

де

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (4.164)$$

Остаточно, розв'язок початкової задачі виходить в наступному вигляді:

$$T(x,t) = \left[T_1 + \frac{x}{l}(T_2 - T_1) \right] + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \times \left\{ \int_0^l \left[\varphi(x) - T_1 - \frac{x}{l}(T_2 - T_1) \right] \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right\} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4.165)$$

Що стосується граничних умов із залежними від часу правими частинами, то основні ідеї тут такі ж, як і в попередній задачі, але декілька складніші.

Перетворення залежних від часу граничних умов в нульові.

Розглянемо типову теплову задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (4.166)$$

$$T|_{x=0} = g_1(t), \quad (4.167)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=l} = g_2(t), \quad (4.168)$$

$$T|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.169)$$

Для того, щоб перетворити ці граничні умови в нульові (шляхом підбору) зупинилися на наступній формі розв'язку:

$$T(x,t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + B(t) \frac{x}{l} + \bar{\bar{U}}(x,t), \quad (4.170)$$

де функції $A(t)$ та $B(t)$ вибираються так, щоб “квазістаціонарна” частина розв'язку (4.170)

$$\bar{\bar{S}}(x,t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + B(t) \frac{x}{l} \quad (4.171)$$

задовольняла граничним умовам початкової задачі.

В цьому випадку функція $\bar{\bar{U}}(x,t)$ задовольнятиме однорідним граничним умовам.

Підставляючи функції $\bar{\bar{S}}(x,t)$ у граничні умови:

$$\bar{\bar{S}}(0,t) = g_1(t), \quad (4.172)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + h \bar{S} \Big|_{x=l} = g_2(t), \quad (4.173)$$

отримуємо два рівняння, з яких можна визначити $A(t)$ та $B(t)$. В результаті отримуємо:

$$A(t) = g_1(t), \quad (4.174)$$

$$B(t) = \frac{g_1(t) + l g_2(t)}{1 + lh}. \quad (4.175)$$

Отже,

$$T(x,t) = g_1(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{g_1(t) + l g_2(t)}{1 + l \cdot h} + \bar{\bar{U}}(x,t). \quad (4.176)$$

Якщо підставити цей вираз для $T(x,t)$ в початкову задачу (4.166) - (4.169), ми отримаємо нову задачу для невідомої функції $\bar{\bar{U}}(x, t)$:

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial x^2} - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.177)$$

– неоднорідне рівняння теплопровідності,

$$\bar{\bar{U}} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.178)$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial x} + h \bar{\bar{U}} \Big|_{x=l} = 0 \quad (4.179)$$

– однорідні граничні умови,

$$\bar{\bar{U}} \Big|_{t=0} = \varphi(x) - \bar{S}(x,0) \quad (4.180)$$

– нова початкова умова з відомою функцією.

Тепер перед нами нова задача з однорідними граничними умовами (на жаль, рівняння стало неоднорідним).

Цю задачу не можна розв'язати методом розділення змінних, але вона розв'язується розглянутим вище методом інтегральних перетворень Фур'є.

4.2.3 Розв'язок складних задач теплопровідності методом розділення змінних

Мета цього розділу полягає в розв'язанні змішаної задачі методом розділення змінних. Можливо, саме, цим методом читач вирішуватиме свою задачу. При цьому ми сподіваємося, що він зможе перенести методику, розглянуту в даному розділі, на свої задачі.

Ми, почнемо з одновимірної нестационарної задачі теплопровідності, в якій одна з граничних умов містить похідну.

Задача теплопровідності з похідною в граничній умові. Знайдемо розподіл температури $T(x,t)$ в обмеженому стрижні, задовольняючій наступній системі рівнянь теплопровідності з початковим і граничними умовами:

$$\begin{aligned} T_t &= a^2 T_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} T(0,t) = 0, \\ T_x(1,t) + hT(1,t) = 0. \end{cases} & & & (4.181) \\ T(x,0) &= x. \end{aligned}$$

Щоб скористатися методом розділення змінних, розіб'ємо процес розв'язку на декілька кроків.

Крок 1. (Перетворення рівняння з частковими похідними в два звичайні диференціальні рівняння)

Підстановка $T(x, t) = X(x)\bar{T}(t)$ у рівняння (4.135) дає:

$$X\bar{T}' = a^2 X''\bar{T}.$$

Після ділення обох частин цього рівняння, на $a^2 X\bar{T}$ отримуємо:

$$\frac{\bar{T}'}{a^2 \bar{T}} = \frac{X''}{X}.$$

Оскільки ліва частина останнього рівняння залежить тільки від часу, а права частина залежить тільки від x (і так як x і t незалежні), обидві частини рівняння повинні бути константами. Прирівнюючи обидві частини однієї і

тієї же константі $\bar{\mu}$, отримуємо:

$$\bar{T}' - \bar{\mu}a^2\bar{T} = 0, \quad X'' - \bar{\mu}X = 0. \quad (4.182)$$

Процес розділення змінних завершений.

Крок 2. (Визначення константи розділення)

По-перше, константа $\bar{\mu}$ не повинна бути позитивною, інакше (розв'язок $X(x)$ відповідної крайової задачі буде тільки тривіальним, $X(x) \equiv 0$) функція $T(t)$ буде експоненціально зростати, що спричинить нескінченне зростання температури T . Зрозуміло, що такий розв'язок не має фізичного сенсу.

По-друге, припустимо, що $\bar{\mu} = 0$. Тоді $X'' = 0$ і, значить, $X(x) = \bar{A} + \bar{B}x$, де \bar{A} та \bar{B} - довільні постійні.

Але, оскільки граничні умови вимагають, щоб виконувалися співвідношення

$$\begin{aligned} T(0,t) = X(0)\bar{T}(t) &= 0, \\ (hX(1) + X'(1))\bar{T}(t) &= 0, \end{aligned}$$

ми негайно приходимо до висновку, що

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0 \\ hX(1) + X'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{A} &= 0 \\ \bar{B} &= 0. \end{aligned}$$

Це означає, що $T(x,t) = 0$. Іншими словами, нульовим константам розділення відповідає тільки нульовий розв'язок. Ми його відкинемо, оскільки нас цікавлять ненульові розв'язки. Якщо, нарешті, $\bar{\mu} < 0$, можна покласти $\bar{\mu} = -\bar{\lambda}^2$ і переписати рівняння (4.182) у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{T}' + \bar{\lambda}^2 a^2 \bar{T} &= 0, \\ X'' + \bar{\lambda}^2 X &= 0. \end{aligned}$$

Загальні розв'язки цих рівнянь легко знаходяться:

$$\begin{aligned} T(t) &= Ae^{-(\bar{\lambda}a)^2 t}, \\ X(x) &= B \sin(\bar{\lambda}x) + C \cos(\bar{\lambda}x), \end{aligned}$$

Отже, будь-яка функція вигляду

$$T(x,t) = e^{-(\bar{\lambda}a)^2 t} [A_1 \sin(\bar{\lambda}x) + B_1 \cos(\bar{\lambda}x)] \quad (4.183)$$

при довільних значеннях $\bar{\lambda}$, A_1 та B_1 задовольняє рівнянню (у цьому можна переконатися за допомогою простої підстановки).

Тепер потрібно з'ясувати, які з функцій задовольняють граничним умовам

$$\begin{aligned} T(0,t) &= 0, \\ T_x(1,t) + hT(1,t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Підстановка розв'язків вигляду (4.183) в граничні умови (4.184) дозволяє знайти співвідношення, яким повинні задовольняти величини $\bar{\lambda}$, A_1 та B_1 :

$$\begin{aligned} B_1 e^{-(\bar{\lambda}a)^2 t} &= 0 \Rightarrow B_1 = 0 \\ A_1 \bar{\lambda} e^{-(\bar{\lambda}a)^2 t} \cos \bar{\lambda} + h A_1 e^{-(\bar{\lambda}a)^2 t} \sin \bar{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Після нескладних алгебраїчних перетворень останнє рівняння приводиться до вигляду $\operatorname{tg} \bar{\lambda} = -\frac{\bar{\lambda}}{h}$.

Іншими словами, для того, щоб визначити $\bar{\lambda}$, ми повинні знайти точки перетину графіків функцій $\operatorname{tg} \bar{\lambda}$ та $-\frac{\bar{\lambda}}{h}$ (рис. 4.9).

Чисельні значення величин $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots$ можна знайти за допомогою ПЕОМ, якщо задана величина h .

Ці величини прийнято називати власними значеннями крайової задачі:

$$\begin{aligned} X'' + \bar{\lambda}^2 X &= 0 \\ \begin{cases} X(0) = 0 \\ hX(1) + X'(1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.185)$$

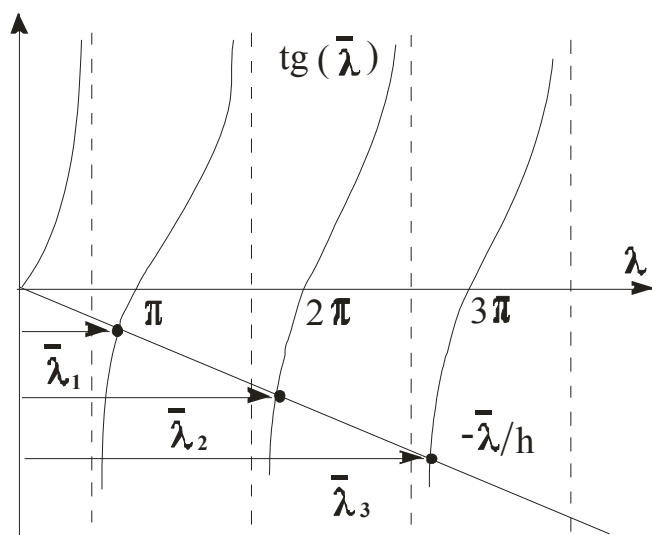


Рисунок 4.9 - Перетин графіків функцій $tg(\bar{\lambda})$ та $-\frac{\bar{\lambda}}{h}$

Іншими словами, при цих значеннях параметра $\bar{\lambda}$ існують нетривіальні розв'язки задачі (4.185).

Власні значення задачі (4.185) визначаються як коріння рівняння

$$tg \bar{\lambda} = -\frac{\bar{\lambda}}{h}.$$

Їх чисельні значення були знайдені на ПЕОМ для випадку $h = 1$.

У таблиці 4.1 приведені результати розрахунків декількох перших власних значень.

Таблиця 4.1 - Корні рівняння $tg \bar{\lambda} = -\bar{\lambda}$

n	$\bar{\lambda}_n$	n	$\bar{\lambda}_n$
1	2,02	4	11,08
2	4,91	5	14,20
3	7,98		

Розв'язки задачі (4.185), відповідні власним значенням $\bar{\lambda}_n$ називаються власними функціями $X_n(x)$.

Для даної задачі власні функції мають вигляд

$$X_n(x) = \sin(\bar{\lambda}_n x) \quad (4.186)$$

і зображені на рис.4.10.

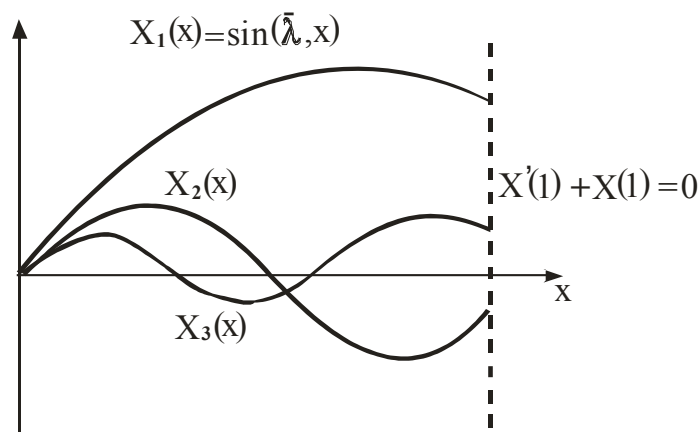


Рисунок 4.10 - Власні функції $X_n(x)$ задачі (4.185) при $h = 1$

Крок 3. (Знаходження фундаментальних розв'язків). Тепер в нашому розпорядженні є нескінченний набір функцій (фундаментальних розв'язків)

$$T_n(x, t) = X_n(x) \bar{T}_n(t) = e^{-(\bar{\lambda}_n a)^2 t} \sin(\bar{\lambda}_n x),$$

кожна з яких задовольняє рівнянню і граничним умовам. Залишилося зробити останній крок - в сумі

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \bar{T}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\bar{\lambda}_n a)^2 t} \sin(\bar{\lambda}_n x) \quad (4.187)$$

підібрати коефіцієнти a_n так, щоб функція $T(x, t)$ задовольняла початковій умові $T(x, 0) = x$ (при цьому функція $T(x, t)$ задовольнятиме рівнянню і граничним умовам, оскільки, по-перше, кожен доданок в сумі їм задовольняє, а по-друге, і рівняння і граничні умови є однорідними).

Таким чином, коефіцієнти a_n повинні визначатися з умови:

$$T(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\bar{\lambda}_n x). \quad (4.188)$$

Крок 4. (Розкладання початкової умови в ряд за власними функціями).

Для знаходження коефіцієнтів a_n в розкладанні (4.188) за власними функціями помножимо обидві частини цього співвідношення на $\sin(\bar{\lambda}_n x)$ і проінтегруємо від 0 до 1.

В результаті отримуємо:

$$\int_0^1 \xi \sin(\bar{\lambda}_m \xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \sin(\bar{\lambda}_m \xi) d\xi =$$

$$= a_m \int_0^1 \sin^2(\bar{\lambda}_m \xi) d\xi = a_m \left(\frac{\bar{\lambda}_m - \sin \bar{\lambda}_m \cos \bar{\lambda}_m}{2\bar{\lambda}_m} \right).$$

Розв'язуючи останнє співвідношення відносно a_m і замінюючи m на n , отримуємо шуканий результат:

$$a_n = \left(\frac{2\bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_n - \sin \bar{\lambda}_n \cos \bar{\lambda}_n} \right) \int_0^1 \xi \sin(\bar{\lambda}_n \xi) d\xi. \quad (4.189)$$

Отже, розв'язок задачі (4.181) записується у вигляді:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\bar{\lambda}_n a)^2 t} \sin(\bar{\lambda}_n x), \quad (4.190)$$

де коефіцієнти a_n визначаються за формулою (4.189).

П'ять перших коефіцієнтів a_n нашої задачі було знайдено чисельно.

Їх значення наведені нижче:

n	a_n	n	a_n
1	0,24	4	-0,11
2	0,22	5	-0,09
3	-0,03		

Отже, перші три члени в розв'язку змішаної задачі (4.181) мають вигляд:

$$T(x,t) = 0,24e^{-4t} \sin(2,02x) + 0,22e^{-24t} \sin(4,9x) - 0,03e^{-63,3t} \sin(7,98x) + \dots \quad (4.191)$$

4.3 Розв'язок неоднорідних задач теплопровідності методом розкладання за власними функціями

Раніше нами було розглянуто випадок, як неоднорідні граничні умови перетворити в однорідних.

На жаль, рівняння залишається при цьому неоднорідним і перед нами постає задача:

$$T_t = a^2 T_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 T_x(0,t) + \beta_1 T(0,t) &= 0 \\ T_x(1,t) + \delta_1 T(1,t) &= 0, \quad 0 < t < \infty \\ T(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 < x < 1.\end{aligned}\tag{4.192}$$

Як метод розв'язання таких задач, окрім розглянутого вище методу інтегральних перетворень Фур'є, також широко використовується метод, аналогічний методу варіації довільних постійних з теорії звичайних диференціальних рівнянь і який називається методом розкладання за власними функціями.

4.3.1 Побудова розв'язку методом розкладання за власними функціями

Ідея методу виключно проста. Відомо, що розв'язання задачі (4.192) при $f(x, t)=0$ (так званої відповідної однорідної задачі) записується у вигляді ряду:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\bar{\lambda}_n a)^2 t} X_n(x),\tag{4.193}$$

де $X_n(x)$ — власні функції задачі Штурма-Ліувіля,

$$\begin{aligned}X'' + \bar{\lambda}^2 X &= 0, \\ \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) &= 0, \\ \gamma_1 X'(1) + \delta_1 X(1) &= 0.\end{aligned}\tag{4.194}$$

Здамося питанням: чи не можна розв'язок неоднорідної задачі (4.192) також шукати у вигляді ряду за власними функціями, але більш загального вигляду:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).\tag{4.195}$$

Для такого припущення є певні фізичні підстави. Насправді, доданки $f(x, t)$ описують джерело тепла, розташоване усередині стрижня. Значить, залежність розв'язку від часу виражатиметься не експонентами

$$e^{-(\bar{\lambda}_n a)^2 t},\tag{4.196}$$

як це було у разі однорідної задачі, а якимись іншими функціями.

Для того, щоб показати цей метод у дії і не ускладнювати виклад

деталіями, ми застосуємо його до розв'язування наступної простої задачі.

Побудова розв'язку методом розкладання за власними функціями.

Розглянемо неоднорідну задачу теплоперенесення:

$$\begin{aligned} T_t &= a^2 T_{xx} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t < \infty, \\ T(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty \\ T(1, t) &= 0, \\ T(x, 0) &= \varphi(x), & 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (4.197)$$

Процес розв'язування задачі представимо у вигляді послідовності наступних кроків.

Крок 1. Основна ідея методу полягає в розкладанні щільності джерела $f(x, t)$ в ряд за власними функціями

$$f(x, t) = f_1(t)X_1(x) + f_2(t)X_2(x) + \dots + f_n(t)X_n(x) + \dots \quad (4.198)$$

і визначенні відгуків системи $T_n(x, t)$ на дію кожної компоненти $f_n(t)X_n(x)$.

Якщо всі відгуки будуть знайдені, то розв'язок задачі матиме вигляд:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t). \quad (4.199)$$

Основна складність в цьому методі - розкладання щільності джерела на компоненти $f_n(t)X_n(x)$. Виявляється, що множники $X_n(x)$ в даному завданні є власними векторами системи Штурма-Ліувіля, яка виникає при розв'язанні методом розділення змінних відповідної однорідної задачі, а саме:

$$\begin{aligned} T_t &= \alpha^2 T_{xx} \quad (\text{відзначимо, що } f(x, t) = 0), \\ T(0, t) &= 0, \\ T(1, t) &= 0, \\ T(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (4.200)$$

Задача Штурма-Ліувіля в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} X'' + \bar{\lambda}^2 X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.201)$$

а її розв'язком є функції:

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.202)$$

Отже, розкладання щільності джерела уявно у вигляді ряду:

$$f(x, t) = f_1(t)\sin(\pi x) + f_2(t)\sin(2\pi x) + \dots + f_n(t)\sin(n\pi x) + \dots \quad (4.203)$$

І, нарешті, для того, щоб знайти функції $f_n(t)$, помножимо обидві частини останнього співвідношення на $\sin(m\pi x)$ і проінтегруємо від 0 до 1 по x .

В результаті отримуємо:

$$\int_0^1 f(x, t)\sin(m\pi x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \frac{1}{2} f_m(t)$$

або (після заміни m на n):

$$f_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t)\sin(n\pi x)dx. \quad (4.204)$$

Останнє співвідношення встановлює зв'язок між коефіцієнтами $f_n(t)$ і щільністю теплового джерела $f(x, t)$.

Крок 2. (Знаходження відгуку $T_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ на вхідну дію $f_n(t) X_n(x)$).

Замінімо щільність джерела його розкладанням в ряд

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x) \quad (4.205)$$

і спробуємо знайти індивідуальні відгуки, тобто функції $T_n(t)$ в

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x). \quad (4.206)$$

Оскільки розв'язок задачі має вигляд:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x),$$

то підставимо цей вираз в початкову задачу

$$T_t = a^2 T_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\pi x),$$

$$T(0, t) = 0,$$

$$T(1, t) = 0,$$

$$T(x, 0) = \varphi(x),$$

внаслідок чого отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin(n\pi x) &= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(0) &= 0 \text{ (задовольняється тотожно),} \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) &= 0 \text{ (задовольняється тотожно),} \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (4.207)$$

Перепишучи рівняння і початкову умову у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + (n\pi a)^2 T_n - f_n(t)] \sin(n\pi x) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

отримуємо, що функції $T_n(t)$ є розв'язком задачі Коші [18, 64]:

$$\begin{aligned} T_n' + (n\pi a)^2 T_n &= f_n(t), \\ T_n(0) &= 2 \int_0^1 \varphi(\xi) \sin(n\pi \xi) d\xi = a_n. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$T_n(t) = a_n e^{-(n\pi a)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi a)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau, \quad (4.209)$$

звідки неважко отримати повний розв'язок початкової задачі (4.197):

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-(n\pi a)^2 t} \sin(n\pi x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi a)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.210)$$

↑

Перехідна частина
(зумовлена
початковою
умовою)

↑

Стационарна частина
(зумовлена
правою частиною $f(x, t)$).

З розв'язку (4.210) видно, що температурний відгук складається з двох частин: перша частина виникає завдяки початковим умовам, а друга частина - завдяки щільності джерела $f(x, t)$. Відзначимо, що термін «стаціонарна частина» не кращим чином підходить для опису другої частини температурного відгуку, оскільки тут не мається на увазі, що ця частина не залежить від часу (стаціонарний режим може виявитися періодичним, якщо $f(x, t)$ - періодична функція часу t).

Як приклад розглянемо наступну задачу:

$$\begin{aligned} T_t &= a^2 T_{xx} + \sin(3\pi x), & 0 < x < 1 \\ T(0, t) &= 0, \\ T(1, t) &= 0, & 0 < t < \infty \\ T(x, 0) &= \sin(3\pi x), & 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (4.211)$$

Наша мета - обчислити коефіцієнти $T_n(t)$ в розкладанні

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x). \quad (4.212)$$

(власні функції цієї задачі $X_n(x)$ співпадають з власними функціями попередньої). Якщо підставити це розкладання в початкове завдання, ми отримаємо наступну задачу Коші для визначення функцій $T_n(t)$:

$$\begin{aligned} T_n'(t) + (n\pi a)^2 T_n &= f_n(t) = 2 \int_0^1 \sin(3\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 1 & n = 3, \\ 0 & n \neq 3, \end{cases} \\ T_n(0) &= 2 \int_0^1 \sin(\pi \xi) \sin(n\pi \xi) d\xi = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.213)$$

Перепишемо ці рівняння послідовно для $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(n=1) \quad \left. \begin{aligned} T_1' + (\pi a)^2 T_1 &= 0 \\ T_1(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_1(t) = e^{-(\pi a)^2 t},$$

$$(n=2) \quad \left. \begin{aligned} T_2' + (2\pi a)^2 T_2 &= 0 \\ T_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_2(t) = 0,$$

$$(n=3) \quad \left. \begin{array}{l} T_3' + (3\pi a)^2 T_3 = 1 \\ T_3(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T_3(t) = \frac{1}{(3\pi a)^2} \left[1 - e^{-(3\pi a)^2 t} \right],$$

$$(n \geq 4) \quad \left. \begin{array}{l} T_n' + (n\pi a)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T_n(t) = 0.$$

Отже, розв'язок задачі можна записати у вигляді:

$$T(x,t) = e^{-(\pi a)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{(3\pi a)^2} \left[1 - e^{-(3\pi a)^2 t} \right] \sin(3\pi x). \quad (4.214)$$

4.4 Розв'язок двох- та трьохвимірних задач теплопровідності методами інтегральних перетворень Фур'є та розділення змінних

У даному розділі наводяться двох- та тривимірні задачі теплопровідності, в твердих тілах. В даний час основними аналітичними методами розв'язання вказаних задач є [11, 47, 51, 65, 80, 81, 102, 111]: двох- і тривимірні перетворення Фур'є для необмежених і напівобмежених тіл; двох- і тривимірні методи розділення змінних для обмежених тіл.

4.4.1 Розв'язок двохвимірних задач теплопровідності

У даному розділі розглядаються розв'язки задач нестационарної і квазістационарної теплопровідності твердих тіл методом двовимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Нижче при постановці кожної із вказаних задач приводиться рівняння теплопровідності з початковою і граничною умовами.

Задача 1

$$T_t(x,y,t) = a^2 (T_{xx}(x,y,t) + T_{yy}(x,y,t)), \quad (4.215)$$

$$-\infty < x < \infty; \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

початкова умова:

$$T(x,y,0) = \varphi(x,y). \quad (4.216)$$

Розв'язок.

Розв'яжемо задачу (4.215 – 4.216) за допомогою двовірного перетворення Фур'є:

$$T(x, y, t) \rightarrow U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega x + \bar{\sigma} y)} T(x, y, t) dx dy.$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, y, t) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega x + \bar{\sigma} y)} T_{xx}(x, y, t) dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\sigma} y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} T_{xx}(x, y, t) dx. \end{aligned} \quad (4.217)$$

Тут внутрішній інтеграл інтегрований двічі по частинам за умови, що $T(\pm\infty, y, t) = 0$ та $T_x(\pm\infty, y, t) = 0$.

Маємо:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-i\omega x} T_{xx}(x, y, t) dx = \\ &= e^{-i\omega x} T_x(x, y, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} T_x(x, y, t) dx = \\ &= i\omega \left(T(x, y, t) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} T_x(x, y, t) dx \right) = \\ &= -\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} T(x, y, t) dx. \end{aligned}$$

Тоді,

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, y, t) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\sigma} y} dy \left(-\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} T(x, y, t) dx \right) = \\ &= -\frac{\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega x + \bar{\sigma} y)} T(x, y, t) dx dy = -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t). \end{aligned}$$

Аналогічно маємо $T_{yy} \rightarrow -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t)$.

Отже,

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, y, t) &\rightarrow -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t) \\ T_{yy}(x, y, t) &\rightarrow -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t), \quad T_t(x, y, t) \rightarrow U_t(\omega, \bar{\sigma}, t), \end{aligned} \quad (4.218)$$

та

$$T(x, y, 0) \rightarrow \varphi(x, y) \rightarrow \hat{O}(\omega, \bar{\sigma}). \quad (4.219)$$

Задача (4.215), (4.216) у просторі зображень двомірного перетворення Фур'є має вигляд

$$U_t(\omega, \bar{\sigma}, t) + a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)U(\omega, \bar{\sigma}, t) = 0, \quad (4.220)$$

$$U(\omega, \bar{\sigma}, 0) = \hat{O}(\omega, \bar{\sigma}). \quad (4.221)$$

Рівняння (4.218), враховуючи (4.221), має розв'язок:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \hat{O}(\omega, \bar{\sigma})e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t}. \quad (4.222)$$

Оригінал $T(x, y, t)$ для зображення (4.222) знаходимо за допомогою двомірного зворотного перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + \bar{\sigma} y)} \hat{O}(\omega, \bar{\sigma}) e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t} d\omega d\bar{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t + i\bar{\sigma} y} \hat{O}(\omega, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.223)$$

Оскільки

$$\hat{O}(\omega, \bar{\sigma}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + \bar{\sigma} y)} \varphi(x, y) dx dy \quad (4.224)$$

то, підставляючи (1.413) в (1.412), отримаємо:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t + i\bar{\sigma} y} d\bar{\sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega \xi + \bar{\sigma} \eta)} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega(x-\xi)} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t + i\bar{\sigma}(y-\eta)} d\bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.225)$$

Тут (див. (4.18))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a^2\omega^2 t + i\omega(x-\xi)} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos(x-\xi)\omega d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (4.226)$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t + i\bar{\sigma}(y-\eta)} d\bar{\sigma} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos(y-\eta)\bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.227)$$

Підставляючи (4.226) та (4.227) в (4.225), отримаємо розв'язок задачі:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4a^2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta, \eta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta.$$

Задача 2.

$$T_t(x, y, t) = a^2(T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t)) + f(x, y, t) \quad (4.228)$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad -\infty < y < +\infty; \quad 0 < t < +\infty,$$

початкова умова

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (4.229)$$

Розв'язок.

Застосовуючи до функції $T(x, y, t)$ по змінним x та y двомірне перетворення Фур'є, отримуємо:

$$T_{xx}(x, y, t) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t)$$

$$T_{yy}(x, y, t) \rightarrow -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \sigma, t)$$

$$f(x, y, t) \rightarrow F(\omega, \bar{\sigma}, t), \quad T(x, y, 0) \rightarrow U(\omega, \bar{\sigma}, 0)$$

Задача (4.228), (4.229) в просторі зображень зводиться до задачі Коші:

$$U_t(\omega, \bar{\sigma}, t) + a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)U(\omega, \bar{\sigma}, t) = F(\omega, \bar{\sigma}, t), \quad (4.230)$$

$$U(\omega, \sigma, 0) = 0. \quad (4.231)$$

Рівняння (4.230) має загальний розв'язок:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \left(\int_0^t e^{a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)\tau} F(\omega, \bar{\sigma}, \tau) d\tau + c(\omega, \bar{\sigma}) \right) e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t}. \quad (4.232)$$

Користуючись (4.231), знаходимо, що довільна функція $c(\omega, \bar{\sigma}) = 0$. Тоді

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \int_0^t e^{a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)\tau} F(\omega, \bar{\sigma}, \tau) d\tau. \quad (4.233)$$

Знаходимо оригінал $T(x, y, t)$ для зображення (4.233):

$$T(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + \bar{\sigma} y)} \left(\int_0^t e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)(t-\tau)} F(\omega, \bar{\sigma}, \tau) d\tau \right) d\omega d\bar{\sigma}. \quad (4.234)$$

Оскільки

$$F(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x + \bar{\sigma} y)} f(x, y, t) dx dy, \quad (4.235)$$

тоді

$$T(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau) + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 (t-\tau) + i\bar{\sigma} y} d\bar{\sigma} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega \zeta + \bar{\sigma} \eta)} f(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta \quad (4.236)$$

або

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau) + i\omega(x-\zeta)} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 (t-\tau) + i\bar{\sigma}(y-\eta)} d\bar{\sigma}. \quad (4.237)$$

Тут (див. (4.226) та (4.227))

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau) + i\omega(x-\zeta)} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (4.238)$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 (t-\tau) + i\bar{\sigma}(y-\eta)} d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.239)$$

Отже, підставляючи (4.238) та (4.239) в (4.237), отримуємо розв'язок задачі (4.228), (4.229):

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2 a} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\zeta, \eta, \tau) d\zeta d\eta.$$

Задача 3.

$$T_t(x, y, t) = a^2 (T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t)), \quad (4.240)$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad 0 < y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

початкова умова

$$T(x, y, 0) = f(x, y) \quad (4.241)$$

гранична умова

$$T(x, 0, t) = 0. \quad (4.242)$$

До функції $T(x, y, t)$ вживається двомірне перетворення Фур'є по змінній x і синус-перетворення по змінній y :

$$T(x, y, t) \rightarrow U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx. \quad (4.243)$$

Функція $T(x, y, t)$ задовольняє умовам $T(\pm\infty, y, t) = 0$, $T(x, \infty, t) = 0$, $T_x(\pm\infty, y, t) = 0$, $T_y(x, \infty, t) = 0$. Подвійно інтегруючи (4.243) по частинах і враховуючи, що $T(x, 0, t) = 0$, знаходимо

$$T_{xx}(x, y, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_{xx}(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx = -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t) \quad (4.244)$$

та

$$T_{yy}(x, y, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_{yy}(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx = -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t). \quad (4.245)$$

Тоді,

$$T_{xx}(x, y, t) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t), \quad T_{yy}(x, y, t) \rightarrow -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t)$$

$$T_t(x, y, t) \rightarrow U_t(\omega, \bar{\sigma}, t), \quad f(x, y) \rightarrow F(\omega, \bar{\sigma}).$$

Задача (4.240) - (4.242) в просторі зображень переходить в задачу:

$$U_t(\omega, \bar{\sigma}, t) + a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)U(\omega, \bar{\sigma}, t) = 0 \quad (4.246)$$

$$U(\omega, \bar{\sigma}, 0) = F(\omega, \bar{\sigma}). \quad (4.247)$$

Рівняння (1.435) має частковий розв'язок:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = F(\omega, \bar{\sigma}) e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t}. \quad (4.248)$$

Користуючись зворотним перетворенням Фур'є, знаходимо:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t} F(\omega, \bar{\sigma}) \sin \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} \right) d\omega. \quad (4.249)$$

Оскільки

$$F(\omega, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x, y) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx, \quad (4.250)$$

тоді

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t + i \omega x} d\omega \int_0^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} \sin \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \omega \zeta} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\zeta, \eta) \sin \bar{\sigma} \eta d\eta \right) d\zeta \right)$$

або

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} f(\zeta, \eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t + i \omega (x - \zeta)} d\omega \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} \sin \bar{\sigma} y \sin \bar{\sigma} \eta d\bar{\sigma}. \quad (4.251)$$

Знаходимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} \sin \bar{\sigma} y \sin \bar{\sigma} \eta d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2 t}} \right), \quad (4.252)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t + i \omega (x - \zeta)} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.253)$$

Підставляючи (4.252) та (4.253) в (4.251), отримаємо шуканий розв'язок:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y+\eta)^2}{4a^2 t}} \right) f(\zeta, \eta) d\eta. \quad (4.254)$$

Задача 4.

$$T_t(x, y, t) = a^2 (T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t)) \quad (4.255)$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad 0 < y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

початкова умова

$$T(x, y, 0) = 0, \quad (4.256)$$

гранична умова

$$T(x, 0, t) = f(x, t). \quad (4.257)$$

Розв'язок.

Застосуємо перетворення Фур'є:

$$T(x, y, t) \rightarrow U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx. \quad (4.258)$$

За умови, що $T(\pm\infty, y, t) = 0$, $T_x(\pm\infty, y, t) = 0$, отримуємо:

$$T_{xx}(x, y, t) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t) \text{ и } T_t(x, y, t) \rightarrow U_t(\omega, \bar{\sigma}, t).$$

Враховуючи, що $T(x, \infty, t) = 0$, $T_y(x, \infty, 0) = 0$, $T(x, 0, t) = f(x, t)$,

знаходимо:

$$\begin{aligned} T_{yy}(x, y, t) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T_{yy} \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(T_y(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y \Big|_0^{\infty} - \bar{\sigma} \int_0^{\infty} T_{yy} \cos \bar{\sigma} y dy \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\bar{\sigma}) \left(T(x, y, t) \cos \bar{\sigma} y \Big|_0^{\infty} + \bar{\sigma} \int_0^{\infty} T \sin \bar{\sigma} y dy \right) = \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, t) dx - \frac{\bar{\sigma}^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x, y, t) \sin \bar{\sigma} y dy \right) dx. \end{aligned}$$

Звідси

$$T_{yy}(x, y, t) \rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, t) dx - \bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t).$$

Задача (4.255) - (4.257) зводиться до наступної:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) + a^2 (\omega^2 + \bar{\sigma}^2) U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{a^2 \bar{\sigma}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, t) dx, \quad (4.259)$$

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = 0, \quad (4.260)$$

Рівняння (4.259) має частковий розв'язок:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t} \int_0^t \frac{a^2 \bar{\sigma}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, \tau) dx e^{a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)\tau} d\tau$$

або

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{a^2 \bar{\sigma}}{\pi} \int_0^t e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, \tau) dx.$$

За допомогою зворотного перетворення Фур'є знаходимо:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{a^2 \bar{\sigma}}{\pi} \int_0^t e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)(t-\tau)} d\tau \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} f(\zeta, \tau) d\zeta \sin \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} \right) d\omega$$

або

$$T(x, y, t) = \frac{a^2}{\pi^2} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2(t-\tau) + i\omega(x-\zeta)} d\omega \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2(t-\tau)} \bar{\sigma} \sin \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (4.261)$$

Знаходимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2(t-\tau) + i\omega(x-\zeta)} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (4.262)$$

та

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2(t-\tau)} \cos \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.263)$$

Диференціюючи (4.263) по змінній y , отримуємо:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2(t-\tau)} \bar{\sigma} \sin \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi} y}{4a^3(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (4.264)$$

Підставляючи (4.262) і (4.264) в (4.261), отримаємо розв'язок крайової задачі (4.255) – (4.257):

$$T(x, y, t) = \frac{y}{4a^2\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (4.265)$$

Задача 5.

$$T_t(x, y, t) = a^2 (T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t)) \quad (4.266)$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad 0 < y < +\infty, \quad t > 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

початкова умова

$$T(x, y, 0) = f(x, y), \quad (4.267)$$

гранична умова $T_y(x, 0, t) = 0$. (4.268)

Розв'язок.

Застосовуємо до функції $T(x, y, t)$ по змінним x і y перетворення Фур'є:

$$T(x, y, t) \rightarrow U(\omega, \bar{\sigma}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x, y, t) \cos \bar{\sigma} y dy \right) dx. \quad (4.269)$$

Враховуючи, що $T(\pm\infty, y, t) = 0$, $T_x(\pm\infty, y, t) = 0$, $T(x, \infty, t) = 0$ та $T_y(x, 0, t) = 0$,

знаходимо $T_{xx}(x, y, t) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t)$, $T_{yy}(x, y, t) \rightarrow -\bar{\sigma}^2 U(\omega, \bar{\sigma}, t)$.

Диференціюючи (4.269) по t , отримуємо $T_t(x, y, t) \rightarrow U_t(\omega, \bar{\sigma}, t)$.

Задача (4.266) - (4.268) в просторі зображень, має вигляд:

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) + a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)U(\omega, \bar{\sigma}, t) = 0, \quad (4.270)$$

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = F(\omega, \bar{\sigma}) \rightarrow f(x, y). \quad (4.271)$$

Розв'язок задачі Коші (4.270), (4.271):

$$U(\omega, \bar{\sigma}, t) = F(\omega, \bar{\sigma}) e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t}. \quad (4.272)$$

За допомогою зворотного перетворення Фур'є знаходимо:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega, \bar{\sigma}) e^{-a^2(\omega^2 + \bar{\sigma}^2)t} \cos \bar{\sigma} y dy \right) d\omega.$$

Оскільки

$$F(\omega, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x, y) \cos \bar{\sigma} y dy \right) dx,$$

тоді

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega x} d\omega \int_0^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t} \cos \bar{\sigma} y d\bar{\sigma} \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\zeta, \eta) \cos \bar{\sigma} \eta d\eta \right) d\zeta \right)$$

або

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} f(\zeta, \eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega(x-\zeta)} d\omega \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\bar{\sigma}^2 t} \cos \bar{\sigma} y \cos \bar{\sigma} \eta d\bar{\sigma}. \quad (4.273)$$

Перетворимо в (4.273) внутрішній інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} \cos \bar{\sigma} y \cos \bar{\sigma} \eta \, d\bar{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} (\cos \bar{\sigma} (y + \eta) + \cos \bar{\sigma} (y - \eta)) \, d\bar{\sigma}.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t + i\omega(x-\zeta)} \, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}}, \quad (4.274)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\sigma}^2 t} \cos \bar{\sigma} y \cos \bar{\sigma} \eta \, d\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2 t}} \right). \quad (4.275)$$

Підставляючи (4.274) і (4.275) в (4.273), отримуємо розв'язок задачі:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y+\eta)^2}{4a^2 t}} \right) f(\zeta, \eta) \, d\eta.$$

Задача б.

$$T_{xx}(x, y, t) + T_{yy}(x, y, t) + T_{zz}(x, y, t) > 0 \quad (4.276)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a,$$

граничні умови

$$\begin{aligned} T(0, y, z) &= 0, \quad T(a, y, z) = 0, \\ T(x, 0, z) &= 0, \quad T(x, a, z) = T_0, \\ T(x, y, 0) &= 0, \quad T(x, y, a) = 0. \end{aligned} \quad (4.277)$$

Розв'язок.

Розглянемо перетворення $X = \frac{a}{\pi} x$, $Y = \frac{a}{\pi} y$, $Z = \frac{a}{\pi} z$, тоді отримуємо, що

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq \pi. \quad (4.278)$$

Застосуємо кінцеве синус-перетворення Фур'є по змінній x :

$$T(x, y, z) \rightarrow U(\omega, y, z) = \int_0^{\pi} T(x, y, z) \sin \omega x \, dx. \quad (4.279)$$

Знаходимо

$$T_{yy}(x, y, z) \rightarrow U_{yy}(\omega, y, z), \quad T_{zz}(x, y, z) \rightarrow U_{zz}(\omega, y, z). \quad (4.280)$$

Враховуючи граничні умови (4.277) і двічі інтегруючи по частинах, отримуємо:

$$T_{xx}(x, y, z) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, y, z). \quad (4.281)$$

Задача (4.276), (4.277) у просторі зображень запишеться у вигляді:

$$U_{yy}(\omega, y, z) + U_{zz}(\omega, y, z) - \omega^2 U(\omega, y, z) = 0, \quad (4.282)$$

$$U(\omega, \pi, z) = \int_0^\pi T_0 \sin \omega x dx = \begin{cases} 0, & \omega = 2n, \\ 2 \frac{T_0}{\omega}, & \omega = 2n + 1, \end{cases} \quad (4.283)$$

$$U(\omega, 0, z) = 0, \quad U(\omega, y, 0) = 0, \quad U(\omega, y, \pi) = 0.$$

До задачі (4.282), (4.283) застосовуємо кінцеве синус-перетворення Фур'є по змінній z . Враховуючи що $U(\omega, y, 0) = U(\omega, y, \pi) = 0$, отримуємо:

$$U_{zz}(\omega, y, z) \rightarrow -\omega^2 W(\omega, y, \bar{\sigma}). \quad (4.284)$$

Задача (4.282), (4.283) приводиться цим перетворенням до задачі:

$$W_{yy}(\omega, y, \bar{\sigma}) - (\bar{\sigma}^2 + \omega^2) W(\omega, y, \bar{\sigma}) = 0, \quad (4.285)$$

$$W(\omega, 0, \bar{\sigma}) = 0,$$

$$W(\omega, \pi, \bar{\sigma}) = \int_0^\pi \frac{2T_0}{2n+1} \sin \bar{\sigma} z dz = \frac{4T_0}{(2n+1)(2m+1)}. \quad (4.286)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.285) має вигляд:

$$W(\omega, y, \bar{\sigma}) = c_1(\omega, \bar{\sigma}) ch(\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \omega^2} y) + c_2(\omega, \bar{\sigma}) sh(\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \omega^2} y).$$

Користуючись (4.285), (4.286), знаходимо довільні функції:

$$c_1(\omega, \bar{\sigma}) = 0,$$

$$c_2(\omega, \bar{\sigma}) = \frac{4T_0}{(2n+1)(2m+1)} \frac{1}{sh(\pi \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \omega^2})}.$$

Отримаємо розв'язок задачі (4.285), (4.286):

$$W(\omega, y, \bar{\sigma}) = \frac{4T_0 sh(\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \omega^2} y)}{(2n+1)(2m+1) sh(\pi \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \omega^2})}. \quad (4.287)$$

За допомогою двічі зворотних кінцевих синус-перетворень по змінним

σ та ω для зображення (4.287) маємо:

$$U(\omega, y, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} W(\omega, y, \bar{\sigma}) \sin \bar{\sigma} z =$$

$$= \frac{8T_0}{\pi(2n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\omega^2 + (2m+1)^2\right)^{\frac{1}{2}} y}{(2m+1) \operatorname{sh} \pi \left(\omega^2 + (2m+1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sin(2m+1)z \quad (4.288)$$

та

$$T(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} U(\omega, y, z) \sin \omega x. \quad (4.289)$$

Підставляючи (4.287) в (4.289) і через перетворення (4.278), отримуємо розв'язок початкової задачі:

$$T(x, y, z) = \frac{16T_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} y \times \right.}{(2n+1)(2m+1) \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}} \left. \times \sin \frac{\pi}{a} (2n+1)x \sin \frac{\pi}{a} (2m+1)z \right). \quad (4.290)$$

Задача 7.

$$T_{xx}(x, y) + T_y(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a,$$

граничні умови:

$$\begin{aligned} T(0, y) &= 0, \quad T(a, y) = 0, \\ T(x, 0) &= 0, \quad T(x, a) = T_0. \end{aligned} \quad (4.291)$$

Розв'язок.

Користуючись кінцевим синус-перетворенням Фур'є функції $T(x, y)$ по змінній x , знаходимо, що $T_{xx}(x, y) \rightarrow -\omega^2 U(\omega, \sigma, t)$ та $T_{yy} \rightarrow U_{yy}(\omega, y)$. Тоді в просторі зображень отримуємо задачу:

$$U_{yy}(\omega, y) - \omega^2 U(\omega, y) = 0, \quad (4.292)$$

$$U(\omega, 0) = 0,$$

$$U(\omega, \pi) = \int_0^{\pi} T_0 \sin \omega x dx = \frac{2T_0}{2n+1}, \quad \omega = 2n+1, \quad (4.293)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.292) запишеться у вигляді:

$$U(\omega, y) = c_1(\omega) \operatorname{ch} \omega y + c_2(\omega) \operatorname{sh} \omega y.$$

За умов (4.293) знаходимо довільні функції $c_1(\omega)$ та $c_2(\omega)$:

$$c_1(\omega) = 0, \quad c_2(\omega) = \frac{2T_0}{(2n+1) \operatorname{sh} \pi(2n+1)}.$$

Тоді

$$U(\omega, y) = \frac{2T_0 \operatorname{sh}(2n+1)y}{(2n+1) \operatorname{sh} \pi(2n+1)}. \quad (4.294)$$

За допомогою зворотного кінцевого синус-перетворення для зображення знаходимо оригінал:

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2n+1)x \operatorname{sh}(2n+1)y}{(2n+1) \operatorname{sh} \pi(2n+1)}. \quad (4.295)$$

Враховуючи що $x = \frac{\pi}{a} X$ та $y = \frac{\pi}{a} Y$, отримуємо розв'язок задачі (4.291):

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(2n+1)x \operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(2n+1)y}{(2n+1) \operatorname{sh}(2n+1)a}. \quad (4.296)$$

Задача 8.

$$\frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4.297)$$

$$0 < r < +\infty, \quad 0 < z < \bar{h}, \quad 0 < t < +\infty,$$

з граничними умовами

$$-\lambda \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = q(r), \quad (4.298)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r, \bar{h})}{\partial z} + \alpha_1 T(r, \bar{h}) = \alpha_1 T_c, \quad (4.299)$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = \frac{\partial T(\infty, z)}{\partial r} = 0, \quad (4.300)$$

де $q(r) = q_0 e^{-kr^2}$ - тепловий потік від кругового джерела тепла (нормально розподілене по радіусу r).

Розв'язок.

Якщо за температуру відліку узяти T_c , то гранична умова (4.299) стає однорідною і розв'язок рівняння (4.297) можна представити у вигляді:

$$T(r, z) - T_c = R(r)Z(z). \quad (4.301)$$

Після підстановки цього виразу в рівняння (4.297) отримаємо

$$-\frac{\left[\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dR(r)}{dr} \right]}{R(r)} = \frac{\left[\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right]}{Z(z)}. \quad (4.302)$$

Оскільки r і z - незалежні змінні, ця рівність можлива, якщо його ліва і права частини постійні і дорівнюють деякій величині p^2 . Тоді отримаємо два звичайних однорідних диференціальних рівняння:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dR(r)}{dr} + p^2 R(r) = 0, \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - p^2 Z(z) = 0 \quad (4.303)$$

з граничними умовами (4.298) - (4.300) відповідно, з яких визначаються постійні в загальних розв'язках цих рівнянь:

$$R(r) = C_1 J_0(pr) + C_2 Y_0(pr), \quad Z(z) = D_1 \cdot ch pz + D_2 \cdot sh pz. \quad (4.304)$$

Оскільки функція Бесселя $Y_0(pr)$ необмежено зростає при $r \rightarrow 0$, а $dJ_0(pr)/dr \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$, умови (4.300) задовольняються при $C_2 = 0$ і будь-якому значенні C_1 . Із співвідношення (4.299) отримуємо:

$$D_2 = D_1 \frac{p sh p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} \right) ch p\bar{h}}{p ch p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} \right) sh p\bar{h}}. \quad (4.305)$$

Область розв'язку задачі у напрямі r є напівобмеженою ($0 \leq r < +\infty$). Тому параметр p змінюється безперервно в межах $0 \leq p < +\infty$, і в результаті замість формули (4.301) з урахуванням співвідношення (4.305) знаходимо:

$$T(r, z) - T_c = \int_0^{\infty} A(p) J_0(pr) \frac{p ch p(\bar{h} - z) + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} \right) sh p(\bar{h} - z)}{p ch p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} \right) sh p\bar{h}} dp, \quad (4.306)$$

де $A(p) = C_1 D_1$ - не залежна від координат величина, що є функцією тільки

параметра p . Вони визначається з граничної умови (4.298), яка після підстановки в нього формули (4.306) набуває вигляду:

$$-\lambda \frac{\partial T(r,0)}{\partial z} = \lambda \int_0^{\infty} A(p) J_0(pr) \frac{p \operatorname{sh} p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda}\right) \operatorname{ch} p\bar{h}}{p \operatorname{ch} p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda}\right) \operatorname{sh} p\bar{h}} dp = q(r).$$

Із зіставлення цього виразу з інтегралом Фур'є-Бесселя:

$$q(r) = \int_0^{\infty} J_0(pr) p dp \int_0^{\infty} q(r') J_0(pr') r' dr'$$

отримуємо

$$A(p) = \frac{1}{\lambda} \frac{p \operatorname{ch} p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda}\right) \operatorname{sh} p\bar{h}}{p \operatorname{sh} p\bar{h} + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda}\right) \operatorname{ch} p\bar{h}} \int_0^{\infty} q(r) J_0(pr) r dr. \quad (4.307)$$

(звідки матимемо

$$\int_0^{\infty} q(r) J_0(pr) r dr = q_0 \int_0^{\infty} J_0(pr) e^{-k^2 r^2} r dr = q_0 \frac{e^{-\frac{(p/k)^2}{4}}}{2k^2}. \quad (4.308)$$

Підстановка двох останніх співвідношень у формулу (4.299) дає розв'язок початкової задачі:

$$T(r,z) = T_c + \frac{q_0}{2\lambda k^2} \int_0^{\infty} J_0(pr) \frac{p \operatorname{ch} p(\bar{h}-z) + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \operatorname{sh} p(\bar{h}-z)}{p \operatorname{sh} p\bar{h} + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \operatorname{ch} p\bar{h}} e^{-\left(\frac{p}{2k}\right)^2 z} dp. \quad (4.309)$$

4.4.2 Розв'язок трьохвимірних задач теплопровідності

Тривимірні задачі теплопровідності (особливо в циліндровій і сферичній системах координат) є найбільш складними в порівнянні з одно- і двовимірними задачами, як з погляду отримання кінцевих аналітичних рішень, так і при розрахунку температурних полів в різних тілах з оптичних матеріалів. У цьому розділі розглядаються як приклади наступні дві задачі теплопровідності в циліндровій і сферичній системі координат.

Задача 1 (охолодження циліндра).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (4.310)$$

$$0 < r < R, \quad 0 < t < +\infty,$$

за граничної умови: $T|_{r=R} = 0$ (4.311)

і за початкової умови: $T|_{t=0} = \varphi(r, \theta, z)$. (4.312)

Розв'язок.

Шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді добутку:

$$T(r, \theta, z, t) = \tilde{A}(t) \omega(r) \hat{O}(\theta) Z(z). \quad (4.313)$$

Підставляючи (4.313) в рівняння (4.310), отримаємо:

$$\frac{\tilde{A}'(t)}{a^2 \tilde{A}(t)} = \frac{\omega''(r) + \frac{1}{r} \omega'(r)}{\omega(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\hat{O}''(\theta)}{\hat{O}(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)}, \quad (4.314)$$

звідки

$$Z''(z) + \bar{\lambda}^2 Z(z) = 0, \quad \hat{O}''(\theta) + m^2 \hat{O}(\theta) = 0, \quad (4.315)$$

$$\omega''(r) + \frac{1}{r} \omega'(r) + \left(\bar{k}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \omega(r) = 0,$$

$$\tilde{A}'(t) + a^2 (\bar{k}^2 + \bar{\lambda}^2) \tilde{A}(t) = 0,$$

де $\bar{\lambda}$, m та \bar{k} – довільні постійні.

Загальні розв'язки цих рівнянь мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} Z(z) &= C_1 \cos \bar{\lambda} z + C_2 \sin \bar{\lambda} z, \\ \hat{O}(\theta) &= C_3 \cos m\theta + C_4 \sin m\theta, \\ \omega(r) &= C_5 J_m(\bar{k}r) + C_6 Y_m(\bar{k}r), \\ \tilde{A}(t) &= C_7 e^{-a^2(\bar{k}^2 + \bar{\lambda}^2)t}. \end{aligned} \quad (4.316)$$

Оскільки температура усередині циліндра є, очевидно, періодична функція від кута θ з періодом 2π , тоді постійна m повинна бути цілим числом. Далі, постійна C_6 повинна дорівнювати нулю, оскільки інакше температура звертатиметься в нескінченність на осі циліндра, що, звичайно, неможливо. Що стосується постійної \bar{k} , то вона визначається з граничної

умови (4.311), яка зводить до рівняння:

$$J_m(\bar{k}R) = 0. \quad (4.317)$$

Звідси витікає, що постійна \bar{k} має нескінченну безліч значень, визначуваних формулою:

$$\bar{k}_{mi} = \frac{\mu_{mi}}{R} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.318)$$

де $\mu_{m1}, \mu_{m2}, \mu_{m3}, \dots$ – позитивні корні рівняння.

$$J_m(\mu) = 0. \quad (4.319)$$

Оскільки на параметр $\bar{\lambda}$ ніяких обмежень немає, то його можна вважати абсолютно довільним, таким, що змінюється безперервно в інтервалі $-\infty \dots +\infty$.

Візьмемо суму всіх часткових розв'язків виду (4.313), тобто суму виду

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(\bar{k}_{mi}^2 + \bar{\lambda}^2)t} \left\{ \left[A_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + B_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] \cos m\theta + \right. \\ \left. + \left[C_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + D_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] \sin m\theta \right\} J_m(\bar{k}_{mi}r) d\bar{\lambda}. \quad (4.320)$$

Для визначення функцій $A_{mi}(\bar{\lambda})$ і так далі покладемо $t = 0$, тоді через початкову умову (4.312), матимемо

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{0i}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + B_{0i}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] J_0(\bar{k}_{0i}r) d\bar{\lambda} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} J_m(\bar{k}_{mi}r) \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + B_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] d\bar{\lambda} \right\} \cos m\theta + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} J_m(\bar{k}_{mi}r) \int_{-\infty}^{\infty} \left[C_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + D_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] d\bar{\lambda} \right\} \sin m\theta. \quad (4.321)$$

Порівнюючи останню рівність з розкладанням $\varphi(r, \theta, z)$, розглядаючи її як функцію від θ , у ряд по синусах і косинусах в проміжку $(0, 2\pi)$, отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta, z) d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\bar{k}_{0i}r) \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{0i}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + B_{0i}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] d\bar{\lambda}, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta, z) \cos m\theta d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_m(\bar{k}_{mi}r) \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda}z + B_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda}z \right] d\bar{\lambda},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta, z) \sin m\theta d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_m(\bar{k}_{mi} r) \int_{-\infty}^{\infty} [C_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} z + D_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} z] d\bar{\lambda}.$$

Кожна з цих рівностей є розкладанням довільної функції $\psi(r)$ у ряд виду

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right), \quad (4.322)$$

де m є ціле позитивне число або нуль.

Коефіцієнти a_i визначаються за формулою:

$$a_i = \frac{2}{R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R r \varphi(r) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) dr, \quad (4.323)$$

де μ_{mi} – позитивний корінь рівняння (4.319). З формули (4.323) витікає, що

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [A_{0i}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} z + B_{0i}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} z] d\bar{\lambda} &= \frac{1}{\pi R^2 J_1^2(\mu_{0i})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r \varphi(r, \theta, z) J_0\left(\frac{\mu_{0i} r}{R}\right) dr d\theta, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [A_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} z + B_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} z] d\bar{\lambda} &= \frac{2}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r \varphi(r, \theta, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \cos m\theta dr d\theta \\ &\int_{-\infty}^{\infty} [C_{mi}(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} z + D_{mi}(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} z] d\bar{\lambda} = \\ &= \frac{2}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} r \varphi(r, \theta, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \sin m\theta dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.324)$$

Таким чином, ми прийшли до виразів, які мають наступний вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a(\bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} z + b(\bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} z] d\bar{\lambda} = \omega(z), \quad (4.325)$$

де $\omega(z)$ – задана функція.

При цьому функції $a(\bar{\lambda})$ та $b(\bar{\lambda})$ мають наступний вигляд [18, 103]:

$$a(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \cos \bar{\lambda} \xi d\xi, \quad b(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \sin \bar{\lambda} \xi d\xi. \quad (4.326)$$

З цих формул витікають вирази шуканих функцій $A_{0i}(\bar{\lambda})$, $B_{0i}(\bar{\lambda})$, $A_{mi}(\bar{\lambda})$, $B_{mi}(\bar{\lambda})$, $C_{mi}(\bar{\lambda})$, $D_{mi}(\bar{\lambda})$, а саме:

$$\begin{aligned}
A_{mi}(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{\delta_m \pi^2 R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r \varphi(r, \theta_1, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \cos m\theta_1 \cos \bar{\lambda} \xi dr d\theta_1 d\xi, \\
B_{mi}(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{\delta_m \pi^2 R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r \varphi(r, \theta_1, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \cos m\theta_1 \sin \bar{\lambda} \xi dr d\theta_1 d\xi, \\
C_{mi}(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{\pi^2 R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r \varphi(r, \theta_1, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \sin m\theta_1 \cos \bar{\lambda} \xi dr d\theta_1 d\xi, \\
D_{mi}(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{\pi^2 R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r \varphi(r, \theta_1, z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right) \sin m\theta_1 \sin \bar{\lambda} \xi dr d\theta_1 d\xi, \quad (4.327)
\end{aligned}$$

де $\delta_0 = 2$ та $\delta_m = 1$ при $m > 0$.

Якщо внести ці вирази до ряду (4.320) і виконати інтеграцію за $\bar{\lambda}$, використовуючи інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \bar{\lambda}^2} \cos \beta \bar{\lambda} d\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}},$$

то отримаємо розв'язок задачі (4.310) - (4.312) у вигляді:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\alpha \pi R^2 \sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha \mu_{mi}}{R}\right)^2 t} \frac{J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right)}{\delta_m J_{m+1}^2(\mu_{mi})} \\
&\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \varphi(r, \theta_1, \xi) e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2 t}} J_m\left(\frac{\mu_{mi} \rho}{R}\right) \cos m(\theta - \theta_1) \sin \bar{\lambda} \xi d\rho d\theta_1 d\xi. \quad (4.328)
\end{aligned}$$

Задача 2 (охолодження сфери).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right), \quad (4.329)$$

$$0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < t < +\infty$$

при виконанні умов

$$T|_{r=R} = 0, \quad (4.330)$$

$$T|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi). \quad (4.331)$$

Шукаємо часткові розв'язки рівняння (4.329) у вигляді

$$T = \tilde{A}(t) v(r, \theta, \varphi). \quad (4.332)$$

Підставляючи це в (4.329), отримуємо:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\tilde{A}'(t)}{a^2 \tilde{A}(t)} = -\bar{k}^2,$$

звідки маємо два рівняння:

$$\tilde{A}'(t) + a^2 \bar{k}^2 \tilde{A}(t) = 0, \quad (4.333)$$

$$\Delta v + \bar{k}^2 v = 0, \quad (4.334)$$

де

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

Щоб отримати відмінні від нуля (нетривіальні) розв'язки рівняння (4.329) вигляду (4.332), що задовольняють граничній умові (4.330) необхідно знайти нетривіальні розв'язки рівняння (4.334), що задовольняють граничній умові

$$v|_{r=0} = 0. \quad (4.335)$$

Розв'язок рівняння (4.334), що задовольняє граничній умові (4.335), шукатимемо у вигляді:

$$v = \hat{O}(r) Y(\theta, \varphi). \quad (4.336)$$

Підставляючи вираз (4.336) в рівняння (4.334) і розділяючи змінні, отримаємо:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \bar{\lambda} Y = 0. \quad (4.337)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{O}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{O}(r)}{\partial r} + \left(\bar{k}^2 - \frac{\bar{\lambda}}{r^2} \right) \hat{O}(r) = 0. \quad (4.338)$$

Розв'язуючи рівняння (4.337) за умови обмеженості на всій поверхні сфери, набуваємо власних значень:

$$\bar{\lambda} = n(n+1), \quad (4.339)$$

яким відповідають сферичні функції.

$$P_n(\cos \theta), P_{nm}(\cos \theta) \cos m\varphi, P_{nm}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (4.340)$$

Розглянемо тепер рівняння (4.338). Враховуючи рівність (4.39), граничну умову (4.336), а також обмеженість розв'язку при $r = 0$, отримаємо для функції $\hat{\Phi}(r)$ наступну граничну задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{O}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{O}(r)}{\partial r} + \left(\bar{k}^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \hat{O}(r) = 0, \quad (4.341)$$

$$\hat{O}(0) < \infty, \quad \hat{O}|_{r=R} = 0. \quad (4.342)$$

За допомогою підстановки

$$\hat{O}(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}} \quad (4.343)$$

рівняння (4.341) зводиться до рівняння Бесселя [103]:

$$r^2 y'' + ry' + \left(\bar{k}^2 r^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) y = 0, \quad (4.344)$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$y = AJ_{n+\frac{1}{2}}(\bar{k}r) + BY_{n+\frac{1}{2}}(\bar{k}r), \quad (4.345)$$

де A, B - довільні постійні.

З умови обмеженості розв'язку виходить, що $B = 0$. Гранична умова (4.342) дає

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}(\bar{k}R) = 0. \quad (4.346)$$

Оскільки ми шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (4.338), то $A \neq 0$ і, отже

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\bar{k}R) = 0. \quad (4.347)$$

Позначивши через $\mu_{n1}, \mu_{n2}, \mu_{n3}, \dots$ позитивні корні трансцендентного рівняння

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \quad (4.348)$$

знаходимо власні значення

$$\bar{k}_{mn}^2 = \left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2, \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right). \quad (4.349)$$

Кожному власному значенню \bar{k}_{mn}^2 граничної задачі (4.334) – (4.335) відповідає $(2n+1)$ власних функцій

$$v_{nmj}(r, \theta, \varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)}{\sqrt{r}} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \quad (4.350)$$

$$(j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n),$$

де покладено, що

$$Y_n^{(v)}(\theta, \varphi) = P_{nv_0}(\cos \theta) \cos v_0 \varphi, \quad Y_n^{(-v_0)}(\theta, \varphi) = P_{nv_0}(\cos \theta) \sin v_0 \varphi,$$

$$(v_0 = 0, 1, 2, \dots, n).$$

При $\bar{k} = \bar{k}_{mn}$ загальний розв'язок рівняння (4.333) має вигляд

$$\tilde{A}_{mn}(t) = A_{mn} e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}, \quad (4.351)$$

де A_{mn} – довільна постійна.

Таким чином, в силу, (4.350) і (4.351), всі функції вигляду:

$$T_{nm}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right) Y_n(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}} e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}, \quad (4.352)$$

$$\text{де } Y_n(\theta, \varphi) = a_{0m} P_n(\cos \theta) + \sum_{\bar{k}=1}^n (a_{\bar{k}m} \cos \bar{k} \varphi + b_{\bar{k}m} \sin \bar{k} \varphi) P_{n\bar{k}}(\cos \theta) \quad (4.353)$$

– сферична функція порядку n , задовольняють рівнянню (4.329) і граничній умові (4.330) при будь-яких постійних a_{0m} , $a_{\bar{k}m}$ та $b_{\bar{k}m}$ та $d_{\bar{k}m}$.

Складемо тепер ряд

$$T(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}}{\sqrt{r}} Y_n(\theta, \varphi) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right). \quad (4.354)$$

Вимагаючи виконання початкової умови (4.331), отримаємо:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right). \quad (4.355)$$

Щоб знайти сферичні функції $Y_n(\theta, \varphi)$ у розкладанні (4.355), помножимо обидві частини цього розкладання на $P_{\bar{k}}(\cos \bar{\gamma})$ і проінтегруємо по поверхні сфери одиничного радіусу.

Тоді отримаємо:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') P_{\bar{k}}(\cos \bar{\gamma}) d\bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)}{\sqrt{r}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_n(\theta', \varphi') P_{\bar{k}}(\cos \bar{\gamma}) d\bar{\sigma}. \quad (4.356)$$

Зважаючи на формули:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_n(\theta', \varphi') P_{\bar{k}}(\cos \bar{\gamma}) d\bar{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{і } \delta \bar{k} \neq n, \\ \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta, \varphi) & \text{і } \delta \bar{k} = n \end{cases} \quad (4.357)$$

ми можемо вираз (4.356) переписати у вигляді:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi) P_{\bar{k}}(\cos \bar{\gamma}) d\bar{\sigma} = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}$$

або

$$\frac{(2n+1)\sqrt{r}}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi) P_n(\cos \bar{\gamma}) d\bar{\sigma} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right). \quad (4.358).$$

Порівняємо це розкладання з розкладанням довільної функції $F(r)$ в ряд згідно функцій Бесселя [103]:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right), \quad (4.359)$$

де

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+\frac{3}{2}}^2(\mu_{nm})} \int_0^R r F(r) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right); \quad (4.360)$$

μ_{nm} – позитивні корні рівняння (4.348).

З порівнянь рядів (4.358) і (4.359) знаходимо шуканий вираз для сферичних функцій $Y_n(\theta, \varphi)$, а саме:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2 J_{n+\frac{3}{2}}^2(\mu_{nm})} \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^{\frac{3}{2}} f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos \bar{\gamma}) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right) d\bar{\sigma} dr. \quad (4.361)$$

Таким чином, розв'язок задачі (4.329) - (4.331) буде ряд (4.354), в якому сферичні функції $Y_n(\theta, \varphi)$ визначаються за формулою (4.361).

Таким чином, розв'язання навіть простих лінійних двовірних і тривірних задач теплоперенесення в різних тілах відомими методами

інтегральних перетворень Фур'є і розділення змінних є достатньо трудомістким, а кінцеві вирази для температури (особливо, у разі тривимірних температурних полів) - вельми складними для розрахунків. Тому в даний час аналітичні вирази для розрахунків температури використовуються, в основному, для випадку одновимірних температурних полів, а для розрахунків двовірних і тривимірних температурних полів - використовують або існуючі обчислювальні пакети прикладних програм (наприклад, MathCad) або розробляють нові спеціалізовані пакети прикладних програм, що орієнтовані на сучасні комп'ютери і зважають на специфіку даних задач теплоперенесення.

Контрольні питання та завдання:

1. Сформулювати послідовність виконання інтегральних перетворень Фур'є.
2. В чому полягає послідовність розв'язання задачі охолодження оптичного виробу після його нерівномірної поверхневої обробки ?
3. Пояснити послідовність розв'язання задачі нагріву оптичного виробу рухомим джерелом теплової дії.
4. Сформулювати послідовність розв'язання задачі теплопровідності для напівобмеженого тіла.
5. В чому сенс задачі нагріву виробу при багатоциклового русі джерела тепла ?
6. Пояснити виникнення конвекційного теплообміну між потоком рідини (газу) та охолодженою поверхнею оптичного елемента.
7. Сформулювати основні поняття методу розділення змінних.
8. Показати практичне застосування методу розділення змінних.
9. Поясніть процес перетворення неоднорідних граничних умов до однорідних при використанні методу розділення змінних.
10. Поясніть перетворення залежних від часу граничних умов в нульові.

11. В чому полягає послідовність розв'язання складних задач теплопровідності методом розділення змінних.
12. Сформулювати послідовність розв'язання неоднорідних задач теплопровідності методом розкладання за власними функціями.
13. Пояснити послідовність розв'язання двохвимірних задач теплопровідності методом інтегральних перетворень Фур'є та методом розділення змінних.
14. Пояснити послідовність розв'язання тривимірних задач теплопровідності методом інтегральних перетворень Фур'є та методом розділення змінних.
15. Сформулювати задачу теплової дії рухомого джерела тепла на поверхню одно-, двох- або тривимірного тіла із оптичного матеріалу.

**Розділ 5 СУТНІСТЬ МЕТОДУ ТЕПЛООВОГО ВПЛИВУ НИЗЬКО-
ЕНЕРГЕТИЧНОГО СТРІЧКОВОГО ЕЛЕКТРОННОГО
ПОТОКУ НА ОПТИЧНІ МАТЕРІАЛИ**

5.1 Нормативні вимоги до якості оптичних виробів

Вироби з оптичного скла. Для виготовлення виробів різних галузей точного приладобудування (інтегральної та волоконної оптики, мікрооптики, оптоелектроніки тощо) застосовують оптичне скло, безкольорове та кольорове, кварцове оптичне скло, кристали, пластмаси та інші матеріали [22, 35]. В основному, вказані вироби виготовляють з оптичного безкольорового скла [35], яке поставляється у заготівках розміром (діаметром, або найбільшою стороною) не більше 0,5 м наступних основних типів: ЛК – легкий крон, БК – баритовий крон, ТФ – важкий флінт тощо (таблиця 5.1).

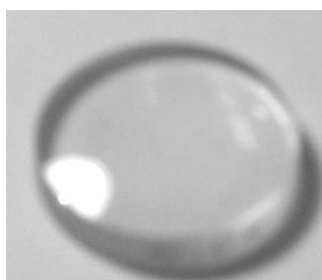
Таблиця 5.1 - Хімічний склад оптичного скла

Вміст компонентів, %	Оптичне скло		
	Крони (К8)	Баритові (БК10)	Фосфатні (ТФ110)
SiO ₂	72,0	49,5	–
B ₂ O ₃	8,1	4,8	3,0
K ₂ O	10,5	7,6	12,0
Al ₂ O ₃	–	–	10,0
As ₂ O ₃	0,2	0,2	0,5
BaO	–	21,6	–
ZnO	–	12,5	–
MgO	0,5	–	4,0
PbO	–	2,6	–
Na ₂ O	7,2	–	–
CaO	1,5	–	–
P ₂ O ₅	–	–	70,5

При цьому скло виготовляють двох серій: звичайне – з нумерацією марок від 1 до 99; малотемніюче під впливом іонізуючого випромінювання – з нумерацією марок від 100 до 199. Марки скла, оптичні та фізико-хімічні

характеристики, що їм відповідають, докладно подані в таблицях, які наведені в роботі [117]. Цікавим прикладом застосування оптичного скла є деталі з нанесеними покриттями. Найбільш простими є одношарові металеві покриття. Їх характеристика і технічні вимоги: одношарові металеві покриття, які наносяться із залишковим коефіцієнтом пропускання $\approx 5\%$, чистота полірованої поверхні деталі (основи), на яку наносять покриття, відповідно до ГОСТ 11141-76, по механічній міцності: покриття, які нанесені на оптичні деталі, слід відносити до 1 групи (ОСТУ 3-1901-85), покриття повинні витримувати перепад температур від $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $60\text{ }^{\circ}\text{C}$, покриття, нанесені на оптичні деталі, повинні бути стійкі до вологої атмосфери при температурі $30\pm 2\text{ }^{\circ}\text{C}$ і відносної вологості 75–80%.

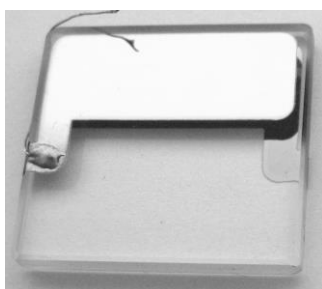
В точному приладобудуванні використовуються елементи з оптичного скла різних розмірів (тонкоплівкові елементи, тонкі пластини великих розмірів, бруски, прямокутні елементи): товщиною $H = 0,002\dots 0,02\text{ м}$; шириною $B = 0,003\dots 0,09\text{ м}$; довжиною $L = 0,02\dots 0,1\text{ м}$ (рис. 5.1).



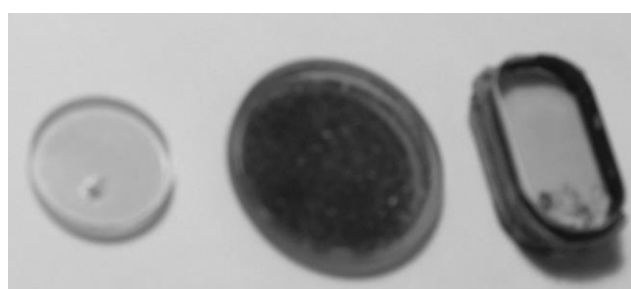
Лінзи



Оптичні пластини



Елементи з нанесеними плівками



Світлофільтри

Рисунок 5.1 – Загальний вигляд виробів з оптичного скла

Основними оптичними матеріалами, які використовуються в промисловості, є оптичне скло марок К8, К108, БК10, ТК21. Властивості цих матеріалів визначені стандартом ГОСТ 3514-76 і описані в довідковій

літературі [117]. Вирізняють наступні групи властивостей оптичного скла: оптичні, термооптичні, теплотехнічні, механічні, хімічні, електричні. Дані групи властивостей по різному впливають на експлуатаційні та технологічні характеристики скла, залежно від призначення та методу обробки скляної деталі.

При виготовленні оптичних деталей найбільш важливими є оптичні (коефіцієнти поглинання, віддзеркалення, пропускання, показник заломлення, середня дисперсія) та термооптичні (наприклад, залежність показника заломлення від температури) властивості скла. При виготовленні з оптичного скла елементів датчиків найбільш важливими є механічні (густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона) та електричні (питомий об'ємний та поверхневий опір, діелектрична проникність) властивості скла, а також залежно від середовища в якому працює виріб – хімічні (хімічна стійкість до дії атмосфери та агресивних середовищ) або теплотехнічні (коефіцієнт лінійного розширення, питома теплоємність та інші).

Серед методів обробки оптичного скла особливе значення мають методи поверхневої обробки, оскільки найважливіші показники якості виробів з оптичного скла визначаються саме станом його поверхні. Одним з найбільш перспективних методів поверхневої обробки є метод електронно-променевої обробки стрічковим електронним потоком.

Найбільш важливого значення при електронно-променевої обробці набувають теплотехнічні та електричні властивості оптичного скла (коефіцієнт теплопровідності λ , об'ємна теплоємність C_V , Дж/м³·К, коефіцієнт термічного розширення α_V , К⁻¹; діелектрична проникність ϵ , питома об'ємна електропровідність γ , См/м, питома поверхнева електропровідність γ_S , См).

Найбільш поширеним і дешевим оптичним склом є скло К8, яке відноситься до кронів і містить такі основні елементи: 72% SiO₂, 10,5% K₂O, 8,1% B₂O₃ та 7,2% Na₂O.

Згідно з існуючими експериментальними даними [11], серед зазначених вище параметрів лише α_V зі збільшенням температури нагріву змінюється не істотно, а параметри C_V , λ , ε , γ , γ_S істотно залежать від температури нагріву і тому при розгляді всіх теплофізичних та електричних процесів в оптичних матеріалах при електронно-променевої обробці необхідно враховувати їх температурні залежності.

В нинішній час оцінка якості розглядуваних виробів (оптичних пластин, прямокутних елементів тощо) після їх фінішної поверхневої обробки проводиться по наступним основним критеріям [100]: дефекти на поверхні та товщина дефектного приповерхневого шару; досконалість геометричної форми (неплощинність, прогин); залишкові мікронерівності на поверхні; відповідність заданій товщині в межах допуску.

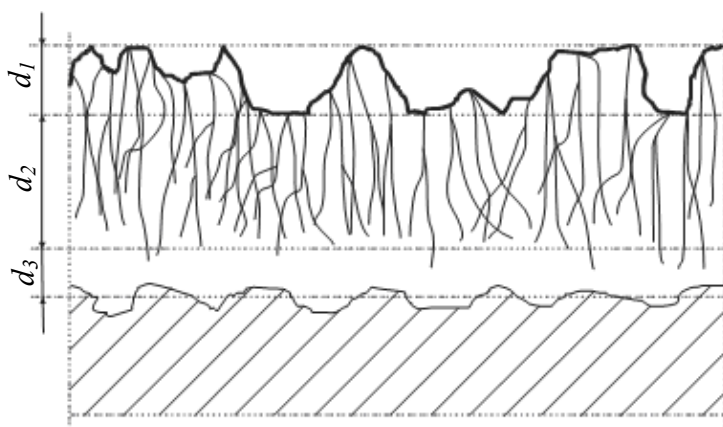


Рисунок 5.2 – Структура дефектного приповерхневого шару:

- d_1 – товщина рельєфного шару;
- d_2 – товщина тріщинуватого шару;
- d_3 – товщина напруженого шару;
- $d = d_1 + d_2 + d_3$ – товщина дефектного шару

Дефекти на поверхні та товщина дефектного приповерхневого шару (рис. 5.2) визначаються відомими методами фізичного аналізу (методами растрової електронної мікроскопії, мікрозондового аналізу, рентгенографічними або електроннографічними методами) [114]. Основні види порушень форми виробів показані на рис. 5.3.

Відхилення від площинності (неплощинність) δn – це найбільша відстань від точок реального профілю (або реальної поверхні) до прилеглої прямої або площини (рис. 5.3 а, б). Відхилення від площинності виникає внаслідок нерівномірного інтенсивного випаровування розплаву скла вздовж поверхні виробу, що призводить до її значної деформації внаслідок значних реактивних ефектів від потоків пари речовини, що випаровується.

При цьому проведені широкі технологічні експерименти з відпрацювання режимів електронного впливу на оптичне скло показали, що вказані вище відхилення від площинності спостерігаються при температурах в зоні обробки (максимальних температурах обробки) $T_m > T_m^*$, коли різко зростає текучість скла (визначається по залежності коефіцієнта в'язкості від температури $\eta(T)$, наприклад, для скла К8 – $T_m^* = 1400$ К).

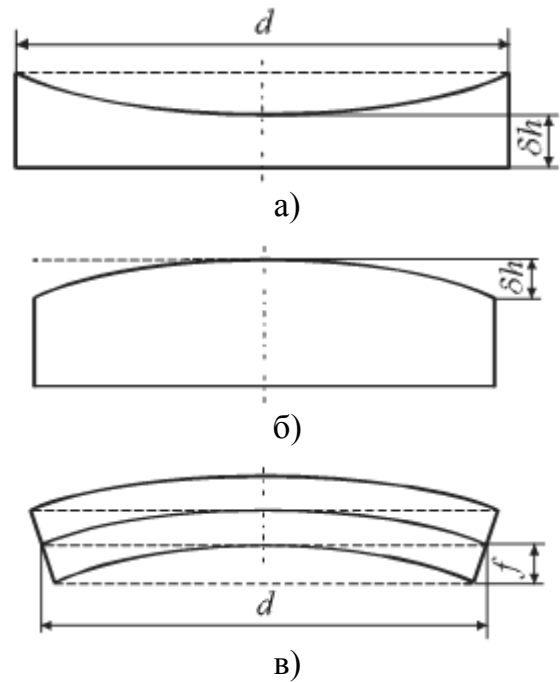


Рисунок 5.3 – Основні види порушень форми виробів

Прогин виробу f – найбільша відстань від точок реального профілю в радіальному перерізу до відповідної сторони прилягаючого профілю (рис. 5.3). Прогин виробу викликається перевищенням різниці залишкових термонапружень на оброблюваній та необроблюваній сторонах деякого критичного значення σ_c^* (ефект Тваймена). Крім того, внаслідок внутрішніх напружень може виникати таке небажане явище, як подвійне променезаломлення.

При цьому, в результаті поведених технологічних експериментів [29], було встановлено, що при високих температурах попереднього нагріву оптичного скла (до 900 К), рівень залишкових напружень у склі для робочих діапазонів зміни технологічних параметрів електронно-променевої обробки (густини теплового потоку $F_n = 10^7 \dots 8 \cdot 10^7$ т/м² та швидкостей переміщення електронного потоку $V = 5 \cdot 10^{-3} \dots 5 \cdot 10^{-2}$ м/с) не перевищує, наприклад, для скла К8 значень $\sigma_c^* = 2,5 \cdot 10^5 \dots 3,5 \cdot 10^6$ Н/м² (рис. 5.4). Контроль порушень форми поверхні виробів проводять на проміжних операціях обробки та після фінішної обробки. На фінішній стадії обробки контроль порушень форми

виробів для запобігання ушкоджень поверхні проводиться безконтактними оптичними або фотоелектричними методами [28].

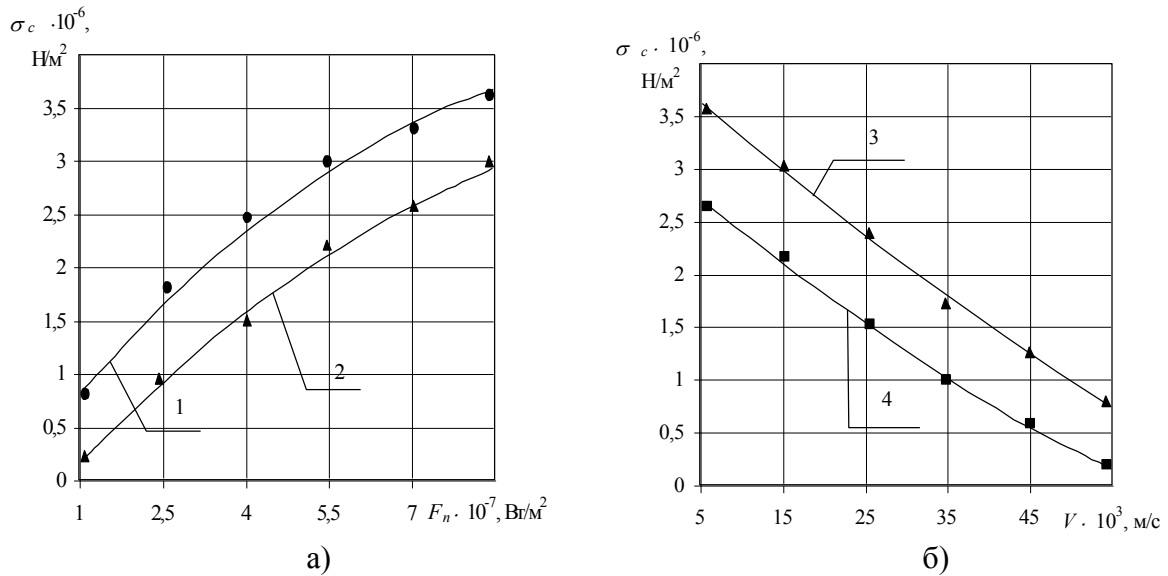


Рисунок 5.4 – Вплив технологічних параметрів електронно-променевої обробки оптичного скла К8 на величину залишкових напружень: а) – вплив густини теплового потоку F_n (1 – $V = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$, 2 – $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$); б) – вплив швидкості переміщення електронного потоку V (3 – $F_n = 8 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$, 4 – $F_n = 10^7 \text{ Вт/м}^2$)

Залишкові мікронерівності на поверхні (шорсткість) оцінюються або по середньому арифметичному відхиленню профілю Ra від базової площини, або по висоті мікронерівностей Rz . В деяких випадках для оцінки шорсткості використовують додаткові параметри: R_{max} – найбільшу висоту нерівностей профілю; S_m – середній крок нерівностей профілю; S – середній крок нерівностей по вершинам. Середнє арифметичне відхилення Ra – це середнє значення відстаней $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ від точок профілю до його середньої лінії в межах базової довжини \vec{l} (рис. 5.5), причому ці відстані додаються без урахування знаку. Висота нерівностей Rz – середня відстань між п'ятьма точками виступів та п'ятьма точками западин в межах базової довжини l , що виміряна від лінії A , паралельної середній лінії:

$$Rz = \frac{(h_1 + h_2 + \dots + h_9) - (h_2 + h_4 + \dots + h_{10})}{5}. \quad (5.1)$$

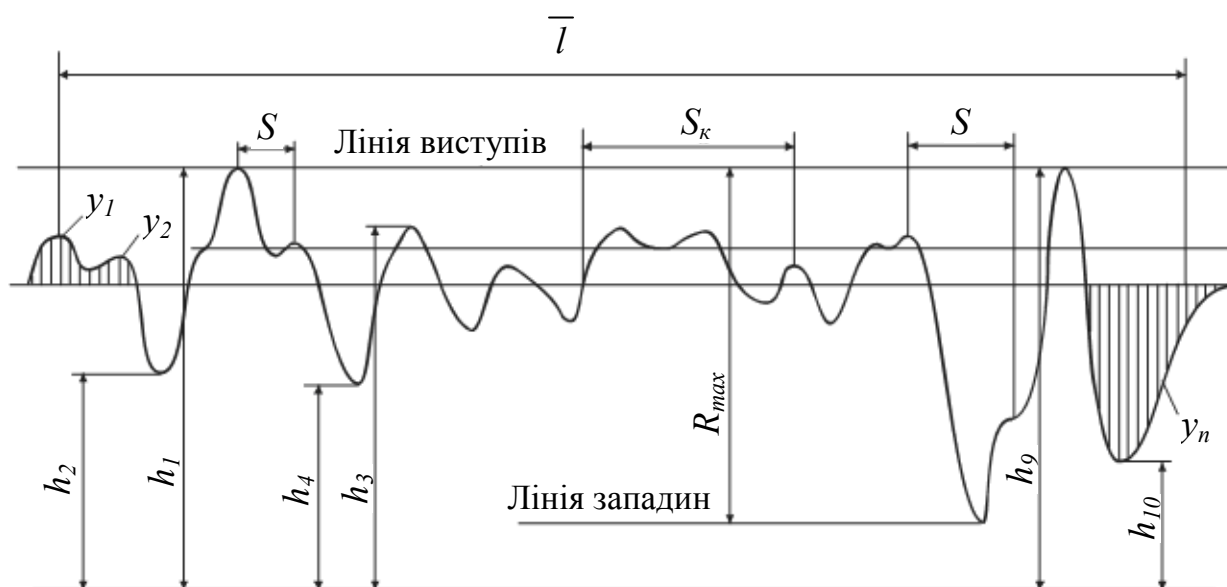


Рисунок 5.5 – До вимірювання параметрів, які характеризують залишкові мікронерівності на поверхні (шорсткість поверхні)

При цьому базовою довжиною \bar{l} називається мінімальна довжина ділянки поверхні, що використовується для вимірювання нерівностей, які характеризують шорсткість поверхні. Оцінюють шорсткість або порівнянням поверхні виробу з еталоном, або безпосереднім вимірюванням висоти нерівностей. При цьому поверхні з мікронерівностями в десятки та сотні мікрметрів контролюють за допомогою профілографів-профілометрів, принцип дії яких оснований на контактному повторенні алмазною голкою профілю поверхні з подальшим індукційним перетворенням її переміщень в електричні сигнали.

Для реєстрації мікронерівностей порядку одиниць та десятих часток мікрметрів використовують інтерферометри Лінніка, наприклад, «МІІІ-4», а для реєстрації мікронерівностей порядку одиниць та десятків нанометрів – методи атомно-силової мікроскопії, які базуються на скануванні ділянки плоскої поверхні зразка, що дозволяють отримувати зображення топограми досліджуваної поверхні оптичних виробів [114].

Існуючі експериментальні дані [59] показують, що для вказаних вище (див. рис. 5.4) діапазонів зміни технологічних параметрів обробки, які реалізуються на використаному технологічному електронно-променевому

обладнанні, значення Ra не перевищують величину Ra^* (наприклад, для скла К8 значення $Ra^* = 3,5 \dots 5,0$ нм (рис. 5.6).

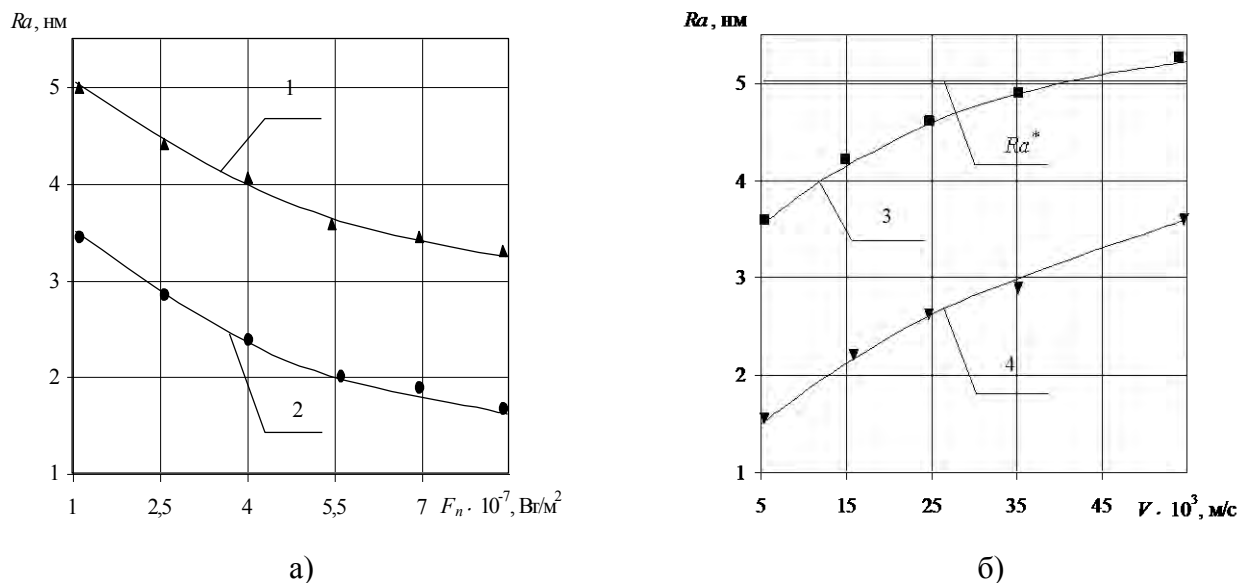


Рисунок 5.6 – Вплив технологічних параметрів електронно-променевої обробки оптичного скла К8 на величину залишкових мікронерівностей на поверхні: а) – вплив густини теплового потоку F_n (1 – $V=5 \cdot 10^{-3}$ м/с, 2 – $V = 5 \cdot 10^{-2}$ м/с); б) – вплив швидкості переміщення електронного потоку V (3 – $F_n = 10^7$ Вт/м², 4 – $F_n = 8 \cdot 10^7$ Вт/м²)

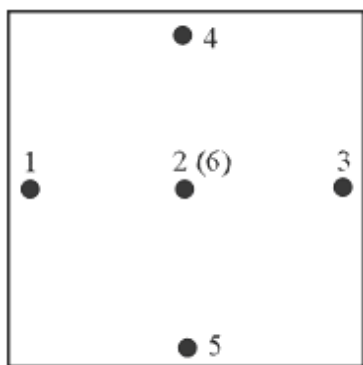


Рисунок 5.7 – Розташування контрольних точок при вимірюванні товщини виробу

Контроль товщини виробу на проміжних та заключній стадіях обробки проводять в декількох точках поверхні (рис. 5.7). Як показали технологічні експерименти, на зміну товщини виробу найбільш суттєво впливає величина глибини його оплавлення в процесі поверхневої обробки. При великих глибинах оплавлення оптичних виробів спостерігається нерівномірне розтікання розплаву вздовж їх поверхонь, що призводить до суттєвої різниці в значеннях товщини виробу в різних точках поверхні та, в кінцевому підсумку, до втрати їх форми.

Згідно вказаних вище стандартів, нормативними значеннями основних критеріїв якості фінішної обробки виробів, наприклад, із скла К8, є наступні: відсутність сколів, западин та виступів, дефектного шару; неплосцинність

$\delta_n \leq 0,4$ мкм/мм (або підтримання температури в зоні обробки $T_m \leq 1400$ К); залишкові напруження $\sigma_c \leq 3,6 \cdot 10^6$ Н/м² (для виробу товщиною 4 мм); середній розмір залишкових мікронерівностей $Ra \leq 5$ нм; глибина оплавленого шару $h \leq 150$ мкм.

При цьому для досліджуваних на практиці діапазонів зміни основних технологічних параметрів електронно-променевої обробки виробів з оптичного скла К8 ($F_n = 10^7 \dots 8 \cdot 10^7$ Вт/м², $V = 5 \cdot 10^{-3} \dots 5 \cdot 10^{-2}$ м/с) критерії якості (залишкові напруження та мікронерівності на поверхні) не перевищують своїх нормативних значень $\sigma_c^* = 3,6$ Н/м² та $Ra^* = 5$ нм.

Вироби з оптичних керамік. Для виготовлення виробів ІЧ-техніки (вікон видимості, обтікачів, світлорозсіювальних екранів тощо), що працюють в умовах високих механічних та термічних навантажень, використовують оптичну кераміку (КО2, КО4, КО12 та іншу). Оптична кераміка (таблиця 5.2) є полікристалічним матеріалом, отриманим методом пресування під великим тиском в вакуумі, механічно ізотропним, а за термомеханічними властивостями значно перевищує відповідний монокристал, добре оброблюється та має високу стійкість до теплових ударів.

Заготівки з оптичної кераміки постачаються у вигляді пластин або дисків (максимальний діаметр або сторона 20...100 мм, товщина 2...4 мм).

Таблиця 5.2 – Хімічний склад оптичних керамік

Склад компонентів, %	Оптична кераміка		
	КО2	КО4	КО12
ZnS	99,1	–	–
ZnSe	–	98,9	–
MgF ₂	–	–	98,6

Оцінка якості виробів ІЧ-техніки з оптичних керамік (пластин, дисків тощо) після їх фінішної поверхневої обробки проводиться за наступними основними критеріями: дефекти поверхні та об'ємні включення; діапазон прозорості в ІЧ-області спектра $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, мкм; коефіцієнт пропускання

ІЧ-випромінювання k_λ ; коефіцієнт рівномірності показника послаблення ІЧ-випромінювання k_ε .

Дефекти та об'ємні включення визначаються вказаними вище методами фізичного аналізу (методами растрової електронної мікроскопії, мікрозондового аналізу та іншими).

Критерії якості $\Delta\lambda$, k_λ та k_ε ($k_\varepsilon = \frac{(\varepsilon_\lambda)_{max} - (\varepsilon_\lambda)_{min}}{(\varepsilon_\lambda)_{max}}$, де ε_λ – показник

послаблення ІЧ-випромінювання, см^{-1}) вимірюються відомими методами. При відпрацюванні технологічних режимів електронно-променевої обробки виробів з оптичних керамік було встановлено, що основні дефекти на їх поверхні та приповерхневих шарах (тріщини, кратери, газоподібні включення та інші), а також суттєві зменшення величин k_λ та k_ε (більше, як у 1,5...2 рази) від їх нормативних значень k_λ^* та k_ε^* спостерігається при температурах в зоні обробки $T_m > T_m^{**}$ (наприклад, для кераміки КО2 – $T_m^{**} = 1100$ К). Крім того, спеціально проведеними дослідженнями поведінки виробів в екстремальних зовнішніх умовах (надзвукове обдування потоком повітря, підвищені температури нагріву, зовнішній тиск тощо), а також технологічні експерименти з електронно-променевої обробки виробів показали, що за певних зовнішніх умов та технологічних режимів обробки виникає руйнування виробів, яке обумовлене перевищенням граничних значень σ^* величини залишкових термічних напружень σ , що виникають в них (наприклад, для кераміки КО2 – $\sigma^*(T) = 6,9 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^3 \cdot T + 31,1 \cdot T^2$, Н/м²).

Згідно вказаним вище стандартам нормативними значеннями основних критеріїв якості фінішної обробки виробів, наприклад, з кераміки КО2, є наступні: відсутність тріщин та сколів, газоподібних включень; діапазон ІЧ-прозорості $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 12,2$ мкм, $\lambda_1 = 1,8$ мкм; $\lambda_2 = 14$ мкм; коефіцієнт ІЧ-пропускання $k_\lambda(\lambda) = 0,31 + 0,18\lambda - 0,01\lambda^2$; коефіцієнт рівномірності поглинання ІЧ-випромінювання $k_\varepsilon(\lambda) = 0,32 + 2,4 \cdot 10^{-3} \lambda - 3,8 \cdot 10^{-4} \lambda^2$.

Таким чином, аналіз існуючих нормативних вимог до якості виробів з оптичного скла та кераміки, а також експериментальних досліджень щодо поведінки виробів в екстремальних умовах та при їх електронно-променевої обробці дозволив сформулювати наступні нормативи основних критеріїв якості фінішної обробки виробів, які необхідно контролювати (наприклад, для скла К8 та кераміки КО2):

для скла К8:

- відсутність сколів, западин та виступів, дефектного шару;
- підтримання температури в зоні обробки $T_m \leq 1400$ К та глибини оплавленого шару $h \leq 150$ мкм;

для кераміки КО2:

- відсутність тріщин та сколів, газоподібних включень;
- підтримання температури в зоні обробки $T_m \leq 1100$ К;
- неперевикнення рівня гранично допустимих залишкових напружень:

$$\sigma^*(T) = 6,9 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^3 T + 31,1 T^2, \text{ Н/м}^2.$$

5.2 Особливості термічного впливу потоку електронів на поверхню неорганічного оптичного діелектрика

Для фінішної обробки поверхонь оптичних матеріалів перспективним є метод низькоенергетичної ($E \leq 10$ кеВ) електронно-променевої обробки потоком електронів стрічкової форми, який відноситься до високотемпературних (робоча температура в зоні дії електронного потоку досягає 1350 °С) і швидкоплинних (час дії електронного потоку на матеріал не перевищує одиниць секунд) методів обробки.

Основними фізичними процесами, що протікають при електронно-променевої обробці оптичних матеріалів є процеси перетворення кінетичної енергії електронів у теплову енергію матеріалу, взаємодії потоку електронів із зарядом, що накопичується на поверхні діелектрика, дифузії іонів домішок

оптичного скла з розплавленого приповерхневого шару у вакуум та поширення теплового потоку в об'ємі діелектрика.

При цьому, основний вплив чинять процеси теплової взаємодії електронного потоку фіксованої потужності (з енергіями електронів $E = 2...10$ кеВ) з поверхнею неорганічного оптичного діелектрика (оптичного скла та оптичних керамік).

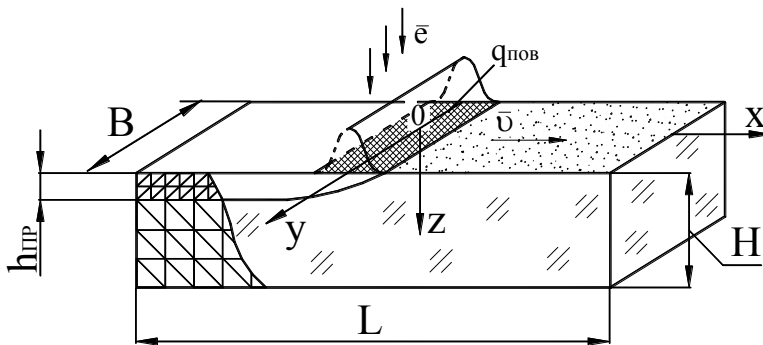


Рисунок 5.8 – Схема дії рухомого електронного потоку на поверхню оптичного виробу прямокутної форми:

\vec{j}_e – потік електронів; H, L, B – відповідно, товщина, довжина і ширина виробу; $h_{пр}$ – глибина проплавлення;

\vec{v} – швидкість електронного потоку;

$q_{пов}$ – поверхнева густина теплового потоку

У результаті взаємодії потоку низькоенергетичних електронів з матеріалом, теплопровідність якого складає ~ 1 Вт/м·К, в його поверхні виникає область рідинно-текучого стану речовини (ванна розплаву) глибиною $\sim 10...150$ мкм – (рис. 5.8).

При використанні рухомого потоку електронів ванна розплаву також буде рухомою і застигаючи представляє собою тонкий шар, який відрізняється від основного матеріалу своєю структурою та фізико-хімічними властивостями.

5.3 Електротехнічне обладнання для поверхневої електронно-променевої обробки виробів із оптичних матеріалів

Електротехнічне обладнання для фінішної електронно-променевої обробки оптичних матеріалів створене на базі універсальної вакуумної установки «УВН-74» [114]. Вакуумна система складається з вакуумної камери і вакуумного поста установки «УВН-74», паромасляного дифузійного насосу «НП-400», форвакуумного насосу «АВЗ-20», вакуумметрів «ВИТ-3»

та «ВМБ-8», датчиків вакууму (термопарного «ТП-1», іонізаційного «ИП-1», магнітно-блокувального «М-2») розташованих у вакуумному об'ємі.

У вакуумній камері установки розташовано спеціальне технологічне оснащення для електронно-променевої обробки, а саме: кварцову інфрачервону піч попереднього нагріву та завершального охолодження, електронно-променеву гармату з оптикою Пірса для формування стрічкового електронного потоку, механізм переміщення оптичних пластин.

Забезпечують роботу спеціального технологічного оснащення наступні зовнішні пристрої, а саме: високовольтне джерело живлення електронно-променевої гармати на базі блоку «УЭЛИ-1», блок керування кварцовою печі на базі термозадатчика-терморегулятора «РИФ-101», розроблена автоматизована система керування технологічним процесом [114].

Модифікована установка та технологічне оснащення задовольняють наступним вимогам:

1. Дотримання технологічних параметрів електронно-променевої обробки оптичних матеріалів в діапазоні значень: робочий вакуум $p = 5(\pm 1) \cdot 10^{-4}$ Па, температура попереднього нагріву $T = 300 \dots 1400$ К ± 1 К, струм електронного потоку $I_{nom} = 50 \dots 500$ мА $\pm 1\%$, прискорююча напруга $U_{np} = 0 \dots 12$ кВ $\pm 1\%$, струм розжарення катоду $I_p = 0 \dots 50$ А $\pm 1\%$, швидкість переміщення виробів $V = 0,5 \dots 8$ см/с $\pm 1\%$.
2. Механізм переміщення забезпечує надійне затиснення та транспортування оптичних виробів прямокутної ($20 \times 25 \times 2$ мм, $10 \times 40 \times 6$ мм) та круглої (товщина 2; 4; 6 мм, діаметр 20 мм) форми, виготовлених з оптичних матеріалів.
3. Виконання технологічного процесу електронно-променевої обробки оптичного матеріалу в автоматичному режимі, а саме наступної послідовності: попередній нагрів виробу за заданим термопрофілем та до заданої температури, увімкнення ЕПГ Пірса, контроль та встановлення заданого струму та розподілу густини струму електронного потоку,

переміщення виробу за заданим законом руху, завершальне охолодження виробу за заданим термопрофілем.

4. Економічність, дотримання екологічної чистоти та безпечних умов праці обслуговуючого персоналу.

Зовнішній вигляд електротехнічного обладнання для фінішної електронно-променевої обробки пластин з оптичного скла представлений на рис. 5.9.

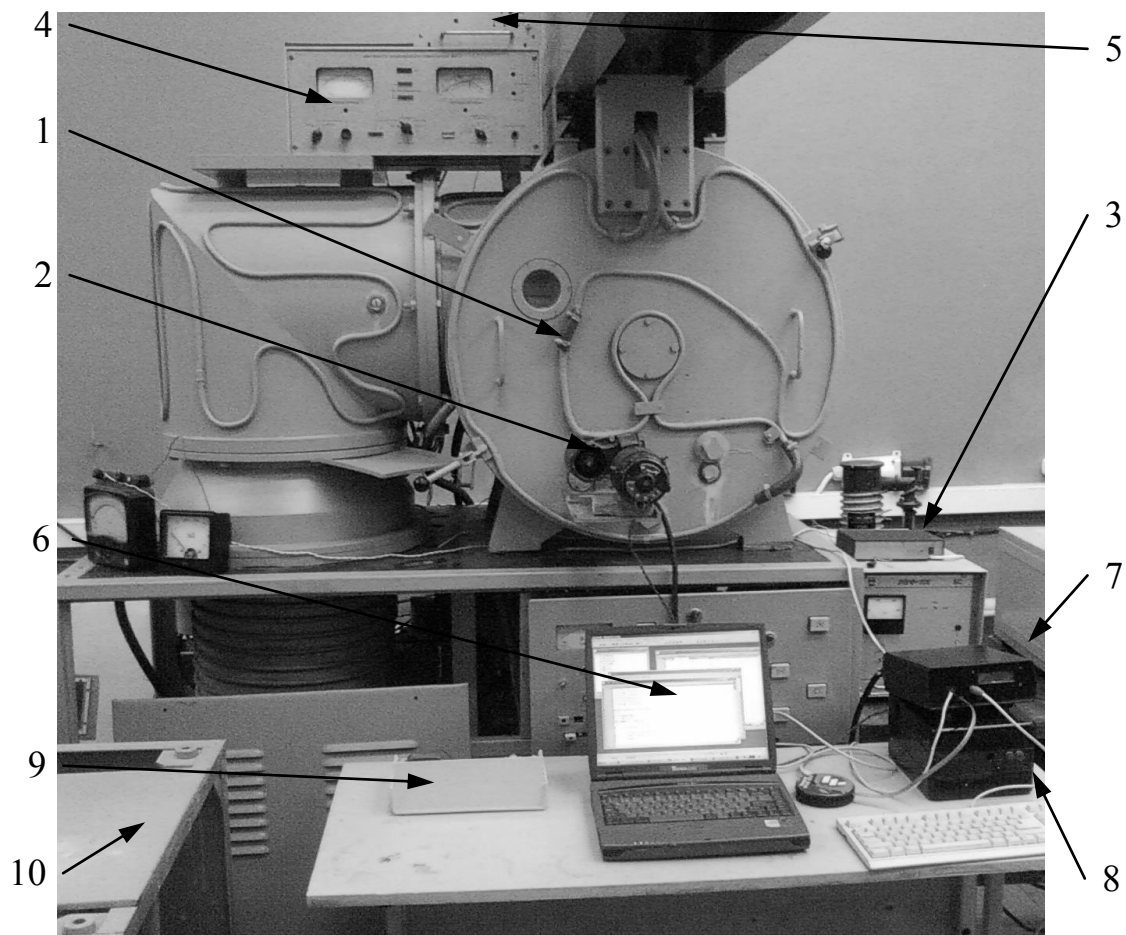


Рисунок 5.9 – Зовнішній вигляд технологічного обладнання для фінішної електронно-променевої обробки виробів з оптичних матеріалів: 1 – вакуумна камера; 2 – електропривод механізму переміщення оптичних виробів; 3 – система керування температурним режимом оптичних виробів на базі приладу «РИФ-101»; 4 – вакуумметр іонізаційно-термопарний «ВИТ-3»; 5 – вакуумметр магніто-блокувальний «ВМБ-8»; 6 – ПЕОМ керування установкою; 7 – центральний блок системи автоматизованого керування; 8 – блок керування електроприводом; 9 – модулі вимірювання температури в зоні обробки та зондування електронного потоку; 10 – блок живлення та система керування ЕПГ Пірса

Схема установки для ЕПО оптичних матеріалів представлена на рис. 5.10.

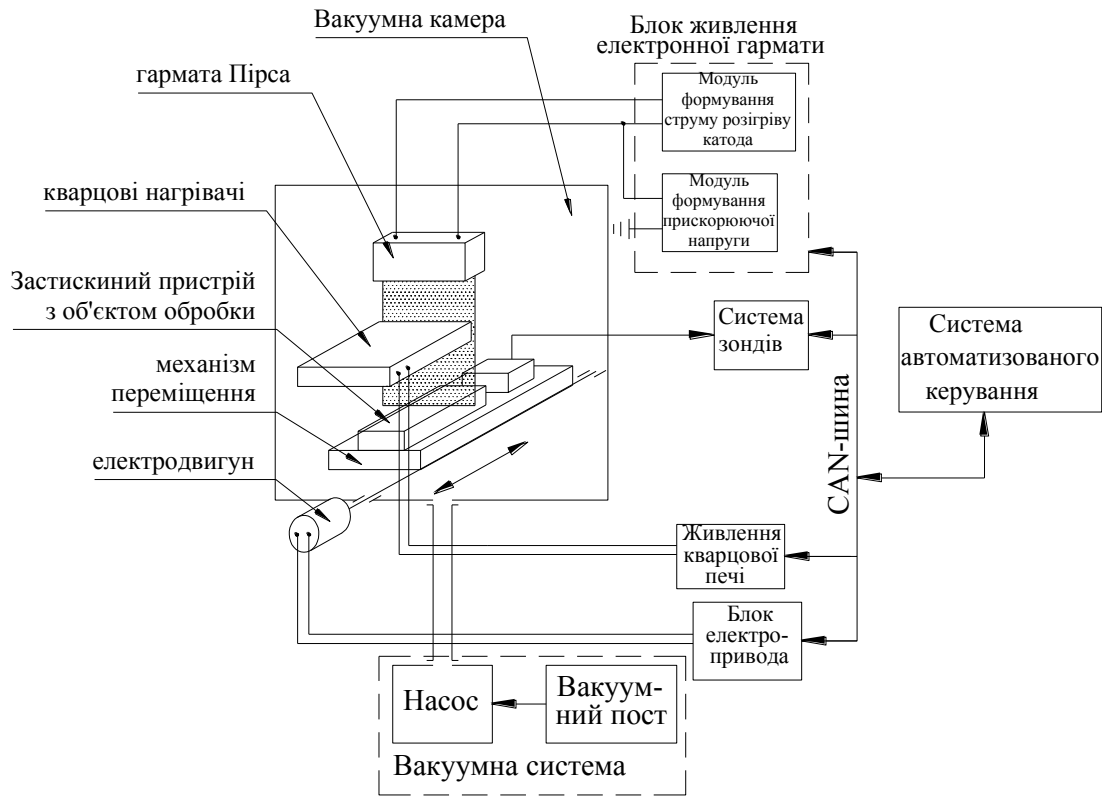


Рисунок 5.10 – Схема електронно-променевої установки

Модифікована таким чином електронно-променева установка для фінішної електронно-променевої обробки оптичного скла забезпечує якісну мікрообробку поверхонь оптичного скла та створення функціональних шарів на його поверхні. Основні технічні характеристики такої установки наведені в табл. 5.3 [114].

Таблиця 5.3 - Техніко-експлуатаційні характеристики електротехнічного обладнання

Параметр	Діапазон значень	Керування / Контроль
1	2	3
Параметри, що керуються		
Струм розігріву катода, I_n , А	0...50 ±1%	САК / Цифровий амперметр ($\Delta I_k = \pm 50$ мА)
Прискорююча напруга, U_{np} , кВ	0...12 ±1%	САК / Цифровий вольтметр ($\Delta U_{np} = \pm 10$ В)
Струм електронного потоку, I_{nom} , мА	50...500 ±1%	САК / Цифровий амперметр ($\Delta I_d = \pm 1$ мА)

Продовження таблиці 5.3

1	2	3
Розподіл енергії в електронному потоці, Вт/см ²	0...2·10 ³	САК / метод зондування
Швидкість переміщення виробу, V, см/с	0,5...8 ±1%	САК / поворотний шифратор (ΔV = 10 ⁻⁴ м/с)
Діапазон робочих температур теплової печі, T, К	300...1400 ±1 К	САК / Термопара ТХА-1Е; Цифровий вольтметр (± 1 °С)
Техніко-експлуатаційні умови		
Залишковий тиск в камері, p ₀ , Па	0,5·10 ⁻⁴ ±10%	Ручне / Вакууметр ВИТ-3, ВМБ-8 (δp = ± 10%)
Виконання технологічної послідовності		САК / Автоматичний

5.3.1 Технологічне оснащення обладнання

На рис. 5.11 представлено вакуумну камеру електронно-променевої установки зі встановленим технологічним оснащенням.

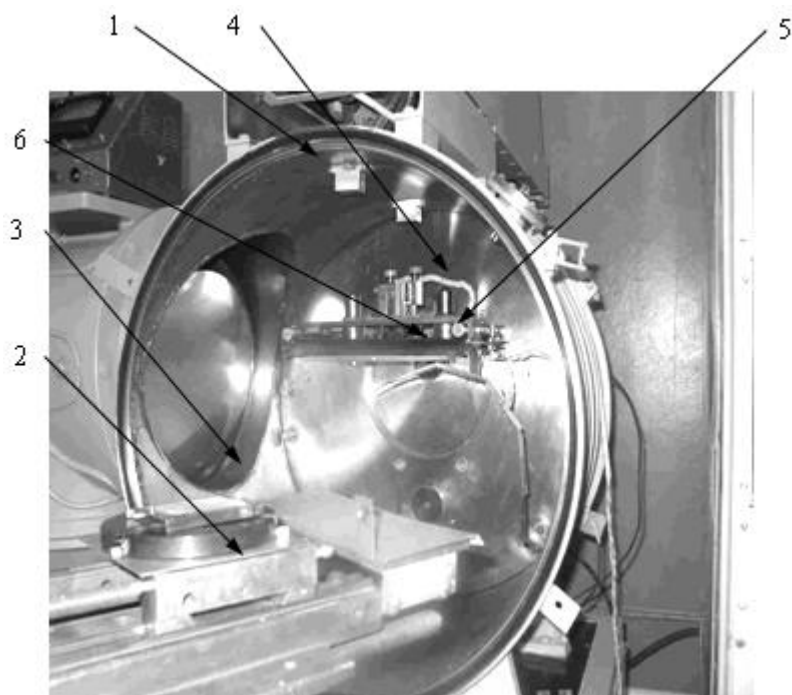


Рисунок 5.11 – Технологічне оснащення у вакуумній камері технологічної електронно-променевої установки: 1 – робочий об'єм вакуумної камери; 2 – механізм переміщення заготовок; 3 – пристрій для затиску та базування оптичних виробів; 4 – електронно-променева гармата Пірса зі стрічковою формою потоку; 5 – кварцові нагрівачі «КГТ 220-1000-1» з параболічними рефлекторами; 6 – термопарний датчик температури (термопара ТХА-1Е) попереднього нагріву заготовок

Кварцова піч. Термопіч виготовлена з листової сталі Х18Н10Т, розташована в технологічному об'ємі та призначена для контрольованого нагріву оптичних виробів перед електронно-променевою обробкою та наступним охолодженням до кімнатної температури після процесу електронно--променевої обробки.

Попереднє нагрівання виробів є необхідною умовою їх підготовки до електронно-променевої обробки. Для інтенсифікації процесу знегажування і для зняття термічних напружень в оптичних матеріалах після обробки електронним потоком в установці використано систему нагріву та охолодження, рис. 5.12.

В якості ІЧ-нагрівника в електронно-променевій установці використані галогенні кварцові лампи, наприклад, «КГТ 220-1000-1» (ОСТ160.535.024-76), «КГМ 220-1000-1» (ТУ16-545.010-80).

Для створення направленного потоку ІЧ-випромінювання кожна лампа укомплектована параболічним рефлектором, який дозволяє отримати густину потужності $4...6 \text{ Вт/см}^2$ для матеріалів непрозорих для ІЧ-випромінювання з довжиною хвилі $1...10 \text{ мкм}$ [114]. Для підвищення ефективності нагрівання скла, відбиваючу частину рефлектора покривають нітридом бору (відбиває випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,4...6,0 \text{ мкм}$).

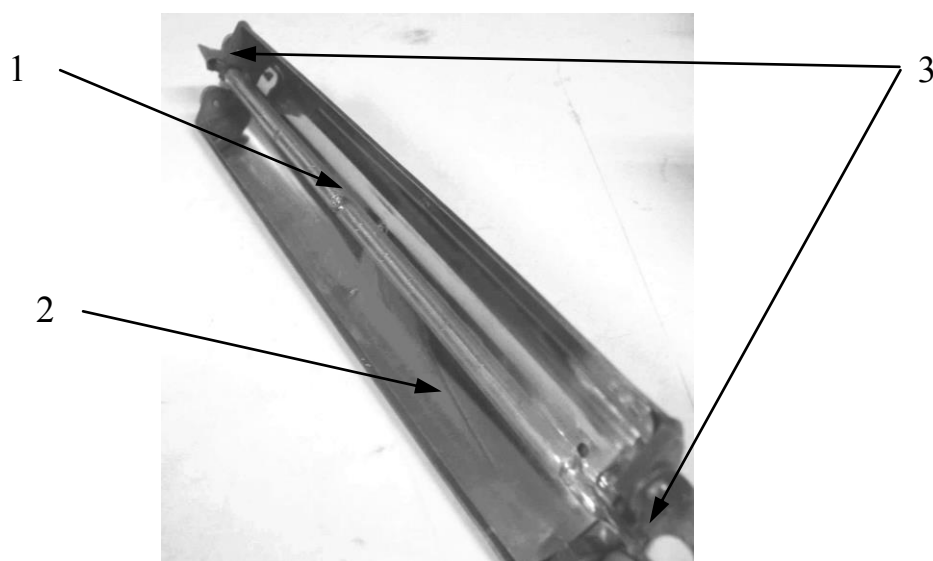


Рисунок 5. 12 – Система ІЧ-нагрівання оптичного скла: 1 – лампа «КГТ 220-1000-1»; 2 – параболічний рефлектор; 3 – пристосування для затискання та живлення лампи

Технічні характеристики ламп для ІЧ-нагрівання скляних виробів у вакуумі представлені в табл. 5.4.

Таблиця 5.4 – Технічні характеристики ламп для ІЧ-нагрівання

Технічна характеристика	КГТ 220-1000-1	КГМ 220-1000-1
Напруга, В	220	220
Потужність, Вт	1000	1000
Середня тривалість горіння, г	10000	Не менше 50
Світловий потік, лм	26000	26000
Допустиме відхилення від горизонталі, град	5	5
Довжина хвилі λ_{\max} , мкм	1,5	1,5
Питоме навантаження, Вт/см ²	33,3	33,3
Довжина лампи, мм	375	103
Довжина нитки розжарювання, мм	300	300
Діаметр оболонки, мм	12	14
Вага лампи, г	30	16

Електронно-променева гармата. В роботі використано електронно-променеву гармату Пірса, яка генерує параксіальні потоки електронів стрічкової форми [114]. На рис. 5.13 представлено зовнішній вигляд та конструкційна схема електронно-оптичної системи гармати Пірса.

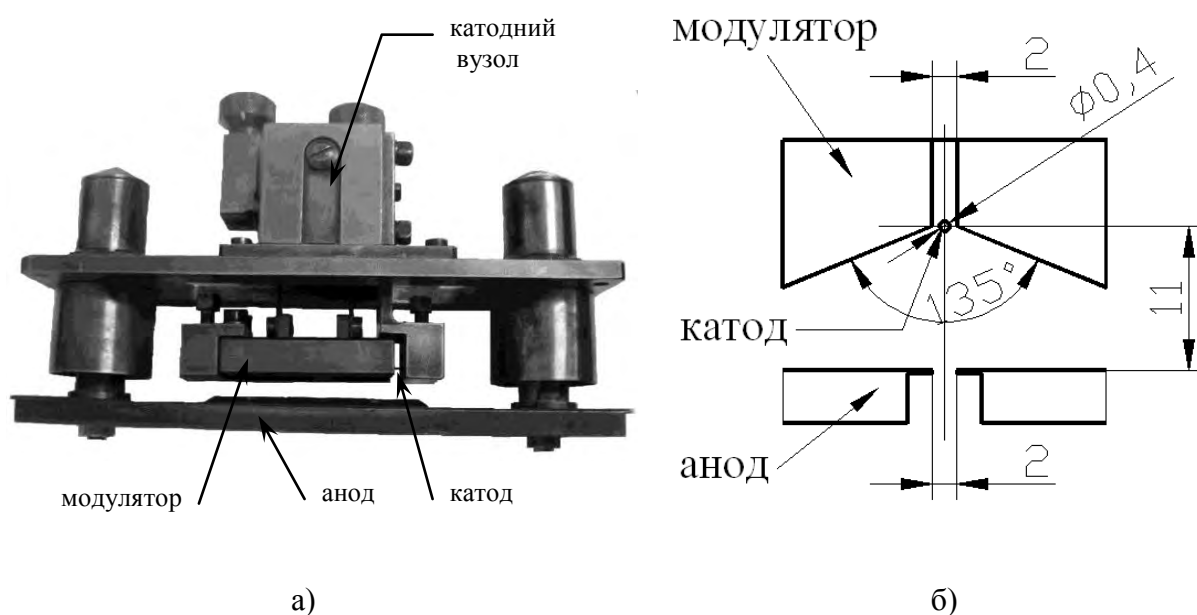


Рисунок 5.13 - Зовнішній вигляд (а) та конструкційна схема (б) електронно-оптичної системи електронно-променевої гармати Пірса

З рис. 5.13 видно, що гармата Пірса з дротяним катодом, формує стрічковий потік електронів і має такі основні елементи: дротяний катод, прикатодний електрод (модулятор) та анод.

В якості дротяного катода використовується вольфрамовий дріт марки ВА-1-ТО діаметром 0,3; 0,4; 0,5; 0,8 мм і робочою довжиною 80 мм.

Анод ЕПП представляє собою пластину зі щілиною, розташовану вздовж катода. Ширина щілини в аноді може регулюватись в діапазоні значень 0,5...3,5 мм. З точки зору електронної оптики анод представляє собою розсіюючу лінзу, тому на виході електронний потік розходить під кутом γ_a (рис. 5.14).

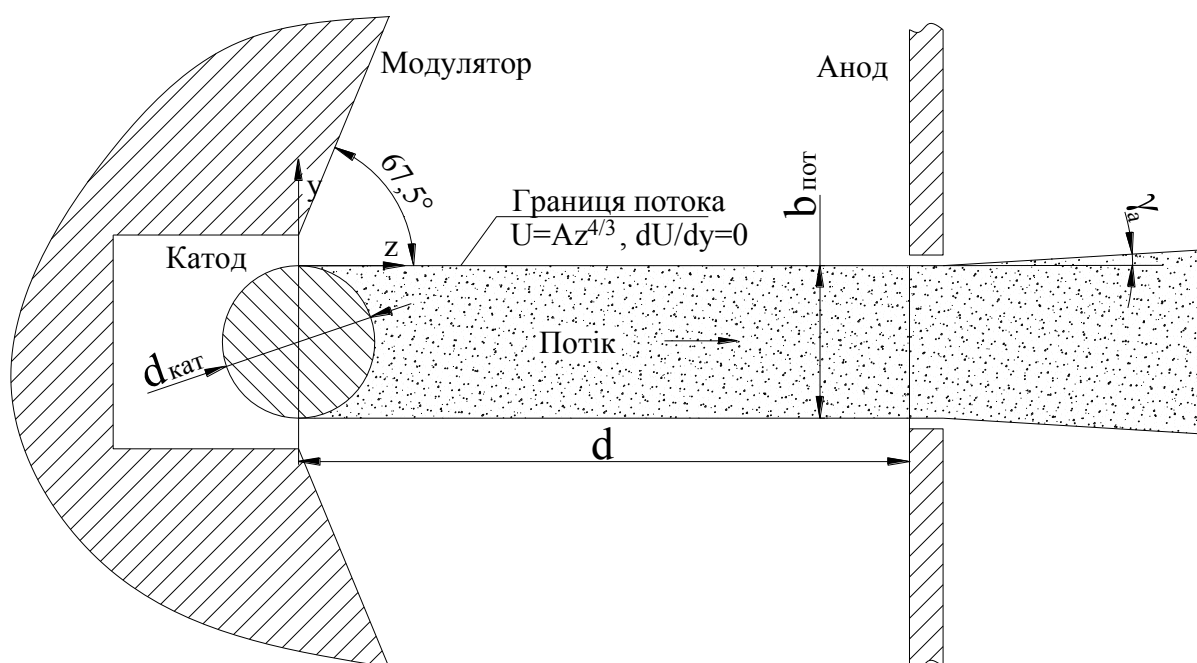


Рисунок 5.14 – Паралельний стрічковий потік електронів. Граничні умови: d – відстань катод-анод; $b_{пот}$ – ширина електронного потоку; $d_{кат}$ – діаметр катода; γ_a – кут розходження електронного потоку на виході з аноду

Слід зазначити, що у зв'язку з відсутністю системи фокусування кут розходження електронного потоку збільшується за рахунок дії об'ємного заряду електронів потоку.

Модулятор ЕПП Пірса складається з двох призм, робочі поверхні яких розташовані під кутом 135° (кутом Пірса). Така форма електродів гармати

повторює форму еквіпотенціальної поверхні нульового потенціалу у області зовнішній до потоку, для забезпечення граничної умови $U = Az^{4/3}$, $dU/dy = 0$ (рис. 5.14) при якій формується паралельний потік електронів.

Проте, реальна форма потоку між електродами електронно-променевої гармати відрізняється від ідеальної. Оскільки використовувана електронно-оптична система має наступні відмінності від оптики Пірса:

- катод в поперечному перерізі має круглу форму, тому напрями векторів початкових швидкостей електронів при виході з його поверхні відрізняються на 180° ;
- між катодом та модулятором є щілина, яка спотворює форму нульової еквіпотенціальної поверхні і відповідно спотворює форму траєкторій крайніх електронів у потоці;
- анод в ідеальній гарматі Пірса має складну криволінійну форму, на відміну від плоскої.

Всі ці відмінності спрощують конструкцію технологічної ЕПГ, але зменшують її ефективність, оскільки частина струму емісії вольфрамового катоду потрапляє на анодні пластини (до 70%).

Електронно-променева гармата працює в таких діапазонах параметрів: прискорююча напруга 1...12 кВ, струм розжарення катоду 10...30 А.

Механізм переміщення. Одним з найважливіших елементів електронно-променевої установки є механізм переміщення (рис. 5.15), який призначений для кріплення, базування і транспортування оптичної пластини в зону обробки електронним потоком.

При розробці механізму переміщення враховувались специфічні умови і особливості електронно-променевої обробки виробів, а саме:

- робоче середовище – вакуум із залишковим тиском меншим за 10^{-3} Па;
- робочі температури в діапазоні 20...500 $^\circ\text{C}$;
- необхідність переміщення з точністю $\pm 0,0005$ м/с в діапазоні швидкостей 0,001...0,1 м/с за умов відсутності вібрацій більших за 10 Гц/мм.

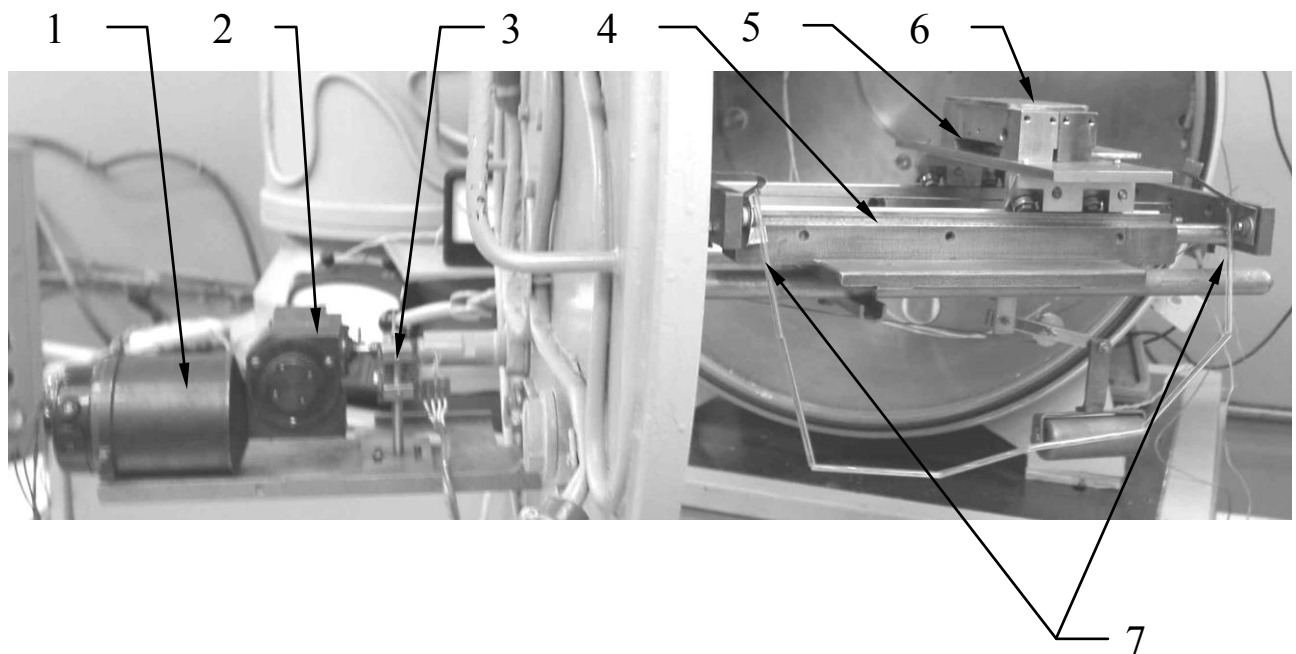


Рисунок 5. 15 – Зовнішній вигляд механізму переміщення з затискним пристосуванням: 1 – двигун постійного струму СЛ-369; 2 – редуктор К-1-120; 3 – поворотний шифратор; 4 – механізм переміщення; 5 – візок; 6 – затискне пристосування; 7 – кінцеві вимикачі

Механізм переміщення даної установки приводиться в рух двигуном постійного струму СЛ-369 (рис. 5.15, поз.1), який розташовано зовні вакуумної камери. Використання двигуна постійного струму, на відміну від двигунів інших типів відрізняється простотою керуваності за допомогою мікропроцесорної системи, високою рівномірністю переміщення об'єктів, лінійністю та плавністю регулювання швидкості.

До переваг такої конструкції механізму переміщення відноситься відсутність необхідності захищати елементи двигуна від впливу низького тиску та високих температур. Недоліками цього механізму є ускладнення конструкції механізму і підвищення ризику затікання повітря в об'єм вакуумної камери через вакуумний ввід. Застосований вакуумний увід передачі руху з пружним сальниковим ущільненням має максимальну швидкість обертання валу – $2...3 \text{ с}^{-1}$, тому необхідно використовувати понижуючі редуктори. Проте для однокоординатного приводу ці недоліки неістотні і застосування такої конструкції є виправданим.

Для регулювання швидкості обертання двигуна використовується

редуктор марки К-1-120 (рис. 5.15, поз. 2) з передаточним відношенням $u = 120$. Це дозволило знизити ризик затікання повітря у робочу камеру, завдяки низькій швидкості обертання валу вакуумного вводу руху.

Передача руху від електродвигуна механізму переміщення у вакуумну камеру здійснюється через вакуумний увід руху з пружним сальниковим ущільненням, який передає обертовий рух. Верхня границя робочої частоти обертання вводу складає 500 об/хв.

Механізм переміщення зображений на рис. 5.16 реалізується за допомогою однокоординатного столу, який рухається прямолінійно, у напрямку перпендикулярному напрямку дії електронного потоку. При цьому перетворення обертального руху електродвигуна у поступальний рух стола відбувається за допомогою передачі гвинт-гайка (рис. 5.16, поз. 7).

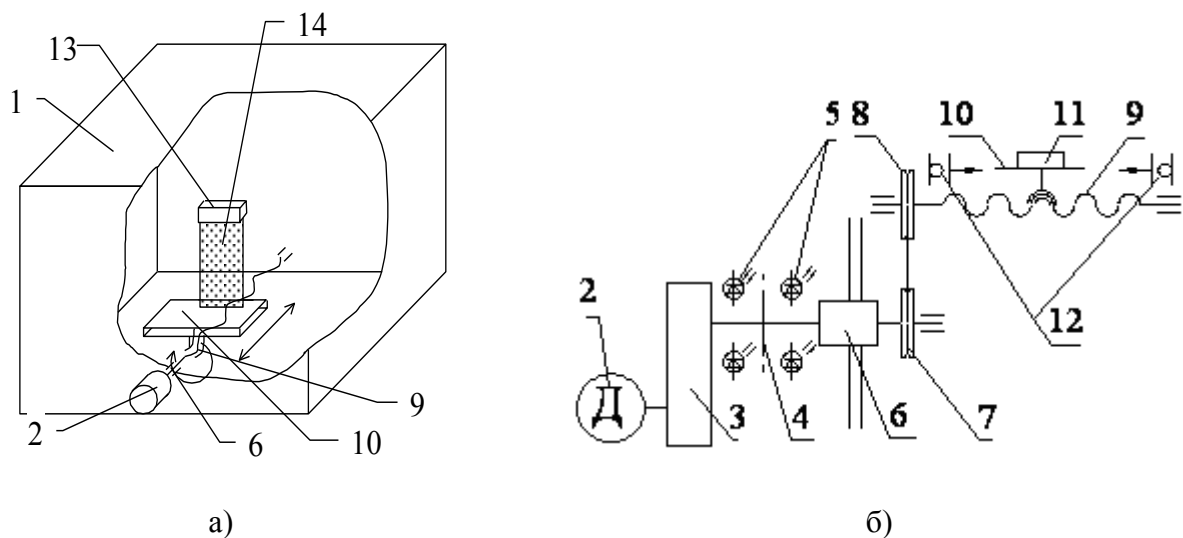


Рисунок 5.16 – Конструкція (а) і кінематична схема (б) механізму переміщення оптичних виробів при їх обробці електронним потоком: 1 – вакуумна камера; 2 – електропривід; 3 – редуктор; 4 – перфорований диск; 5 – оптопари; 6 – вакуумний увід; 7 – шків; 8 – колесо; 9 – ходовий гвинт; 10 – основа із затискним пристроєм; 11 – оптичний виріб; 12 – кінцеві датчики; 13 – модуль електронно-променевої гармати Пірса; 14 – стрічковий електронний потік

Особливої уваги при електронно-променевій обробці оптичних матеріалів слід приділяти пристосуванням для розміщення, базування та затиску оптичних заготовок (рис. 5.17), які повинні забезпечити необхідне

положення оптичних виробів відносно електронного потоку.

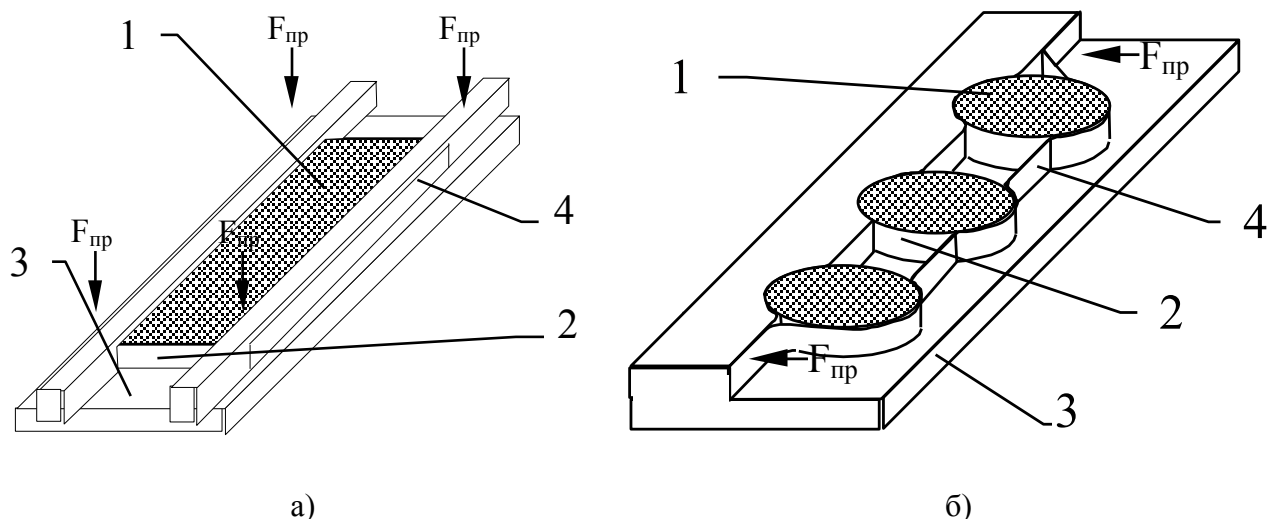


Рисунок 5.17 – Варіанти затискних пристосувань для затиску оптичних виробів прямокутної (а) та круглої (б) форми: $F_{пр}$ – притискаюча сила; 1 – поверхня, яка підлягає обробці; 2 – заготівка; 3 – основа; 4 – базуючі поверхні; 5 – фіксуюча стрічка

Необхідними вимогами до експлуатації таких пристосувань є:

- відсутність забруднень (жири, пил тощо) на контактних поверхнях;
- використання жаростійких матеріалів (жаростійка нержавіюча сталь Х12Н10Т);
- наявність щілин між оптичними виробами та затискним пристосуванням за для уникнення руйнування виробу при термічному розширенні затискних пристосувань та оптичних виробів.

Основні технічні характеристики розробленого механізму переміщення наведені в таблиці 5.5.

Таблиця 5.5 - Основні технічні характеристики механізму переміщення

Параметр	Діапазон значень	Точність вимірювання
Швидкість переміщення, мм/с	0,5...80	0,1 мм/с
Робоча зона переміщення, мм	300	0,01 мм
Зона стабільного руху, мм	80...120	0,01 мм
Дискретність регулювання, мм/с	0,1	0,1 мм/с
Габаритні розміри основи, мм	60 × 75 × 5	0,1 мм

5.3.2 Високовольтні джерела живлення

Особливістю електронно-променевої технологічної установки є наявність елементів, що живляться напругою від 5 В (цифрова логіка) до 10 кВ (електронно-променева гармата) і які споживають струм від одиниць міліампер до десятків ампер. Тому розроблена електронно-променева установка включає ряд джерел вторинного електроживлення (ДВЕЖ) призначених для формування напруги живлення окремих модулів і систем установки та автоматичної мікропроцесорної системи керування процесом електронно-променевої обробки.

До ДВЕЖ установки відносяться: блок живлення ЕПГ, який формує прискорюючу напругу, струм розжарення катода; блок живлення системи попереднього нагріву та охолодження оптичних матеріалів розроблений на базі силового блоку термозадатчику „РИФ-101”; блок живлення двигуна електропривода механізму переміщення заготовок, який відрізняється високою стабільністю формованої напруги, блок живлення вакуумної системи установки може використовуватися базовий до установки УВН-74. Розроблені ДВЕЖ можуть регулюватися мікропроцесорною системою автоматичного керування.

Живлення електронно-променевої гармати здійснюється за допомогою розробленого джерела живлення, основні технічні характеристики якого наведено в табл. 5.6.

Таблиця 5.6 – Основні технічні характеристики джерела живлення ЕПГ Пірса

Параметр	Діапазон значень та точність дотримання
Прискорююча напруга, $\times 10^3$, В	0...12 \pm 1%
Струм розігріву, А	0...50 \pm 1%
Струм електронного потоку, $\times 10^{-3}$, А	50...500 \pm 1%
Пульсація струму електронного потоку, %	менше 3
Час відновлення прискорюючої напруги після пробою, с	0,2...0,3

Основні відмінності та переваги розробленого джерела живлення в порівнянні зі стандартними та спеціалізованими джерелами живлення, які можуть бути використані для живлення ЕПГ наводяться в табл. 5.7.

Таблиця 5.7 - Технічні характеристики високовольтних джерел живлення

№ п/п	Назва джерел живлення (країна виробник)	Технічні характеристики джерел живлення			Переваги джерел живлення
		Діапазон робочої напруги, $\times 10^3$, В	Діапазон робочих струмів, $\times 10^{-3}$, А	Пульсація струму, %	
1	«УЭЛИ-1» (Україна)	0;6;12	до 500	2,0	Стабілізація параметрів обробки. Підвищена потужність.
2	Блок живлення «ЦЭЛС-1М» (Росія)	до 30	до 300	6,0	Можливість живлення постійним та змінним струмом.
3	«Statron» (Німеччина)	до 10	до 300	10...15	Простота експлуатації. Плавність вихідної напруги.
4.	Блок живлення установки «УВН-74» (Україна)	до 12	до 500	2...3	Підвищена потужність. Можливість плавного регулювання. Можливість стабілізації параметрів обробки. Автоматичне відновлення прискорюючої напруги після пробою.

5.3.3 Електровимірювальна техніка для контролю параметрів якості поверхонь оптичних матеріалів при електронно-променевої обробці

Вимірювання параметрів якості оптичних виробів проводилось з використанням наступного комплексу приладів: мікроскопа «МБС-9», поляриметра-полярископа «ПКС-250», мікроінтерферометра Лінніка «МІІ-4», інтерферометра «ІТ-100», атомно-силового мікроскопу (АСМ) «NT-206V».

На монтажному столі «СМП-2», за допомогою мікроскопу «МБС-9» та плоскої пластини з поверхнею чорного кольору для визначення чистоти оптичної поверхні згідно з відповідними стандартами, а саме: визначають наявність пухирців та вкраплень за стандартом ДСТУ ISO 10110-3:2004,

наявність свілей відповідно до ISO 10110-4:1997, наявність точок подряпин, виколувань на поверхні скла відповідно до ДСТУ ISO 10110-7:2004 та ГОСТ 23136-93. На поверхні проводиться пошук слідів напилення матеріалом елементів електронно-променевої гармати та технологічного оснащення та скипання поверхні оптичного виробу. Перевіряється уся поверхня кожного зразка. Мікроскоп «МБС-9» дозволяє виявляти дефекти з лінійними розмірами до 5 мкм.

Поляриметр-полярископ «ПКС-250» (ГОСТ 5.1831-73) (табл.5.8) використовується для оцінки розподілу подвійного променезаломлення викликаниго залишковими термонапруженнями у виробих після ЕПО в об'єкті по інтерференційному забарвленню та для досліджень розподілу подвійного променезаломлення в об'єкті в світлі, поляризованому по колу, відповідно до стандарту ДСТУ ISO 10110-2:2004.

Максимальне значення термонапружень не повинно перевищувати границі міцності оптичного скла даної марки на розтягнення.

Мікроінтерферометром «МІИ-4» та інтерферометром «ІТ-100» визначається наявність відхилень форми поверхні скла відповідно до ДСТУ ISO 10110-5:2004, також наявність мікродефектів на поверхні скла відповідно до ISO 10110-8:1997.

Таблиця 5.8 – Технічні характеристики приладу «ПКС-250»

Показник	Значення
Межа вимірювання різниці ходу при подвійному променезаломленні з чвертьхвильовою фазовою пластинкою, нм	540
Ціна поділки ноніуса	10
Величина відліку по ноніусу	0,10
Світловий діаметр матового екрану, мм	300
Світловий діаметр аналізатора, мм	250
Межа основної погрішності приладу при вимірюванні різниці ходу, що допускається, компенсатором Сенармона, нм	±10

Прилад «МІІІ-4» дозволяє вимірювати відхилення профілю поверхні з кроком 0,1 ширини інтерференційної смуги. При довжині хвилі джерела світла $\lambda = 530$ нм, це значення складає – 26,5 нм. Об'єкт дослідження закріплюється на рухомому столику, переміщення якого здійснюється мікрометричними гвинтами, ціна поділки яких 5 мкм. Діапазон переміщення столика у двох взаємно перпендикулярних напрямках складає ± 10 мм. Інтерференційні смуги спостерігаються візуально через окуляр зі збільшенням $490\times$. Для вимірювання нерівностей, розміром менше однієї смуги, використовується гвинтовий окулярний мікрометр.

Інтерферометр «ІТ-100» призначений для контролю за одне вимірювання площинності оптичних поверхонь діаметром до 100 мм. Відхилення від площинності зразка може бути визначено або при безпосередньому спостереженні об'єкта або за фотографією інтерференційної картини. Таким чином може бути визначена загальна та місцеві похибки поверхні. Максимальна точність визначення похибки поверхні складає 0,05 ширини інтерференційної смуги.

Дослідження текстури та визначення шорсткості поверхні скла відповідно до стандарту ISO 10110-8:1997 проводиться на АСМ «NT-206V» (рис. 5.18).

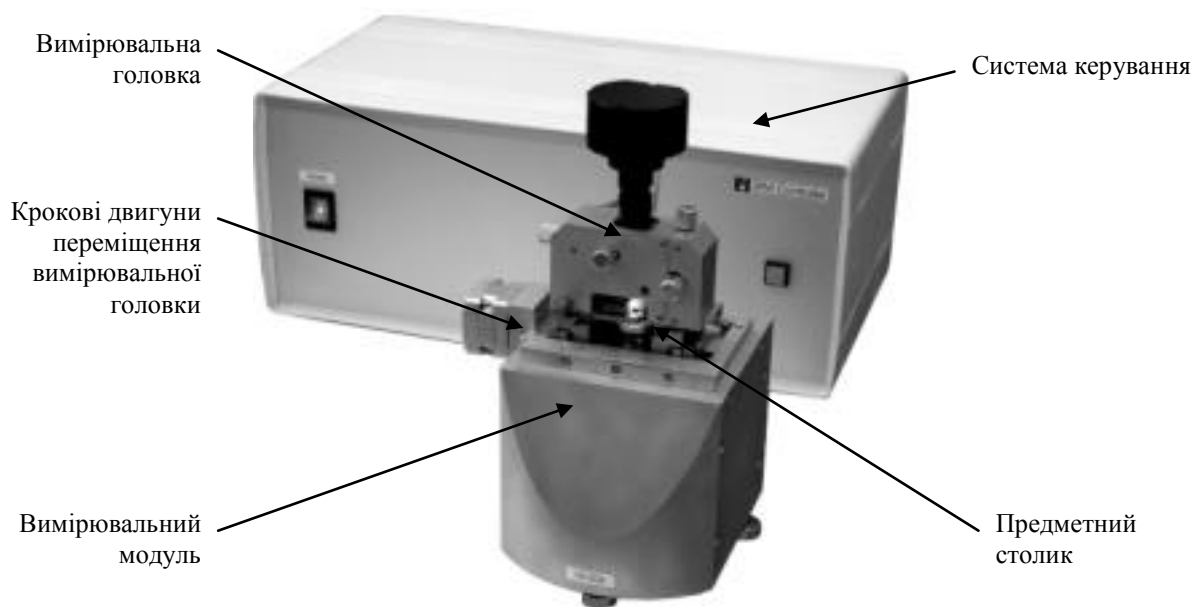


Рисунок 5.18 - Атомно-силовий мікроскоп «NT-206V»

Даний прилад в комплексі з управляючим програмним забезпеченням і засобами обробки АСМ-зображень призначений для вимірювання і аналізу мікро- і субмікрорельєфу поверхонь, об'єктів мікро- і нанометрового розмірного діапазону з високою роздільною здатністю.

Атомно-силовий мікроскоп «NT-206V» використовується для вимірювання розподілу середньої висоти мікронерівностей Ra , по поверхні оптичних плат оброблених стрічковим електронним потоком. Він дозволяє проводити сканування плоскої площадки з максимальними розмірами 20×20 мкм на поверхні зразка із оптичного скла. Максимальні розміри досліджуваного зразка 30×30×8 мм. Результат сканування представляється спеціалізованим програмним забезпеченням (програма Surface Scan) у вигляді АСМ-зображення геометричних показників поверхні (рис. 5.19). Для

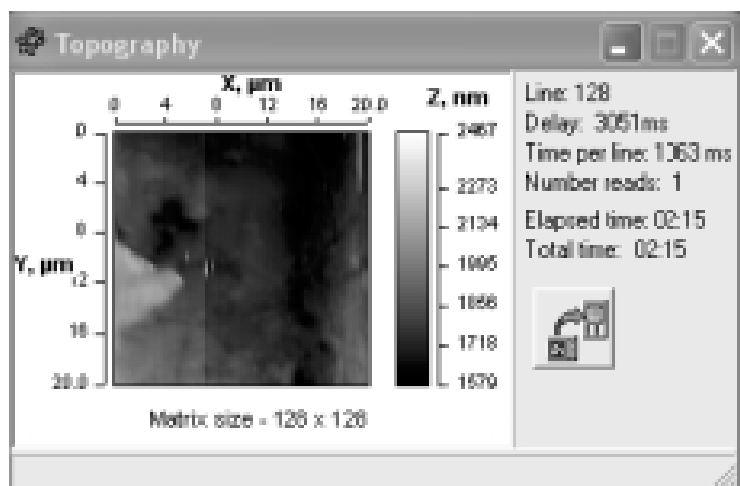


Рисунок 5.19 – Вікно візуалізації АСМ-зображення

точного позиціонування зонду по поверхні досліджуваного об'єкту застосовуються крокові двигуни, які забезпечують переміщення в площині ХУ в діапазоні 10 мм з кроком 2,5 мкм.

Для обробки та аналізу даних по мікрорельєфу використовується спеціалізована програма Surface Viewer, яка має такі види сервісу, як: трьохвимірна візуалізація поверхні; профілювання поверхні в необхідному перетині; визначення розподілу висот поверхні; кутова гістограма; отримання інформації про геометричні показники поверхні.

На практиці АСМ застосовується при визначенні розподілу середньої висоти мікронерівностей Ra по поверхні, обробленій стрічковим електронним потоком (рис. 5.20).

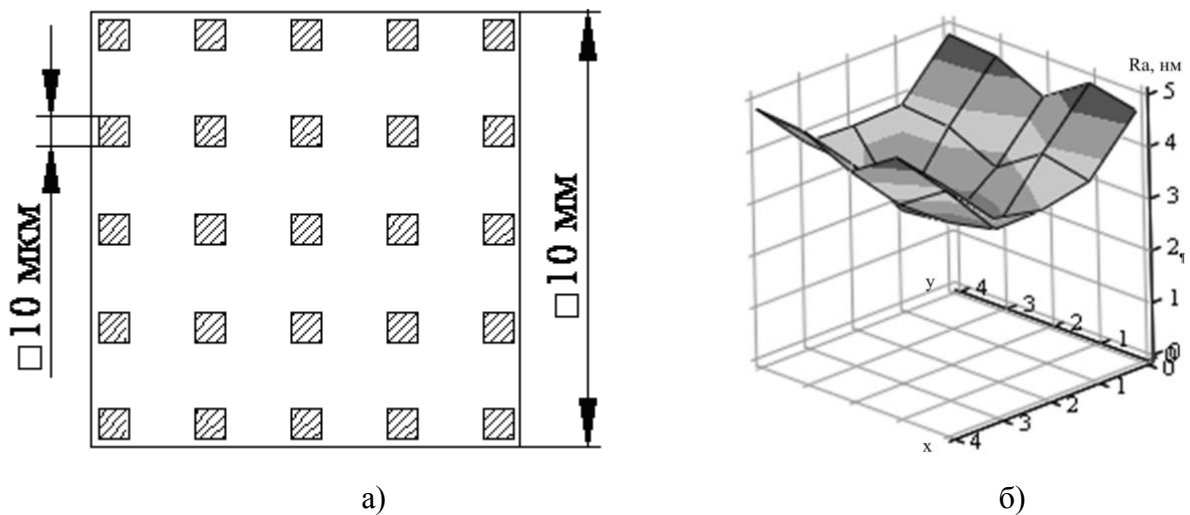


Рисунок 5.20 – Визначення розподілу середньої висоти мікронерівностей Ra по поверхні обробленій стрічковим електронним потоком

5.3.4 Електротехнічні схеми автоматичного керування технологічним процесом обробки

Основною задачею системи автоматизованого керування (САК) (рис 5.21) є дотримання параметрів електронно-променевої обробки оптичних виробів в заданому діапазоні та забезпечення стабільного руху виробів під електронним потоком в діапазоні швидкостей 0,5...8 см/с за довільно заданим законом.

Система починає роботу після завантаження виробів у вакуумну камеру та герметизації її об'єму і закінчує функціонування після напуску повітря у технологічний об'єм з обробленими виробами. Робота оператора установки полягає в підготовці виробів перед обробкою, завантаженні їх у вакуумну камеру, спостереженні за параметрами технологічного процесу та корегуванні режимів обробки, вивантаженні виробів з камери та їх пакування. Дана САК має трирівневу децентралізовану структуру – система містить комплекс підсистем поділених на три рівні ієрархії, де підсистеми нижчого рівня підпорядковані підсистемам вищого рівня.

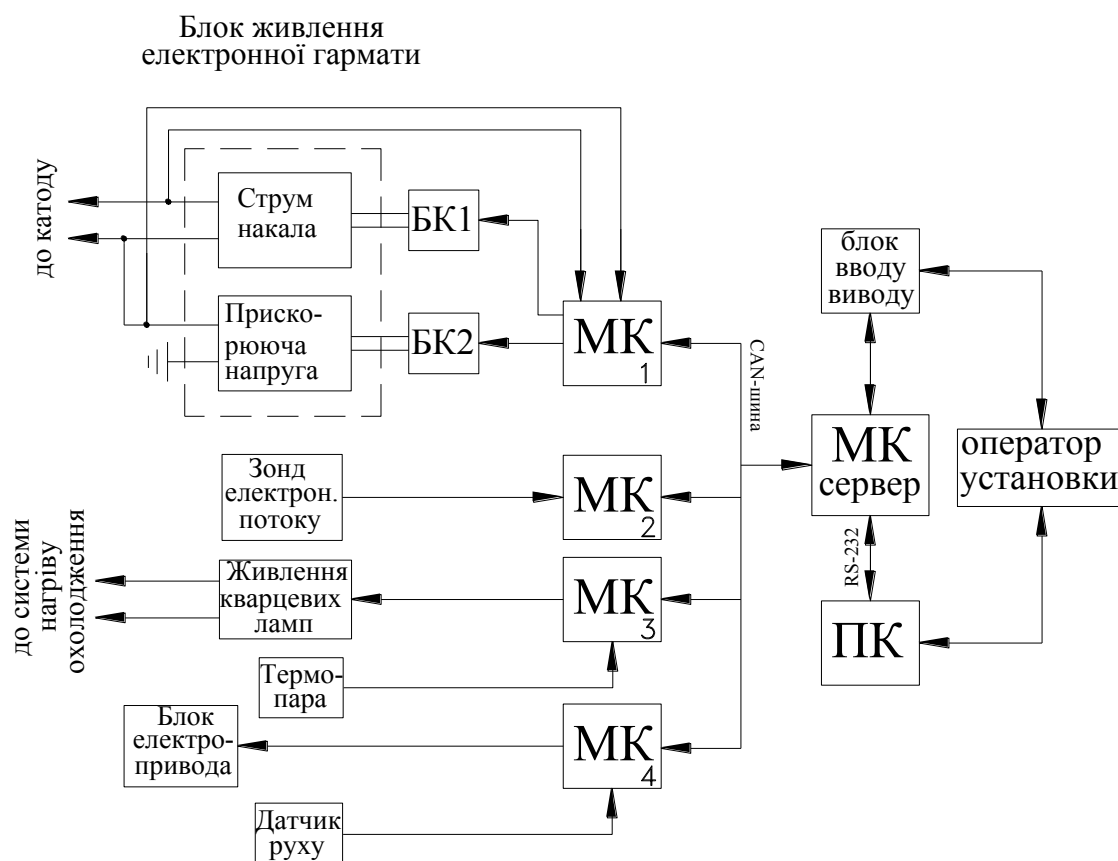


Рисунок 5.21 – Загальна схема системи автоматизованого керування установкою електронно-променевої обробки оптичних матеріалів: ПК – персональний комп'ютер; МКсервер – мікропроцесорний блок керування установкою електронно-променевої обробки; МК₁ – мікропроцесорний блок керування потужністю електронного потоку; МК₂ – мікропроцесорний блок зондування електронного потоку; МК₃ – мікропроцесорний блок керування температурним режимом заготовок; МК₄ – мікропроцесорний блок керування переміщенням заготовок; БК1 – блок керування струмом розігріву катода; БК2 – блок керування прискорюючою напругою; RS-232 (Recommended Standard) – рекомендований стандарт послідовного інтерфейсу між персональним комп'ютером та зовнішніми пристроями; CAN (Controller Area Network) – стандарт промислової мережі, орієнтований перш за все на об'єднання в єдину мережу різних виконавчих пристроїв і датчиків

Така структура підвищує надійність САК, оскільки вихід з ладу або збій однієї з підсистем дозволяє системі провести дії передбачені на випадок аварійної ситуації і легко діагностувати джерело збою.

Нижній рівень САК складається з окремих підсистем, кожна з яких керується власним мікроконтролером. До нижнього рівня САК входять наступні підсистеми: керування механізмом переміщення об'єкту обробки,

керування ЕПГ, обробки даних зондування електронного потоку, керування нагрівом/охолодженням заготовок.

Системи можуть працювати в автономному режимі, для чого кожна має енергонезалежну пам'ять в якій зберігається алгоритм дії цієї системи.

Таке конструктивне рішення пов'язано з необхідністю здійснювати незалежні дослідження кожного модуля установки.

До середнього рівня САК електронно-променевої установки відноситься система, завданням якої є об'єднання нижчих підсистем до єдиного керуючого комплексу, яким здійснюється повний цикл електронно-променевої обробки. Система середнього рівня здійснює загальне керування установкою в режимі реального часу.

В якості керуючих контролерів систем середнього та нижніх рівнів використані 8-ми та 16-ти бітні мікроконтролери фірми Microchip Technology Inc. Обмін даними між мікроконтролерами здійснюється по дводротовому послідовному інтерфейсу CAN (Controller Area Network), що об'єднує їх в єдину мережу.

Вибір даного інтерфейсу пов'язаний з такими його перевагами: велика захищеність даних від зовнішніх електромагнітних завад (що особливо актуально при роботі мережі в безпосередній близькості з високовольтними блоками живлення, до 12 кВ та з провідниками в яких комутуються великі струми, до 50 А) та механічних пошкоджень (може працювати навіть при обриві одного з провідників), висока швидкість передачі даних (до 1 Мбіт/с); можливість приєднання та видалення з мережі окремих вузлів без перенастроювання всієї мережі (для цього необхідно щоб програмне забезпечення кожного вузла відповідало вимогам протоколу більш високого рівня, найбільш поширеним з яких є протокол CANopen, дана особливість дозволяє використовувати розроблені блоки керування без зміни програмного забезпечення в будь-яких інших промислових установках, які керуються системами, що працюють за протоколом CANopen); мінімальна використана кількість провідників (два провідника даних і один – загальна

шина); простота реалізації його електричної частини.

Функції старшого рівня САК виконує ПЕОМ з процесором не нижче Pentium III 600 МГц. За допомогою спеціального програмного забезпечення ПЕОМ з'єднується з системами нижчого рівня і здійснює завантаження робочої програми і зчитує зібрані та перероблені дані з датчиків технологічного обладнання.

Головною функцією старшого рівня САК є зв'язок між оператором електронно-променевої установки і системами керування нижчих рівнів. Зв'язок між середнім та старшим рівнем здійснюється через стандартний RS-232 інтерфейс, який дозволяє оперативно і з високою точністю відображати усі дані про процес зібрані системою на екрані монітора ПЕОМ.

На першому етапі оператор за допомогою програми моделювання електронно-променевої обробки задає вхідні технологічні дані (матеріал заготовки, температура поверхні, глибина проплавлення, тощо), і отримує робочу програму обробки.

Далі оператор запускає програму зв'язку з середнім рівнем системи і в діалоговому режимі задаються такі параметри обробки, як-то: термопрофіль попереднього нагріву та завершального охолодження, закон руху об'єкта обробки, потужність та розподіл електронного потоку. Після цього проводиться завантаження пластин з оптичного скла, які необхідно обробити і герметизація об'єму вакуумної камери.

Першим етапом роботи електронно-променевої установки є створення вакуумною системою робочого тиску в камері ($\sim 5 \cdot 10^{-4}$ Па). Далі оператором після введення всіх початкових даних може бути запущена програма електронно-променевої обробки виробу в автоматичному режимі. Дана програма виконується блоком МК-сервер.

Алгоритмічна схема роботи центрального блоку керування установки електронно-променевої обробки наведена в додатку А. Алгоритм проведення електронно-променевої обробки в автоматичному режимі представлено на рис. 5.22.

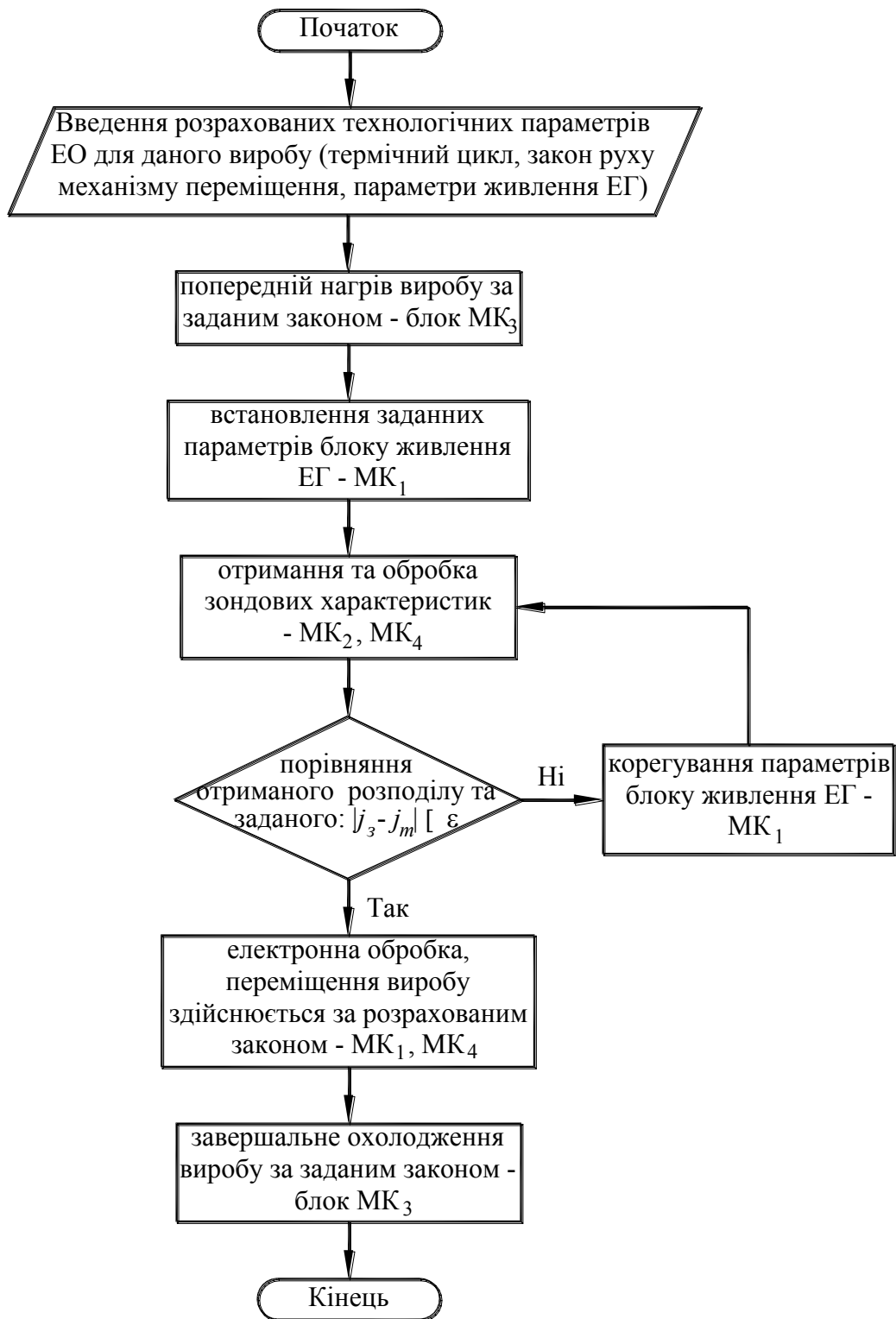


Рисунок 5.22 - Алгоритм керування процесом ЕПО оптичних матеріалів

За цим алгоритмом МК-сервер в заданому порядку вмикає блоки нижчого рівня, які здійснюють керування окремими вузлами установки. Також МК-сервер здійснює передачу через CAN-шину даних про закон руху виробу та термічний цикл на відповідні блоки.

В ході виконання електронно-променевої обробки стан окремих вузлів установки відображається на дисплеї монітора, а при відхиленні від нормального режиму оператор може внести зміни в хід процесу, або здійснити аварійне відключення установки.

Схема керування переміщенням об'єкта обробки. Задача відносного переміщення виробів, що оброблюються електронним потоком вирішується за допомогою автоматизованої системи механічного переміщення.

Схема керування механізмом переміщення виробів при електронно-променевої обробці побудована на базі мікроконтролера PIC18F458 фірми Microchip Technology (рис. 5.23).

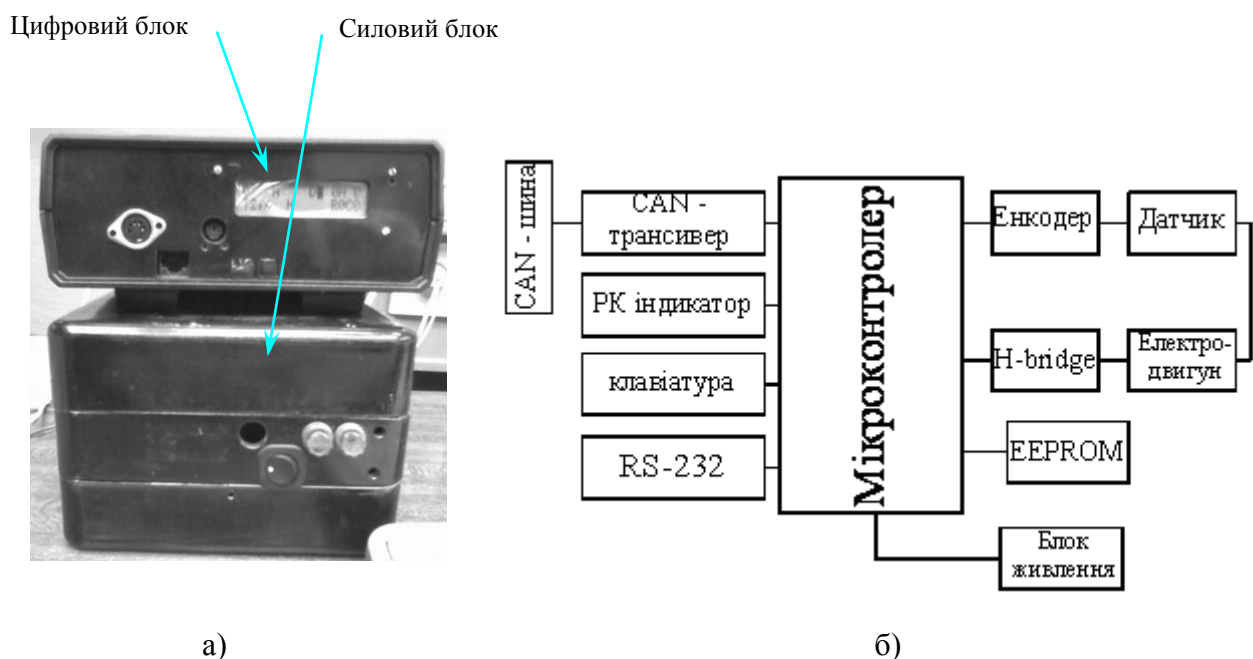


Рисунок 5.23 – Зовнішній вигляд (а) та блок-схема (б) мікропроцесорної системи керування механізмом переміщення оптичних пластин при електронно-променевої обробці: EEPROM – зовнішня енергонезалежна пам'ять, призначена для зберігання інструкцій, таблиць та констант; H-bridge – транзисторний міст, складається з чотирьох силових n-канальних MOSFET транзисторів, призначений для реверсування двигуна; CAN-трансивер перетворювач цифрового сигналу з TTL-рівнями, у диференційний сигнал; CAN-шина – двопровідна шина, призначена для об'єднання у мережу пристроїв та датчиків; БЖ – блок живлення системи керування

Програма для блоку керування механізмом переміщення написана на алгоритмічній мові С (додаток Б).

Розроблений пристрій має наступні можливості:

- регулювання швидкості переміщення візка в діапазоні 0...8 см/с з кроком 0,01 см/с;
- підтримка заданої швидкості з точністю 0,05 см/с;
- позиціонування виробу з точністю ± 50 мкм;
- реалізація зворотного зв'язку за переміщенням і позиціонування об'єкта обробки за допомогою поворотного шифратора з оптичним детектором, з кроком вимірювання 10 мкм;
- автоматична зупинка електродвигуна за сигналом кінцевих датчиків та датчиків аварійного режиму;
- керування переміщенням об'єкта обробки в ручному (швидкість та напрям руху задається оператором установки) та автоматичному режимах (за заданим законом руху);
- в автоматичному режимі при переміщенні об'єкта обробки по заданому алгоритму, точність забезпечується цифровим ПД-регулятором;
- зв'язок із зовнішніми пристроями за допомогою інтерфейсів RS-232 (для обміну даними з ПЕОМ); CAN (для обміну даними з іншими мікропроцесорними системами, що входять до автоматичного комплексу керування установкою електронно-променевої обробки).

Важливою перевагою розробленої схеми є можливість зміни швидкості переміщення під час проходження виробу під електронною стрічкою, що дає можливість реалізувати оптимальне керування процесом електронно-променевої обробки.

З метою встановлення меж можливостей керованої електронно-променевої обробки оптичних матеріалів проводяться дослідження динамічних характеристик електроприводу механізму переміщення.

На рисунку 5.24 представлено експериментальні криві зняті при позиціонуванні заготівки на відстань 20 мм з максимальною швидкістю.

Як видно з графіків 5.24 а, б встановлення нового положення відбувається за час близько 0,7 с, при чому протягом часу позиціонування відхилення від заданого положення не перевищує 2 мм. З рис. 5.24 в, г видно, що після переміщення в зону навколо заданої точки через близько 0,3 с відхилення швидкості від заданої не перевищує 7 мм/с.

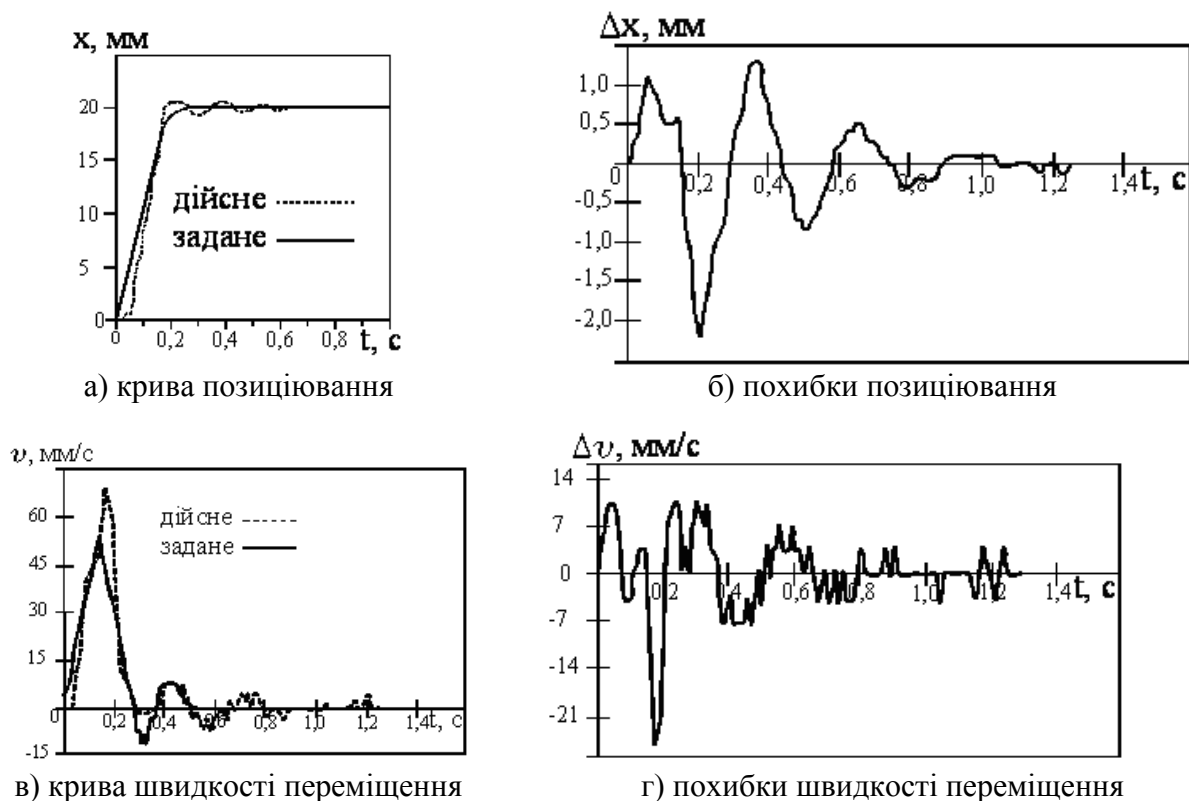


Рисунок 5.24 - Типова реакція приводу при позиціюванні заготовки

На рис. 5.25 представлено експериментальні криві розгону заготовки від нерухомого положення до швидкості 40 мм/с.

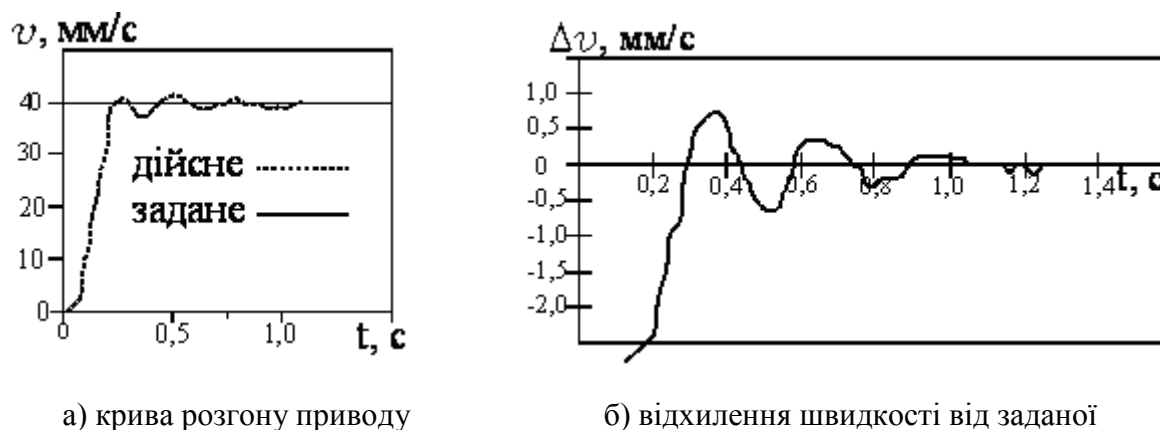


Рисунок 5.25 – Перехідний процес механізму переміщення при східчастому сигналі

Як видно з рис. 5.25 а, встановлення стабільної швидкості відбувається за час близько 0,7 с. З рис. 5.25, б видно, що час розгону складається з двох відрізків, а саме: розгін з максимальним прискоренням до швидкості близько 40 мм/с, складає 0,3 с, стабілізація швидкості переміщення складає 0,4 с. Проведене дослідження показало, що відхилення від заданої швидкості під час стабілізації руху не перевищує 1 мм/с.

Порівняльна характеристика схем керування рухом виробів у вакуумній камері установки для їх електронно-променевої обробки представлена в табл. 5.9.

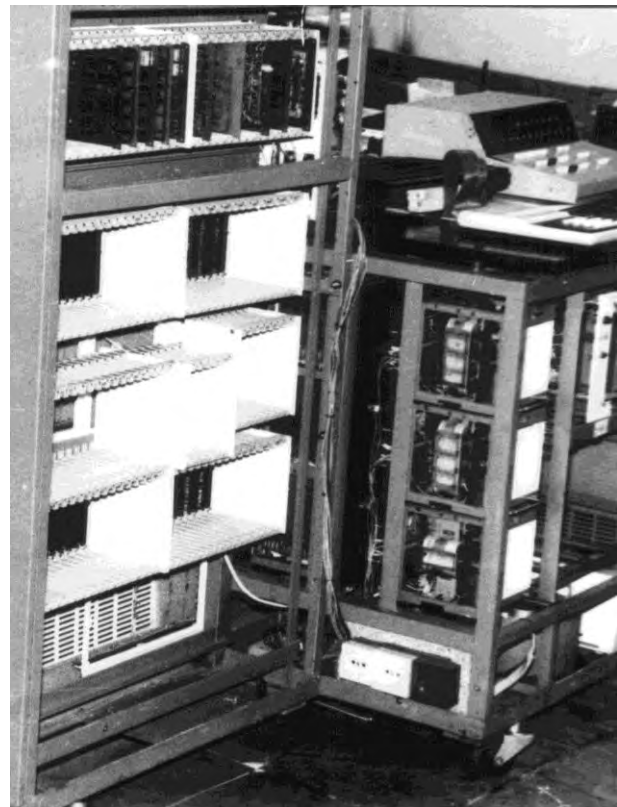
Таблиця 5.9 - Порівняльна характеристика схем керування рухом заготовок у вакуумній камері установки для електронно-променевої обробки оптичних матеріалів

Характеристика	УЭЛИ-1А	Існуюча схема керування	Схема керування, розроблена авторами
Двигун	СЛ-369	СЛ-369	СЛ-369
Статор	Змінна напруга 220 В	Стабілізована постійна напруга 110 В	Стабілізована постійна напруга 110 В
Якорь	Випрямлена двонапів-періодна напруга, яка регулюється тиристорним регулятором	Стабілізована напруга 110 В, яка регулюється ШІМ змінної скважності частотою 1,22 кГц	Стабілізована напруга 110 В, яка регулюється ШІМ змінної скважності частотою 8 кГц
Реверс	Реле	Реле	Транзисторний міст
Зворотній зв'язок	Відсутній	Поворотний шифратор без визначення напрямку обертання (крок 3°)	Реверсивний поворотний шифратор (крок 0,9°), вимірювання струму ротора двигуна
Керування	Механізм переміщення не стабілізований. Здійснюється ручне керування	Механізм переміщення з мікропроцесорною напівавтоматичною системою керування	Механізм переміщення з мікропроцесорною автоматичною системою керування
Людино-машинний інтерфейс	Поворотний регулятор швидкості, кнопки вибору напрямку переміщення	Інтелектуальний інтерфейс (три кнопки керування, 7-ми розрядний числовий індикатор)	Інтелектуальний інтерфейс (АТ-клавіатура, символний РК-індикатор (2x16 символів))
Зовнішній інтерфейс	Відсутній	Відсутній	RS-232, CAN
Точність	забезпечує не стабілізовану швидкість переміщення в діапазоні 15...100 мм/с	забезпечує стабільну швидкість переміщення в діапазоні 15...100 мм/с	забезпечує переміщення об'єкту обробки по заданому від САУ ЕПО алгоритму в діапазоні 0,5...80 мм/с (точність $\delta v = 0,1$ мм/с)

Схеми вимірювання температури в зоні обробки та зондування електронного потоку. Для проведення спеціальних досліджень (вимірювання температури в зоні обробки залежно від керованих параметрів електронного потоку; його зондування і встановлення залежностей між його енергетичними характеристиками (потужністю P_0 , коефіцієнтом зосередженості k_0 і шириною зони впливу $2b$) і керованими параметрами потоку використовуються відомі лабораторно-вимірювальні комплекси (рис. 5.26).



Вимірювальна система



Блок керування системою

Рисунок 5.26 – Лабораторно-вимірювальні комплекси для зондування електронних потоків та вимірювання температури оброблюваних поверхонь

Схема для вимірювання температури в зоні впливу електронного потоку складається з таких елементів: приймальної частини інфрачервоного (ІЧ) випромінювання від оброблюваного виробу на базі фоторезистора і механічного пристрою, що виключає засвічування розжареною ниткою катода електронно-променевої гармати; аналого-цифрового перетворювача, що перетворює сигнал з підсилювача у двійковий код подальшої машинної

обробки; керуючої міні-ЕОМ типу К1-20 для нагромадження інформації про вимірювання температури в зоні впливу СЕП на виріб.

Як фотоприймальний пристрій для ІЧ-випромінювання використовувався стандартний фоторезистор «ФУО-613», техніко-експлуатаційні характеристики якого докладно описані в роботі. Градування зазначеного фоторезистора здійснювалося по істинній температурі об'єкта й проводилося з використанням прецизійного програмного терморегулятора «РИФ-101» у такій послідовності:

- 1) на оброблюваний СЕП об'єкт установлювався термоперетворювач «ТПП-0679-01»;
- 2) термоперетворювач «ТПП-0679-01» підключався до терморегулятора «РИФ-101»;
- 3) вимірювання вихідного аналогового сигналу з підсилювача здійснювалося цифровим вольтметром типу «В7-21».

Розігрів оброблюваного об'єкта здійснювався до температури 1100 К –

для оптичної кераміки КО2, 1400 К – для оптичного скла К8 протягом 2 годин з метою виключення похибки вимірювання за рахунок постійної часу термоперетворювача «ТПП-06979-01».

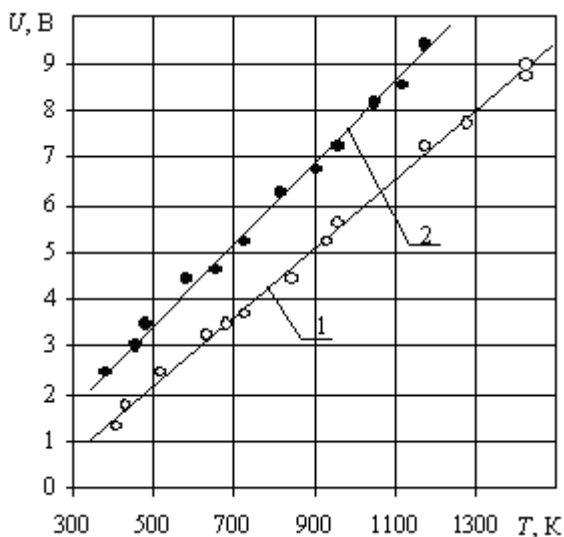


Рисунок 5.27 - Градувальні криві фоторезистора «ФУО-613» для оптичного скла К8 (1) і оптичної кераміки КО2 (2):

U – вихідна напруга фоторезистора з підсилювачем, В; O , \bullet – експериментальні точки, отримані за допомогою термоперетворювача «ТПП – 0679-01» відповідно на склі К8 та кераміці КО2

Похибка вимірювання температури становила $\pm 5\%$. Отримані в результаті проведених досліджень середньостатистичні градувальні криві (розкид значень температури в межах кожної експериментальної точки не перевищував $\pm 1\%$) зображені на рис. 5.27.

Проведені експериментальні дослідження щодо вимірювання T_m за допомогою зазначеної вище методики для робочих діапазонів зміни параметрів СЕП показали, що її значення можуть досягати 700...1400 К.

Для більш ефективного використання отриманих експериментальних даних при аналізі та коректуванні технологічних режимів електронно-променевої обробки оптичних матеріалів вони були математично оброблені за допомогою спеціально розробленого пакета прикладних програм, в результаті чого були отримані такі залежності (відносна похибка 5...7 %):

оптичне скло К8:

$$T_m(I_{\text{п}}, U_{\text{п}}, l, V, t) = 1125,79 + 9,12 \cdot 10^{-3} I_{\text{п}} + 2,56 U_{\text{п}}^2 - 0,963 l + 3,24 t + 4,18 \cdot 10^{-2} I_{\text{п}} t + 7,53 \cdot 10^{-3} I_{\text{п}} l + 6,17 U_{\text{п}} t - 1,87 \cdot 10^{-7} l t + 3,06 t^2 - 2,73 \cdot 10^3 V^2 - 46,5 V t. \quad (5.2)$$

оптична кераміка КО2:

$$T_m(I_{\text{п}}, U_{\text{п}}, l, V, t) = 824,69 + 6,11 \cdot 10^{-3} I_{\text{п}} + 0,53 U_{\text{п}}^2 - 0,676 l + 0,42 t + 1,12 \cdot 10^{-2} I_{\text{п}} t + 4,43 \cdot 10^{-3} I_{\text{п}} l + 3,21 U_{\text{п}} t - 0,61 l t + 0,42 t^2 - 0,84 \cdot 10^2 V^2 - 1341,2 V t. \quad (5.3)$$

де $I_{\text{п}}$ – в мА; $U_{\text{п}}$ – в кВ; l – в мм; V – в м/с; t – в с; T_m – в К.

Відповідно формулам (5.2)–(5.3) експериментальні залежності T_m від параметрів СЕП представлені на рис. 5.28, 5.29.

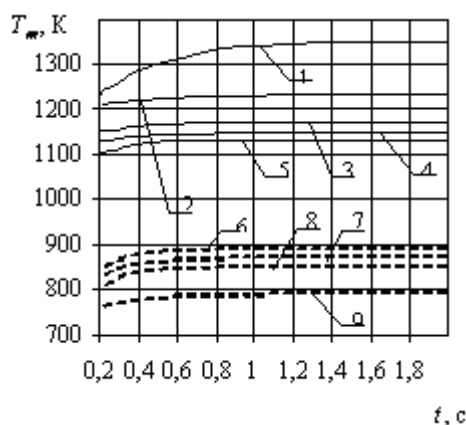


Рисунок 5.28 - Експериментальні залежності температури T_m в зоні обробки оптичних матеріалів від часу впливу СЕП: 1 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 8$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 2 – $I_{\text{п}} = 200$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 3 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,005$ м/с; 4 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 5 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 80$ мм, $V = 0,02$ м/с; 6 – $I_{\text{п}} = 200$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 7 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 6$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 8 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,005$ м/с; 9 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{п}} = 4$ кВ, $l = 80$ мм, $V = 0,02$ м/с; ————— – оптичне скло К8; - - - - - оптична кераміка КО2

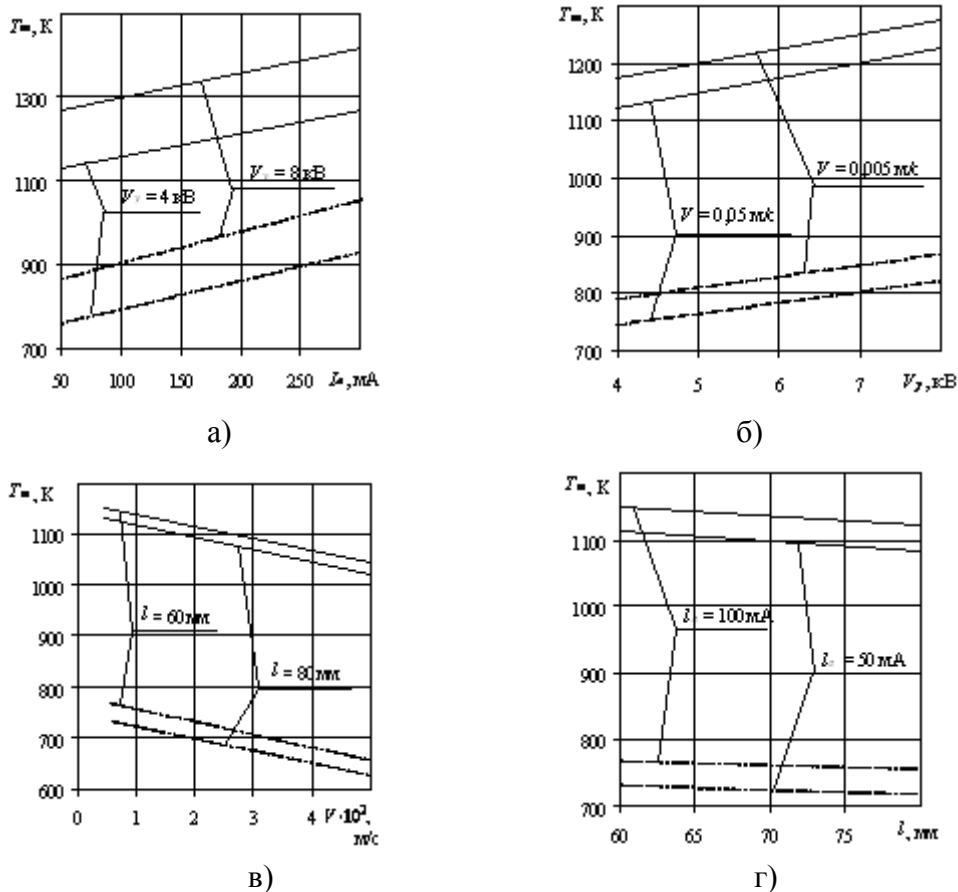


Рисунок 5.29 – Експериментальні залежності температури T_m в зоні обробки оптичних матеріалів від параметрів СЕП: а) – $t = 0,5$ с, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; б) – $t = 0,5$ с, $I_{п} = 50$ мА, $l = 60$ мм; в) – $t = 0,5$ с, $I_{п} = 50$ мА, $U_{пр} = 4$ кВ; г) – $t = 0,5$ с, $U_{пр} = 4$ кВ, $V = 0,02$ м/с; ————— – оптичне скло К8; - - - - - оптична кераміка КО2

З отриманих даних випливає, що із зростанням часу обробки оптичних матеріалів температура T_m виходить на квазістаціонарний режим. При цьому із зростанням параметрів $I_{п}$ та $U_{пр}$ температура T_m зростає, а із збільшенням параметрів V та l , навпаки, температура T_m зменшується.

Схема стаціонарного зондування електронного потоку (метод зонда, що обертається). У проведених дослідженнях було встановлено, що найповнішим, тобто таким, що залежить від найбільшої кількості енергетичних параметрів СЕП, і точнішим (результати розрахунків температурних полів в оброблюваних оптичних матеріалах точніше відповідають експериментальним даним) математичним описом СЕП як рухомого джерела тепла є нормальний закон розподілу густини його

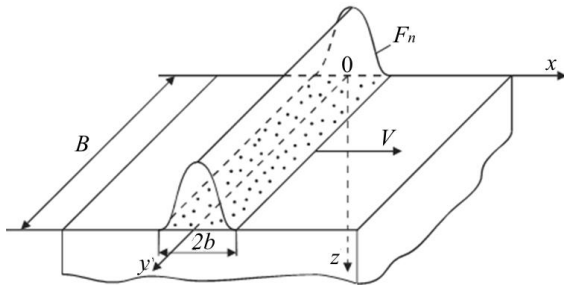


Рисунок 5.30 – Схема теплового впливу рухомого стрічкового електронного потоку на оптичний елемент: F_n – тепловий потік, нормально розподілений уздовж x і рівномірно – уздовж y , Вт/м²; $2b$, B – товщина й ширина електронного потоку, м; V – швидкість руху потоку, м/с

теплового впливу (теплового потоку F_n) по поверхні оброблюваного оптичного елемента (рис. 5.30):

$$F_n(x, t) = F_0(t) e^{-k(t)x^2}, \quad (5.4)$$

де $F_0(t)$ – тепловий потік у центрі джерела; $k(t)$ – коефіцієнт зосередженості (гострота теплового імпульсу), м⁻². Тоді потужність джерела $P(t)$ буде пов'язана з

функцією $F_0(t)$ в такий спосіб:

$$P(t) = \iint_S F_n(x, t) dx dy = \int_0^B dy \int_{-b}^b F_n(x, t) dx = B F_0(t) \int_{-b}^b e^{-k(t)x^2} dx. \quad (5.5)$$

Використовуючи поняття спеціальної функції (інтеграла помилок) [11]:

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt, \quad (5.6)$$

одержуємо

$$F_0(t) = \frac{P(t)}{B} \sqrt{\frac{k(t)}{\pi}} \frac{1}{\text{erf}(b \sqrt{k(t)})}. \quad (5.7)$$

Підставляючи (5.5) у (5.2), остаточно одержуємо:

$$F_n(x, t) = \frac{P(t)}{B} \sqrt{\frac{k(t)}{\pi}} \frac{e^{-k(t)x^2}}{\text{erf}(b \sqrt{k(t)})}. \quad (5.8)$$

Для випадку постійно діючого джерела ($k(t) = k_0 = \text{const}$, $P(t) = P_0 = \text{const}$):

$$F_n(x) = \frac{P_0}{B} \sqrt{\frac{k_0}{\pi}} \frac{e^{-k_0 x^2}}{\text{erf}(b \sqrt{k_0})}. \quad (5.9)$$

У формулу (5.9) входять такі енергетичні параметри джерела: P_0 , b й k_0 , які визначають інтенсивність теплового впливу СЕП на оптичні матеріали. Для підвищення ефективності керування тепловими режимами електронно-променевої обробки оптичних матеріалів, і тим самим підвищення

ефективності всього процесу обробки, необхідно зв'язати зазначені параметри СЕП з його керованими параметрами, основними з яких є зазначені вище струм електронного потоку $I_{\text{п}}$, прискорююча напруга $U_{\text{пр}}$ й відстань від оброблюваної поверхні l . При цьому ширина СЕП (довжина вольфрамового катода в розглядуваній конструкції ЕПГ Пірса) є постійною величиною (наприклад, для виду електронно-променевої обробки, представленої на рис. 5.31, зазначена ширина дорівнює B) і дорівнює 0,6 м. Потужність СЕП виражається такою відомою формулою:

$$P_0 = I_{\text{п}} U_{\text{пр}}. \quad (5.10)$$

Підставляючи (5.10) у (5.9), одержуємо такий вираз для теплового потоку $F_n(x)$, що надходить в оброблюваний матеріал (згідно з експериментальними даними втрати енергії в загальному енергетичному балансі з зони обробки на електронну емісію (вторинні електрони, непружно розсіяні, пружно відбиті), світлове й рентгенівське випромінювання знехтуванно малі порівняно з використовуваною енергією СЕП (діапазон зміни $F_n = 10^7 \dots 10^8$ Вт/м² [29])):

$$F_n(x) = \frac{I_{\text{п}} U_{\text{пр}}}{B} \sqrt{\frac{k_0}{\pi}} \frac{e^{-k_0 x^2}}{\text{erf}(b \sqrt{k_0})}. \quad (5.11)$$

Для знаходження енергетичних параметрів b й k_0 у формулі (5.11) використовувалася лабораторно-вимірювальна система, пристосована для зондування електронних потоків різної форми (кругової, стрічкової тощо) [114].

Як метод зондування СЕП, застосований в зазначеній системі, використовується відомий метод обертового зонда, сутність якого полягає в тому, що тонкий обертовий зонд, перетинаючи електронний потік перпендикулярно його осі, відбирає на себе частину струму. За кривою зондового струму судять про параметри $2b$ та k_0 .

При проведенні експериментів зондові характеристики знімали при постійній прискорюючій напрузі $U_{пр} = 6$ кВ, струмах електронного потоку $I_{п} = 50, 150, 200, 250, 300$ мА та відстанях $l = 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$ м.

На рис. 5.31 зображені отримані зондові характеристики.

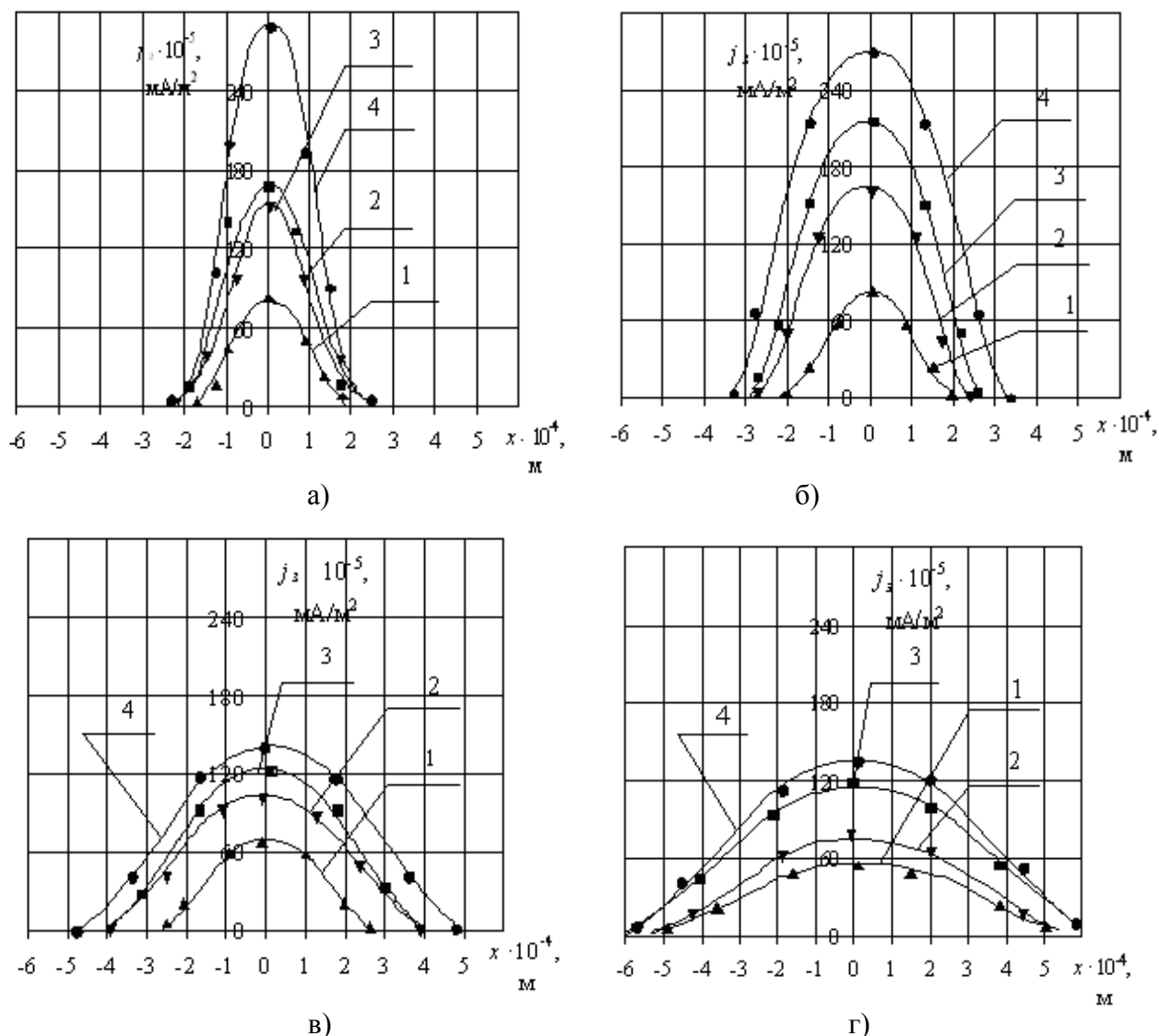


Рисунок 5.31 - Розподіл густини струму I_z зондової характеристики по товщині СЕП залежно від відстані l і струму $I_{п}$: а) $l = 40$ мм; б) $l = 60$ мм; в) $l = 80$ мм; г) $l = 100$ мм; 1 – $I_{п} = 150$ мА; 2 – $I_{п} = 200$ мА; 3 – $I_{п} = 250$ мА; 4 – $I_{п} = 300$ мА

Аналіз отриманих зондових характеристик СЕП показує, що розподіл густини струму по перетину потоку близький до нормального закону, що підтверджується також результатами інших досліджень [114]. Крім того, з отриманих даних випливає, що зі збільшенням відстані l збільшується

товщина потоку $2b$ і розподіл густини струму $i_{\zeta}(x)$ стає більш пологим. При цьому незалежно від зазначеної відстані зі зменшенням струму $I_{\text{п}}$ розподіл струму стає більш гострим. Зі збільшенням струму $I_{\text{п}}$ збільшується товщина електронного потоку $2b$, а розподіл густини струму “розмивається”.

Для одержання аналітичних залежностей $k_0(I_{\text{п}}, l)$ і $b(I_{\text{п}}, l)$ була проведена математична обробка зондових характеристик СЕП за допомогою спеціально розробленого пакета прикладних програм “REGINT”.

Експериментальні дані про зондування СЕП показали, що розподіл густини струму зондування j_z по його товщині описується законом нормального розподілу (рис. 5.32):

$$i_{\zeta}(x) = j(0) e^{-k_0 x^2}, \quad (5.12)$$

де $j(0)$ – максимальне значення густини струму зондування, mA/m^2 .

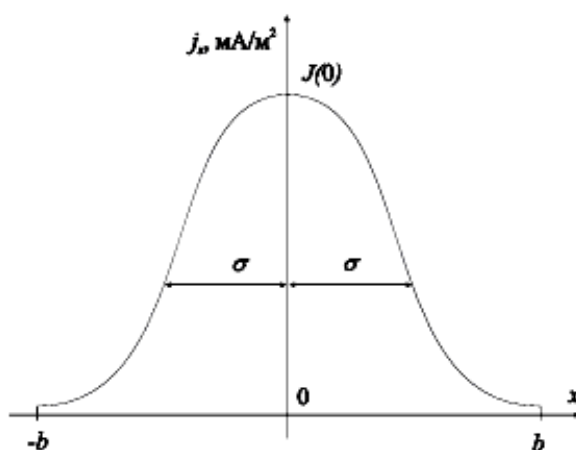


Рисунок 5.32 - Схематичний розподіл густини струму зондування по товщині СЕП: σ – відстань, що визначає положення точок перегину на кривій $i_{\zeta}(x)$

Відповідно до загальноприйнятих методів обробки зондових характеристик електронних потоків коефіцієнт зосередженості розподілу струму по товщині СЕП $[\text{m}^{-2}]$ визначався за формулою

$$k_0 = \frac{1}{2 \sigma^2}, \quad (5.13)$$

а товщина СЕП $[\text{m}]$ визначається на рівні 5% амплітуди:

$$\Delta_{0,05} = 2 b = \frac{3,46}{\sqrt{k_0}}. \quad (5.14)$$

Параметри розподілу густини струму j_3 зондової характеристики по товщині СЕП отримують розрахунковим шляхом (таблиця 5.10).

Таблиця 5.10 – Параметри розподілу струму по товщині СЕП

I_z , мА	l , мм	$j(0) \cdot 10^{-5}$, мА/м ²	$\sigma^2 \cdot 10^8$, м ²	$k_0 \cdot 10^{-8}$, м ⁻²	$\Delta_{0,05} \cdot 10^3$, м
150	40	97	1,016	0,494	0,492
200	40	170	1,024	0,502	0,488
250	40	189	0,992	0,471	0,504
300	40	289	0,996	0,474	0,502
150	60	83	1,037	0,515	0,482
200	60	159	0,982	0,462	0,509
250	60	191	0,946	0,429	0,528
300	60	268	0,883	0,374	0,566
150	80	70	0,623	0,186	0,802
200	80	100	0,585	0,164	0,854
250	80	126	0,566	0,154	0,882
300	80	147	0,546	0,143	0,915
150	100	60	0,952	0,098	1,105
200	100	69	0,418	0,084	1,194
250	100	105	0,379	0,069	1,317
300	100	127	0,326	0,052	1,532

Математична обробка результатів, поданих у таблиці 5.10 приводить до такої формули:

$$F_i(x) = \frac{I_i U_{i\delta}}{B} \sqrt{\frac{k_0(I_i, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_i, l)x^2}}{\operatorname{erf}(b(I_i, l)\sqrt{k_0(I_i, l)})}, \quad (5.15)$$

де $k_0(I_i, l) = 9,367 \cdot 10^7 - 7,859 \cdot 10^5 l - (5,1 \cdot 10^4 - 1,3 \cdot 10^2 l) I_i$; (5.16)

$$b(I_i, l) = \frac{1,73}{\sqrt{k_0(I_i, l)}}. \quad (5.17)$$

Точність проведених експериментів оцінювалася порівнянням загального струму електронного потоку I_n , при якому знімалася зондова характеристика з об'ємом, який обмежений кривою густини струму $j_\zeta(x)$ (повним струмом електронного потоку, що отриманий експериментально). Крива $j_\zeta(x)$ отримана із зондової характеристики.

На підставі формули (5.12) з врахуванням рівномірності кривої $j_\zeta(x)$ вздовж вісі y , отримуємо для об'єму, обмеженого кривою густини струму, наступний вираз:

$$I_n = j_\zeta(0)B \sqrt{\frac{\pi}{k_0}} \operatorname{erf}(b\sqrt{k_0}). \quad (5.18)$$

Оцінки показують, що різниця між повним струмом електронного потоку в експериментах та за результатами розрахунку складає 10...12 %.

За отриманими емпіричними формулами (5.15) – (5.17) були побудовані такі залежності: $k_0(I_\Gamma, l)$, $2b(I_\Gamma, l)$ та $F_\Gamma(I_\Gamma, U_{\Gamma\delta}, l)$ (рис. 5.33, 5.34).

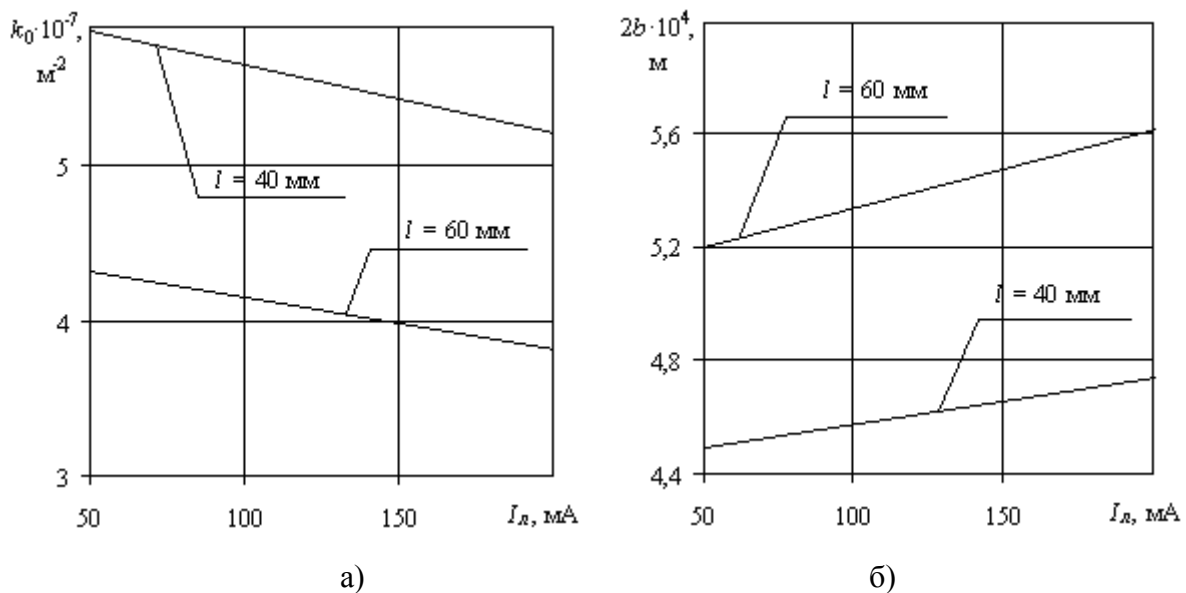
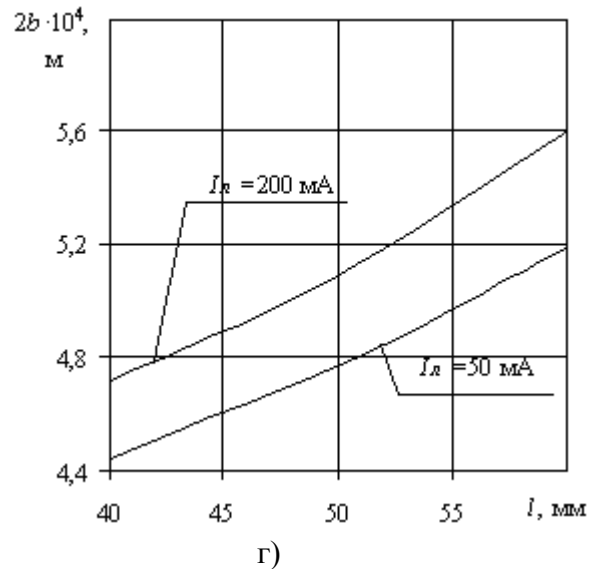
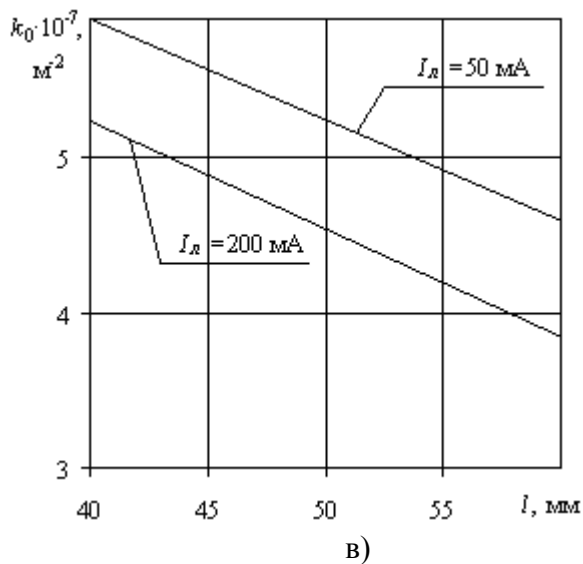


Рисунок 5.33 – Вплив керованих параметрів СЕП на його енергетичні характеристики: а), б) – вплив струму електронного потоку I_n на коефіцієнт зосередженості k_0 й товщину потоку $2b$



Продовження рисунку 5.33 – Вплив керованих параметрів СЕП на його енергетичні характеристики: в), г) – вплив відстані l від оброблюваної поверхні на коефіцієнт зосередженості k_0 й товщину потоку $2b$.

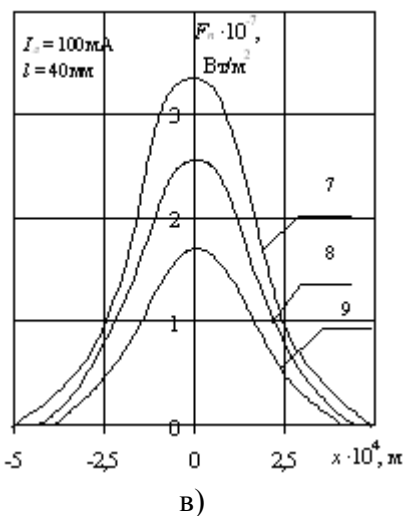
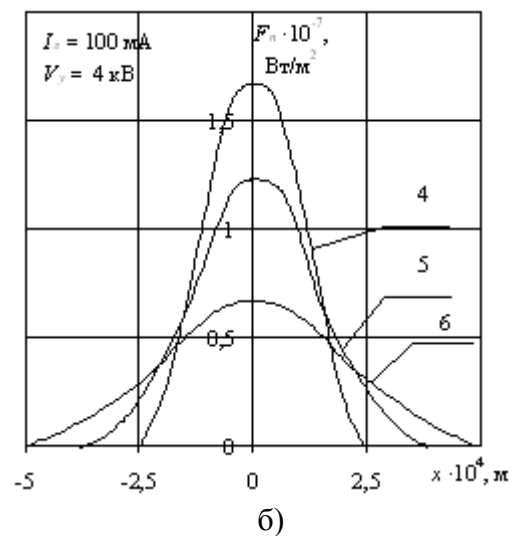
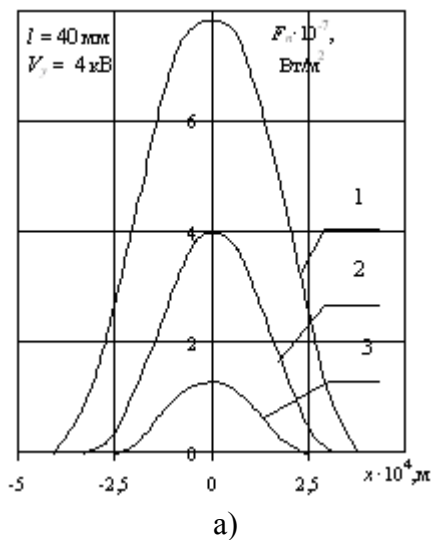


Рисунок 5.34 – Вплив керованих параметрів СЕП на густина його теплового впливу F_n на оптичні матеріали:

- а) – вплив струму електронного потоку I_n (1 – $I_n = 300$ мА, 2 – $I_n = 200$ мА, 3 – $I_n = 50$ мА);
- б) – вплив відстані l від оброблюваної поверхні (4 – $l = 40$ мм, 5 – $l = 60$ мм, 6 – $l = 80$ мм);
- в) – вплив прискорювальної напруги $U_{пр}$ (7 – $U_{пр} = 8$ кВ, 8 – $U_{пр} = 6$ кВ, 9 – $U_{пр} = 4$ кВ)

Аналіз експериментальних даних про зондування СЕП (див. рис. 5.33) показує, що зі збільшенням струму електронного потоку від $I_{\text{п}} = 50$ мА до $I_{\text{п}} = 200$ мА коефіцієнт зосередженості k_0 зменшується в 1,2...1,25 рази, а товщина електронного потоку $2b$ збільшується в 1,10...1,15 рази; при цьому, зі збільшенням відстані від оброблюваної поверхні від $l = 40$ мм до $l = 60$ мм величина k_0 зменшується, а величина $2b$ зростає відповідно у 1,30...1,35 та у 1,15...1,20 рази.

Встановлено, що густина теплового впливу (тепловий потік) F_n електронного потоку на поверхню оброблюваних оптичних матеріалів залежить від таких керованих параметрів СЕП (див. рис. 5.34): струму електронного потоку $I_{\text{п}}$, прискорюючої напруги $U_{\text{пр}}$ й відстані від оброблюваної поверхні l ; при цьому зміна $I_{\text{п}}$ у межах 50...250 мА, $U_{\text{пр}} - 4...8$ кВ і $l - 40...80$ мм приводить до кількісної зміни величини F_n (наприклад, $F_{n\text{max}} = F_n(0)$ збільшується в 1,8 рази при збільшенні $I_{\text{п}}$ і в 2,1 рази при збільшенні $U_{\text{пр}}$, а при збільшенні l значення $F_{n\text{max}}$ зменшуються в 2,3 рази).

В цілому, проведені експериментальні дослідження щодо зондування СЕП для робочих діапазонів зміни його керованих параметрів ($I_{\text{п}} = 50...300$ А, $U_{\text{пр}} = 4...8$ кВ, $l = 40...80$ мм) дозволили встановити такі діапазони зміни його найважливіших енергетичних характеристик: коефіцієнт зосередженості (гострота теплового впливу СЕП) $k_0 = 0,5 \cdot 10^7 \dots 5 \cdot 10^7$ м⁻²; товщина електронного потоку (ширина зони теплового впливу СЕП) $2b = 0,5...1,5$ мм; максимальне значення теплового потоку (величина теплового потоку в центрі впливу СЕП) $F_{n\text{max}} = 0,7 \cdot 10^7 \dots 8,5 \cdot 10^7$ Вт/м², що повністю відповідає рівню значень цих параметрів для інших типів електронних потоків, наприклад, електронних потоків, що мають нормальний розподіл теплового потоку по радіусу (так званих колоподібних джерел теплового впливу).

Схема нестационарного електронного (оперативного) зондування електронного потоку. Схема оперативного зондування дозволяє проводити оперативні вимірювання розподілу енергії електронного потоку та корегувати режими обробки оптичних виробів [59]:

- вимірювання розподілу густини струму по перерізу стрічкових електронних потоків з питомою потужністю $10^2 \dots 10^3$ Вт/см²;
- проведення вимірювань безпосередньо в процесі обробки оптичних матеріалів;
- проведення вимірювань електронного потоку без впливу оброблюваної поверхні та на поверхні оптичного скла;
- отримання результатів в цифровому вигляді дозволяє їх використовувати для здійснення зворотного зв'язку в комп'ютеризованих комплексах керування технологічним процесом електронно-променевої обробки оптичних матеріалів.

В якості керуючого елемента системи зондування може бути використаний 16-ти бітний цифровий сигнальний контролер, наприклад, dsPIC30F4013 фірми Microchip Technologies.

Вимірювальним елементом є система з 13 зондів, довжиною 20 мм кожен, розташованих в ряд паралельно один до одного (рис. 5.35).

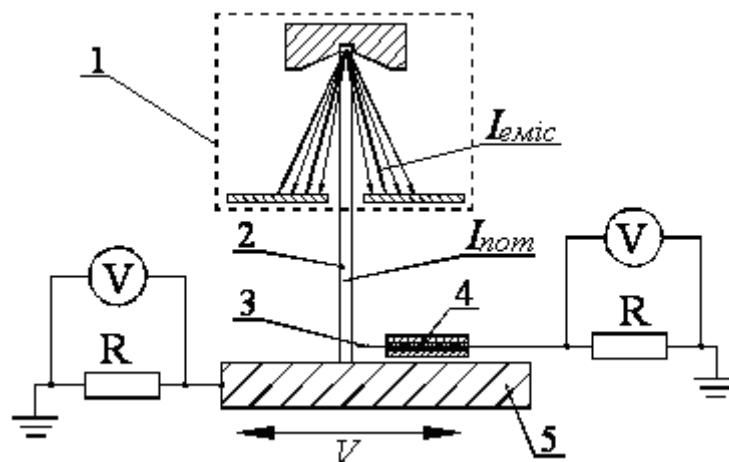


Рисунок 5.35 - Схема оперативного зондування електронного потоку стрічкової форми: 1 – модуль ЕПГ Пірса, 2 – стрічковий електронний потік, 3 – вольфрамові зонди, 4 – керамічний ізолятор, 5 – рухома платформа

Матеріал зондів – вольфрамовий дріт діаметром 0,1 мм. Для зменшення впливу на результати вимірювань явища вторинно-електронної емісії обрано дріт марки ВР-20Д, який має високе значення роботи виходу електронів.

Система затискається на візку механізму переміщення таким чином, що при русі візка спочатку під дією електронного потоку опиняється зондова система, а потім заготівка. Струм з кожного зонду подається на вимірювальну систему, яка розташована зовні вакуумної камери.

На рис. 5.36 представлено структурну схему вимірювання та обробки зондових даних. Для передачі даних до зовнішніх пристроїв прилад оснащено інтерфейсами RS-232 та CAN.

Пристрій може працювати в автономному режимі безпосередньо обмінюючись даними з ПЕОМ, або в складі автоматичного комплексу електронно-променевої установки.

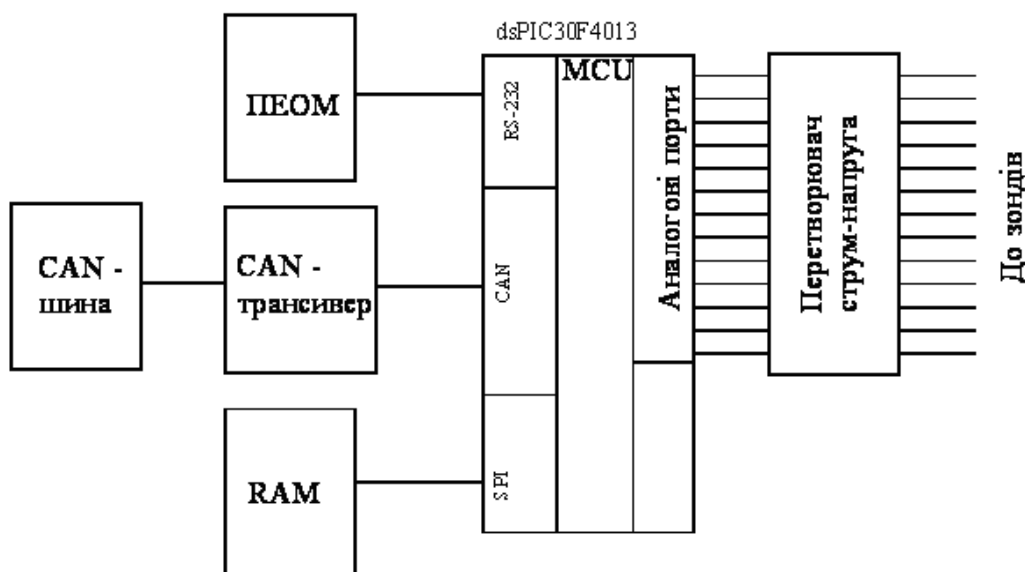


Рисунок 5.36 – Схема блоку обробки зондових характеристик: RAM – оперативна пам’ять, призначена для зберігання даних зондування перед передачею їх у зовнішній пристрій

Струм із зондів поступає на перетворювач „струм-напруга”, побудований на прецизійних операційних підсилювачах, наприклад, ОР-77. Мікроконтролер здійснює аналого-цифрове перетворення напруги. Мінімальний час зняття вимірів з кожного зонду складає 130 мкс. З CAN-мережі мікроконтролер отримує такі необхідні дані як-то: швидкість

переміщення зондів (обирається в межах 1..5 см/с), розташування зондів вздовж електронного потоку.

Після закінчення зондування електронного потоку мікроконтролер проводить обробку отриманих даних: диференціює характеристики з окремих зондів; перераховує їх на площу поперечного перерізу зондів; переводить одиниці аналого-цифрового перетворення в силу струму. Після цього здійснюється передача даних зондування, які використовуються системою автоматичного керування установкою для коригування напруг живлення електронно-променевої гармати та для візуального контролю процесу зондування за допомогою ПЕОМ. Спеціалізоване програмне забезпечення формує отримані дані у файл, де їх можна оглянути безпосередньо або за допомогою інструментів математичного пакету MATLAB у тривимірному вигляді.

Порівняльна характеристика методів зондування електронних потоків наведена в табл. 5.11.

Таблиця 5.11 - Порівняльна характеристика методів зондування електронних потоків стрічкової форми

Характеристика	Стаціонарне зондування	Оперативне зондування
Кількість зондів в системі	1	13
Відповідність отриманих характеристик реальному розподілу електронного потоку	Складна траєкторія руху зонда та наявність недостатньої кількості інформації дозволяє провести якісну оцінку розподілу електронного потоку за його шириною	Отримані дані є в достатній кількості і не потребують складної математичної обробки, сумарна похибка не перевищує 5 %
Оперативність отримання даних	Зондові характеристики отримуються при проведенні досліджень	Розподіл електронного потоку визначається перед ЕПО оптичних матеріалів
Врахування впливу оптичного скла на розподіл електронного потоку	Отримана інформація відповідає розподілу електронного потоку, без його впливу на оптичне скло	Отримана інформація відповідає розподілу електронного потоку при його впливі на оптичне скло
Збереження та візуалізація даних зондування	Візуалізація даних у вигляді графіків розподілу електронного потоку на екрані осцилографа	Дані зондування зберігаються в базі даних у цифровому вигляді на ПК

Схема керування тепловим режимом об'єкта обробки. Напряга живлення кварцових ламп системи нагріву регулюється тиристорним регулятором потужності, який входить до складу силового блоку приладу РИФ-101. Керування тиристорним регулятором здійснюється за допомогою мікропроцесорного блоку на базі мікроконтролера PIC18F458 (рис. 5.37). Задачею такого блоку є здійснення керованого попереднього нагріву та завершального охолодження оброблюваних зразків. Зворотній зв'язок забезпечується термопарним перетворювачем ТХА-1Е.

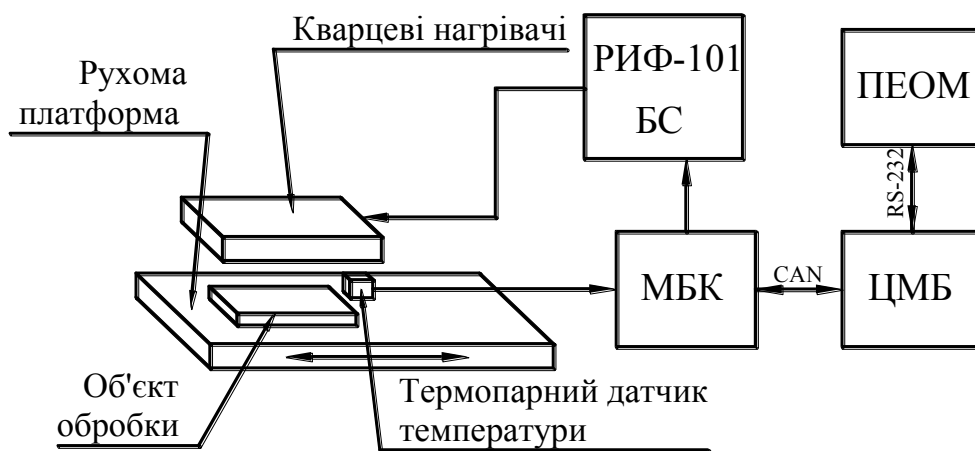


Рисунок 5.37 – Схема системи керування нагрівом та охолодженням оптичних матеріалів у вакуумі: БС – блок силовий приладу „РИФ-101”; ЦМБ – центральний мікропроцесорний блок; МБК – мікропроцесорний блок керування нагрівом та охолодженням

Вимірювання температури відбувається наступним чином. Напряга з гарячого спаю термопари подається на прецизійний операційний підсилювач, наприклад, ТС7652 для підсилення напруг з термопари (0...50 мВ) до значень (0...5 В), які можуть бути виміряні АЦП мікроконтролера. Особливістю цифрових систем є зниження точності вимірювання низьких температур. Наприклад, при кроці вимірювання 10 °С, похибка при температурі 1000 °С складає 1%, а при температурі 100 °С вже 10%. Тому підсилений сигнал подається на керований підсилювач (MCP6S21), який дозволяє розділити діапазон вимірюваних температур на декілька частин (20...100 °С, 100...300 °С, 300...1100 °С).

Для отримання кінцевого результату в одиницях температури програмно здійснюється компенсація холодного спаю термопари (температура холодного спаю вимірюється інтегральним напівпровідниковим датчиком температури, наприклад, MCP9800). Компенсація нелінійності сигналу термопари здійснюється за допомогою таблиці залежності напруги від температури для термопари типу ТХА-1Е занесеної до бази даних, збереженої в енергонезалежній пам'яті мікроконтролера.

Схема керування електронно-променевою гарматою. Схема керування електронно-променевою гарматою складається з блоків керування струмом розігріву катода та прискорюючою напругою. Основним виконавчим елементом системи керування є 16-ти бітний мікроконтролер, наприклад, dsPIC30F4011.

Регулювання прискорюючою напругою відбувається за допомогою тиристорного регулятора потужності, який керується мікропроцесорною системою (рис. 5.38).

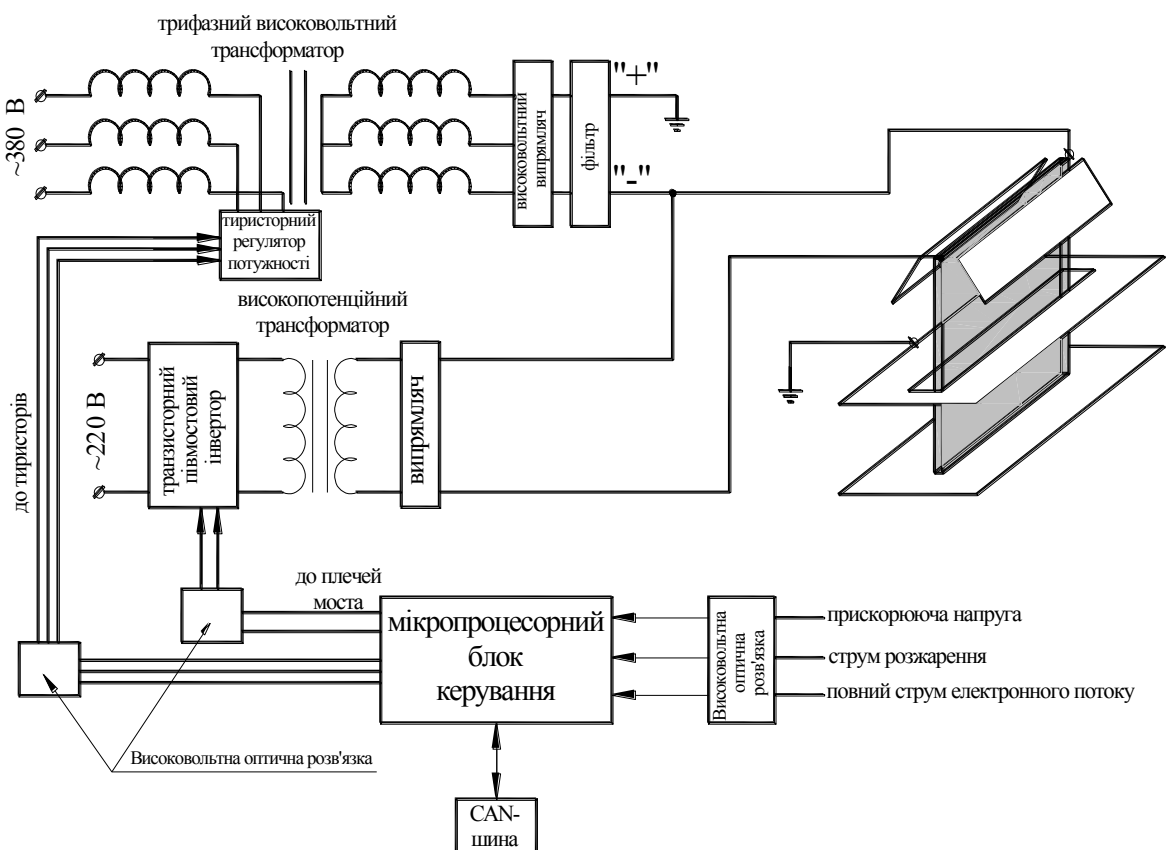


Рисунок 5.38 – Електрична схема регулювання струмом розігріву ЕПГ Пірса

Тиристорний регулятор здійснює регулювання напруги на первинних обмотках трифазного високовольтного трансформатора. Мікроконтролер керує тиристорним регулятором, що дозволяє змінювати напругу на первинних обмотках високовольтного трансформатора в межах від 0 до 380 В, при цьому напруга на вторинних обмотках змінюється від 0 до 7 кВ, а після випрямлення прискорююча напруга становить 0...12 кВ і регулюється з кроком 50 В. Зворотній зв'язок здійснюється за допомогою ділителя напруги, вихідна напруга якого складає 5 В при вхідній 12 кВ. Сигнал, що поступає з подільника вимірюється АЦП мікроконтролера.

Регулювання струмом розігріву відбувається за допомогою транзисторного перетворювача з високочастотною імпульсною модуляцією, який складається з півмостового інвертора, високопотенціального трансформатора і випрямляча (рис. 5.38). Півмостовий інвертор керується спеціальним модулем мікроконтролера, що автоматично формує необхідні часові затримки між вмиканнями транзисторів верхнього та нижнього плеч інвертора. На вході трансформатора отримуємо необхідну напругу в діапазоні 0...220 В, що дозволяє змінювати напругу на виході і відповідно струм розігріву у діапазоні 0...50 А. Зворотній зв'язок здійснюється за допомогою датчика струму, який перетворює струм у напругу. Також мікроконтролером контролюється повний струм електронного потоку.

Зв'язок схеми керування електронно-променевою гарматою з центральним мікропроцесорним блоком здійснюється по CAN-шині.

Контрольні питання та завдання

1. На які серії поділяється оптичне скло ?
2. Які нормативні вимоги висуваються до якості оптичних виробів ?
3. За якими критеріями проводиться оцінка якості оптичних деталей після їх фінішної поверхневої обробки ?
4. Дати визначення відхилення від площинності оптичної деталі.

5. Визначити основні види порушень форми оптичних виробів.
6. Що називається залишковими мікронерівностями на поверхні оптичних виробів ?
7. Дати визначення базової довжини поверхні.
8. Пояснити схему проведення контролю товщини оптичного виробу.
9. Визначити нормативні значення основних критеріїв якості фінішної обробки виробів.
10. Які критерії якості висуваються до виробів із оптичних керамік ?
11. Якими фізичними процесами супроводжується електронно-променева обробка оптичних матеріалів ?
12. Яким вимогам має задовольняти електротехнічне обладнання для фінішної електронно-променевої обробки пластин з оптичного скла ?
13. Для чого необхідно проводити попереднє нагрівання виробів при їх електронно-променевій обробці ?
14. Чим характеризується електронно-оптична система Пірса ?
15. Яких вимог треба дотримуватися при розробці механізму переміщення виробу в електронно-променевій установці ?
16. Перелічити основні засоби контролю параметрів якості оптичних виробів.
17. Пояснити схему вимірювання температури в зоні впливу електронного потоку.
18. Яким чином потужність джерела $P(t)$ буде пов'язана з функцією теплового потоку в центрі джерела $F_0(t)$?
19. Перерахувати відомі методи зондування електронного потоку, їхні переваги та недоліки.
20. Пояснити схему та алгоритм керування електронно-променевою гарматою.

Розділ 6 МЕТОДИ РОЗРАХУНКІВ ТЕПЛОВОЇ ДІЇ СТРІЧКОВИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПОТОКІВ НА ПОВЕРХНІ ВИРОБІВ З ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

При дослідженні технологічних режимів поверхневої обробки оптичних матеріалів (оптичних стекол К8, К108, К208 тощо, оптичних керамік КО-2, КО-4, КО-12, та інших) стрічковим електронним потоком (СЕП) [29, 59, 114] було встановлено, що основними теплофізичними процесами, що протікають в оброблюваних матеріалах, і які визначають якість їх електронної обробки, є: процеси нагрівання, поверхневого термозміцнення і оплавлення.

Для підвищення ефективності електронної обробки оптичних матеріалів необхідно вміти прогнозувати (на базі математичних моделей і програмного забезпечення) допустимі діапазони зміни керованих параметрів СЕП (струму електронного потоку $I_{\text{п}}$ (мА), прискорюючої напруги $U_{\text{пр}}$ (кВ), відстані до оброблюваної поверхні l (мм), швидкості переміщення потоку V (м/с) і часу його дії на матеріал t (с), яке можна програмно регулювати безпосередньо в самій електронній установці, що не приводять до погіршення таких важливих характеристик теплофізичних процесів як температура в зоні обробки, величина залишкових термопружних напружень в поверхневих шарах, швидкість оплавлення і товщина оплавлених шарів, що характеризують якість оброблених оптичних поверхонь.

В даному розділі використовуються методи математичного моделювання і чисельного експерименту для дослідження впливу параметрів СЕП на вказані характеристики основних теплофізичних процесів, що протікають в різних оптичних елементах (тонкоплівковий елемент, тонка пластина великих розмірів, брусок і прямокутний елемент різної товщини), що використовуються в мікрооптиці, оптоелектроніці, інтегральній і волоконній оптиці, виробі ІЧ-техніки [16, 37, 56, 70, 97, 100, 114, 115], при обробці їх рухомим СЕП. При цьому розглянемо фізичні основи побудови

математичних моделей і загальні принципи моделювання процесів дії концентрованих потоків енергії (КПЕ), до яких належить і СЕП, на матеріали.

6.1 Загальні принципи моделювання процесів дії концентрованих потоків енергії на матеріали

На практиці більшість розрахункових методик [99, 124, 125, 126], в яких використовуються концентровані потоки енергії (КПЕ) (сфокусовані потоки електронів, йонів, фотонів тощо) оснований на поглинанні твердим тілом енергії первинних частинок. Тому для теоретичних процесів обробки матеріалів вказаними потоками частинок необхідно, перш за все, вирішувати задачу про просторовий і енергетичний розподіл частинок, що потрапили в зразок.

У загальному вигляді це завдання до теперішнього часу не вирішене з причини великої складності фізичної картини процесів взаємодії частинок з речовиною. Так, наприклад, у разі взаємодії прискорених електронів з речовиною основними процесами є наступні взаємозв'язані і взаємообумовлені елементарні процеси: йонізація і збудження газів і пари; гальмування, розсіяння і поглинання електронів; пружне і непружне розсіяння електронів (збудження плазмових коливань, йонізація внутрішніх енергетичних рівнів, гальмування на електронах провідності); фазові перетворення; відпал і рекристалізація; локальне плавлення; випаровування (сублімація); термічна десорбція; розкладання хімічних сполук та інше [42, 43, 71, 91, 102, 105].

Всі існуючі теорії [28, 105] базуються на досить спрощених припущеннях і тому вимагають спеціальної експериментальної перевірки отриманих з їх допомогою результатів. До того ж область застосовності цих теорій, як правило, обмежена порівняно невеликим переліком речовин

(в основному, це метали) і певним діапазоном енергій частинок, що взаємодіють з речовиною.

Проте, як показано в більшості експериментальних робіт [41-43, 71, 105, 126], основною результуючою дією на матеріали даних КПЕ є теплофізичні процеси в окремих точках об'єму і поверхні оброблюваних тіл, яке, зрештою, забезпечує поліровку і поверхнєве зміцнення виробів, їх відпал, зварку і так далі. При цьому характер нагрівання, що визначається швидкостями зміни температури, температурними градієнтами, часом досягнення певної температури в заданих точках тіла і іншими параметрами процесу, виявляється різним залежно від властивостей речовини, умов обробки і виду енергетичної дії. Тому прогнозування основних характеристик теплофізичних процесів, що розвиваються у виробках при дії КПЕ, дозволяє визначити найбільш ефективні технологічні процеси, сформулювати основні вимоги до енергетичних характеристик КПЕ, визначити оптимальні режими дії.

Згідно проведеним дослідженням [16, 49, 105] при дії КПЕ на поверхню тіл, велика частина потоку енергії поглинається в тонкому поверхнєвому шарі речовини, викликаючи його нагрівання, подальше плавлення і випаровування залежно від умов обробки. Таким чином, на поверхні тіла або усередині нього, починаючи з деякого моменту часу діє джерело теплоти, певним чином розподілене в окремих точках тіла і в часі.

У роботі [105] в результаті розгляду процесу релаксації було з'ясовано, починаючи з якого часу і за яких умов можна використовувати поняття “Джерело теплоти” для чисельного прогнозування зміни температури тіла під дією КПЕ. Встановлено, що вирівнювання температури електронного газу відбувається за час $10^{-13} \dots 10^{-14}$ с, тобто набагато менше часу передачі енергії від електронів до йонів. Процес передачі енергії від електронів до йонів, що приводить до вирівнювання температури електронного газу і решіток, відбувається за час порядку 10^{-11} с, так що поняття джерела теплоти для багатьох матеріалів (зокрема для металів і діелектриків) справедливо,

починаючи з часів, більше $10^{-9} \dots 10^{-10}$ с. Так, наприклад, якщо імпульс КПЕ трикутної форми, то максимальна різниця температур електронного газу і решіток може бути розрахована по наступній формулі [105]:

$$(T_e - T_i)_{max} = \frac{2q}{\sqrt{\bar{\epsilon}(2\pi a^2 t)}}, \quad (6.1)$$

де T_e - температура електронного газу, К; T_i - температура решітки, К; q - щільність потоку енергії, Вт/м²; $\bar{\epsilon}$ - коефіцієнт теплообміну між електронами і решіткою, (Вт·м³)/К; a^2 - коефіцієнт теплопровідності електронного газу, м²/с; t - тривалість дії імпульсу (час обробки виробу), с.

Оціночні розрахунки показують, що для $\bar{\epsilon}=6 \cdot 10^3$ (Вт·м³)/К та $a^2=10^{-4}$ м²/с в залежності від різних значень q виходять результати: для $q=10^{10}$ Вт/м² маємо $(T_e - T_i)_{max} \approx 1$ К, а для $q=10^{13}$ Вт/м² – $(T_e - T_i)_{max} \approx 2 \cdot 10^3$ К.

Звідси витікає, що якщо щільність потоку енергії велика, а час дії невеликий, то різниця температур між електронами і решіткою виявляється дуже великою, щоб нею можна було нехтувати.

Проте в процесах обробки матеріалів КПЕ тривалість дії, як правило, помітно перевершує 10^{-8} с (більш, ніж в $10^3 \dots 10^4$ разів), а щільність потоку енергії менше 10^{13} Вт/м², отже, введення поняття “Джерела теплоти” є в більшості випадків цілком коректним.

Тому в роботах, що є до теперішнього часу, по математичному моделюванню процесів обробки КПЕ різних матеріалів, у тому числі і оптичних матеріалів, задачі про нагрівання матеріалів КПЕ з використанням закономірностей звичайної теплопровідності (лінійною або нелінійною) розглядаються в припущенні про тривалість імпульсів дії, що перевищує 10^{-9} с, і щільність потоку енергії, що не перевершує 10^{13} Вт/м².

6.2 Математичне моделювання процесу нагрівання елементів із оптичних матеріалів різної геометричної форми та розмірів

На практиці при обробці оптичних матеріалів рухомих СЕП використовується, в основному, його одноцикловий рух, здійснюваний за допомогою спеціального автоматично керованого механічного пристосування, за винятком окремих випадків (наприклад, при поверхневому термозміцненні оптичної кераміки), коли застосовується багатоцикловий (скануючий) рух СЕП уздовж оброблюваної поверхні (рис. 6.1).

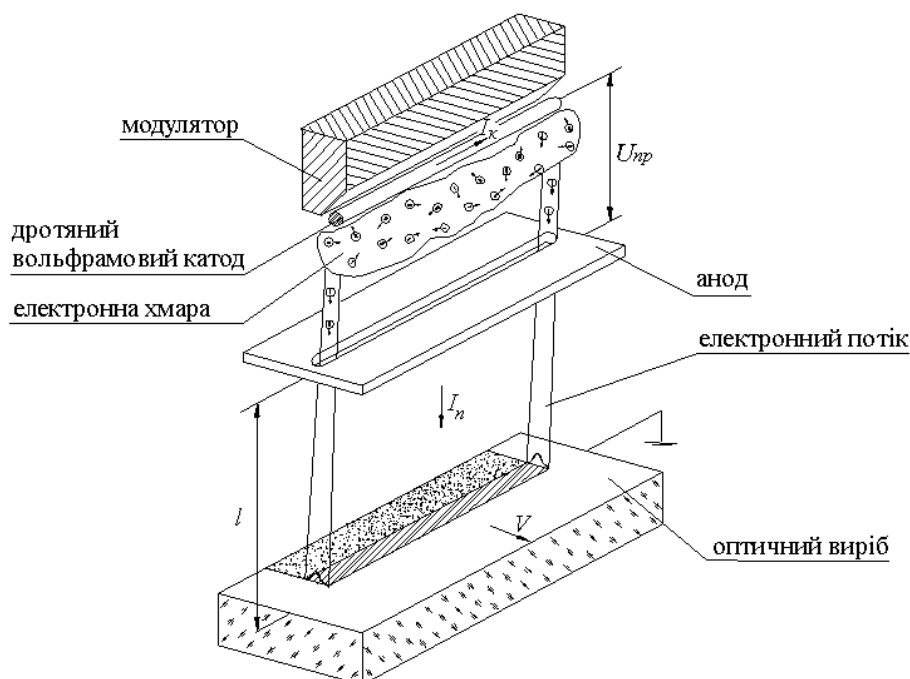


Рисунок 6.1 - Принципова схема електронної обробки виробів: напруга $U_k = 15$ В і струм напруження $I_k = 20$ А (характеристики катода); струм електронного потоку $I_n = 50 \dots 300$ мА, прискорюючу напругу $U_{пр} = 4.8$ кВ, відстань до оброблюваної поверхні $l = 60 \dots 80$ мм; швидкість переміщення оптичного виробу $V = 5 \cdot 10^{-3} \dots 5 \cdot 10^{-2}$ м/с (керовані параметри СЕП)

В результаті проведених досліджень по зондуванню СЕП [36] було встановлено, що СЕП має нормальний (гаусовський) розподіл щільності потоку енергії (або щільність теплового потоку) q в межах товщини електронного потоку (рис. 6.2):

$$q = \frac{P_0(I_1, U_{1\delta})}{B} \sqrt{\frac{k_0(I_1, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_1, l)x^2}}{\text{erf}[b(I_1, l)\sqrt{k_0(I_1, l)}]}, \quad (6.2)$$

де потужність СЕП в центрі дії визначається як:

$$P_0(I_{\text{п}}, U_{\text{пр}}) = I_{\text{п}} \cdot U_{\text{пр}}; \quad (6.3)$$

а коефіцієнт зосередженості, $[M^{-2}]$:

$$k_0(I_{\text{п}}, l) = 9,367 \cdot 10^7 - 7,859 \cdot 10^5 \cdot l - (5,1 \cdot 10^4 - 1,3 \cdot 10^2 \cdot l) \cdot I_{\text{п}}; \quad (6.4)$$

$$2b(I_{\text{п}}, l) = \frac{3,46}{\sqrt{k_0(I_{\text{п}}, l)}}. \quad (6.5)$$

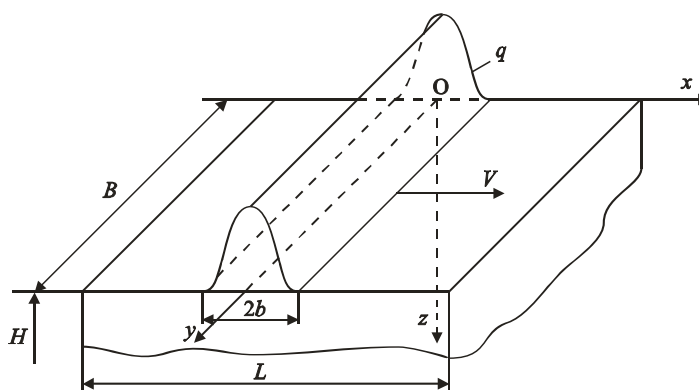


Рисунок 6.2 - Загальна схема процесу нагрівання оптичного елемента рухомих СЕП: $2b$ - товщина рухомого електронного потоку, м; B , H , L - ширина, товщина і довжина елемента, м

При побудові математичної моделі процесу нагрівання оптичних матеріалів СЕП, враховувалися температурні залежності їх теплофізичних параметрів ($C_v(T)$ та $\lambda(T)$). Окрім цього, геометричний вигляд моделі по координатах (одновимірні, двовимірні і тривимірні) визначається співвідношенням між глибиною дифузії тепла (глибиною проникнення теплової хвилі) [128]:

$$\delta = 2\sqrt{a_0^2 \tau}, \quad (6.6)$$

($a_0^2 = \frac{\lambda_0}{C_{v0}}$ – коефіцієнт температуропровідності матеріалу, m^2/s ; τ – середній

час дії СЕП на оптичний матеріал, с), товщиною електронного потоку $2b$, товщиною H і шириною B оброблюваного оптичного елемента (див. рис. 6.2).

Так, наприклад, якщо $\delta < 2b$ та $\delta > H$, B , то з цього виходить, що температурне поле в елементі є одновимірним (по координаті x); якщо $\delta < 2b$, H та $\delta > B$ – температурне поле є двовимірним (по координатах x та z);

та, нарешті, якщо $\delta < 2b, H, B$, то температурне поле є тривимірним (по координатах x, y, z). Далі, якщо, наприклад, $\delta < H$, то теплообмін на нижній стороні елемента не впливає на температурне поле в елементі, тобто елемент уздовж осі Oz можна розглядати як напівнескінченне середовище, а якщо $\delta \sim H$, то вказаний теплообмін вже робить вплив на температурне поле і його необхідно враховувати і так далі

Оцінка глибини дифузії тепла δ для оптичних матеріалів [74, 97, 114, 118, 120] (при наступних значеннях $a_0^2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \dots 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\tau = \frac{L}{V}$; $L = 2 \cdot 10^{-2} \dots 10^{-1} \text{ м}$, $V = 0,005 \dots 0,05 \text{ м/с}$) показує, що її величина лежить в межах $\delta \cong 0,3 \cdot 10^{-4} \dots 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Таким чином, для використовуваних в точному приладобудуванні елементів з оптичних матеріалів ($H = 0,002 \dots 0,02 \text{ м}$; $B = 0,003 \dots 0,09 \text{ м}$; $L = 0,02 \dots 0,1 \text{ м}$) та товщини використовуваних СЕП ($2b = 0,3 \cdot 10^{-3} \dots 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$) при побудові математичної моделі процесу нагрівання оптичних матеріалів необхідно використовувати все з вказаних вище геометричних видів моделей.

Далі оцінимо внесок радіаційних q_r тепловтрат (електронна обробка оптичних матеріалів відбувається у вакуумі, використовується промислова вакуумна установка УВН-74, [114] і тому конвекційними тепловтратами можна відразу нехтувати) в загальний тепловий баланс процесу нагрівання оптичного матеріалу рухомим СЕП.

Оцінку значень q_r проведемо за відомою формулою [11, 65, 80]:

$$q_r = \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} (T_s^4 - T_n^4), \quad (6.7)$$

де $0 < \bar{\varepsilon} < 1$ – випромінювальна здатність поверхні оптичного матеріалу (коефіцієнт чорноти випромінюваної поверхні); $\bar{\sigma} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ – постійна Стефана - Больцмана; T_s, T_c – температура випромінюваної поверхні і навколишнього середовища, відповідно, К. Оцінимо q_r по максимуму (покладемо $\bar{\varepsilon} = 1$, $T_c = T_0 = 300 \text{ К}$ (початкова температура елемента, який

попередньо не нагрівався), $T_s = 1400$ К (температура, рівня максимальних температур в зоні дії СЕП при нагріванні оптичних матеріалів [114]):

$$(q_r)_{max} = \bar{\sigma}(T_i^4 - T_n^4) \cong 2,18 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2, \quad (6.8)$$

Зіставимо тепер величину $(q_r)_{max}$ з рівнем теплових потоків, що створюються СЕП при обробці оптичних елементів (за результатами зондування СЕП, див. (6.2): $q = 5 \cdot 10^6 \dots 10^8$ Вт/м², і отримуємо, що

$$\frac{(q_r)_{max}}{(F_n)_{min}} = \frac{2,18 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^6} \cong 4,36 \cdot 10^{-2} \text{ (порядку 4 \%)}, \quad (6.9)$$

тобто радіаційними тепловтратами (також як і конвекційними тепловтратами) можна нехтувати в першому наближенні загалом тепловому балансі оптичного елемента, що нагрівається, при побудові вказаних математичних моделей.

Нижче приводиться розроблений при вказаних вище допущеннях відомими методами теорії теплопровідності з урахуванням невеликих швидкостей руху СЕП ($V \ll 10^3$ м/с), що дозволяє використовувати для розрахунку температурних полів простіше рівняння теплопровідності параболічного типу, замість набагато складнішого рівняння теплопровідності гіперболічного типу комплекс нелінійних математичних моделей процесу нагрівання оптичних матеріалів рухомим СЕП, що враховує різну геометричну форму і розміри, а також температурну залежність теплофізичних властивостей (коефіцієнт теплопровідності, об'ємна теплоємність) оброблюваних матеріалів, і що дозволяє розраховувати вплив вказаних вище параметрів СЕП на температурні поля в оптичних матеріалах.

6.2.1 Математична модель процесу нагрівання тонкоплівкового елемента

Для даного тонкоплівкового елемента виконуються наступні умови: $\delta > B, H$ та $\delta < 2b$, тобто $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ (одновимірне температурне поле $T(x, t)$).

В цьому випадку щільність потоку енергії q стає об'ємним джерелом тепла $q_v(x)$ (Вт/м³), який рухається у напрямі осі Ox зі швидкістю V (рис. 6.3):

$$q_v(x) = \begin{cases} \frac{P_0(I_{\bar{t}}, U_{\bar{t}\delta})}{B H} \sqrt{\frac{k_0(I_{\bar{t}}, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_{\bar{t}}, l) x^2}}{\operatorname{erf}\left[b(I_{\bar{t}}, l) \sqrt{k_0(I_{\bar{t}}, l)}\right]}, & |x| < b. \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (6.10)$$

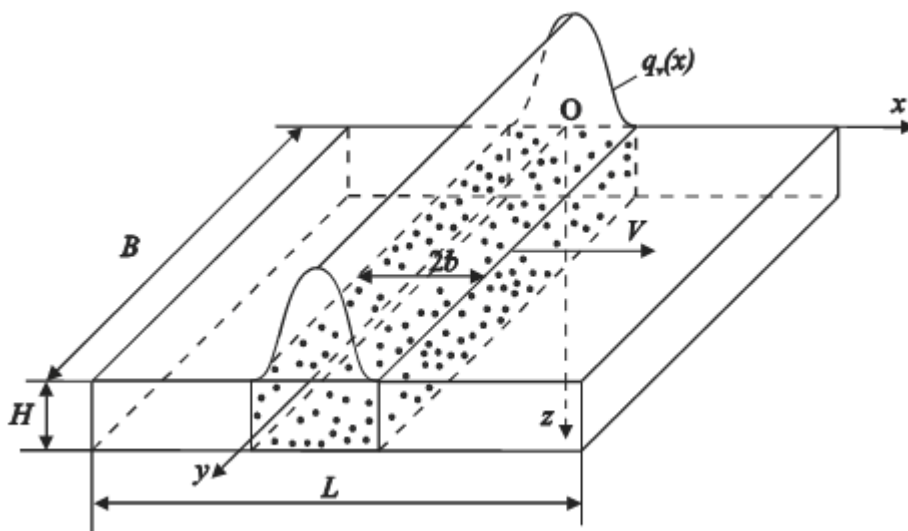


Рисунок 6.3 - Схема процесу нагрівання тонкоплівкового елемента рухомим СЕП

Рівняння математичної моделі процесу нагрівання даного елемента (у рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом тепла) мають наступний вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x} + q_v(x), \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (6.11)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.12)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad q_v(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (6.13)$$

Враховуючи $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ і вводячи нові змінні,

$$\theta(x, t) = T^{v+1} - T_0^{v+1} \quad \hat{O}_v(x) = \frac{v+1}{C_{V0}} q_v(x), \quad (6.14)$$

отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = a_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} + \hat{O}_v(x), \quad (6.15)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (6.16)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \hat{O}_v(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (6.17)$$

Далі зведемо систему рівнянь (6.15) - (6.17) до фундаментальної форми (форми Фур'є) шляхом підстановки

$$\theta(x,t) = \bar{\theta}(x,t) e^{\mu x + \beta t}, \quad (6.18)$$

$$\text{де } \mu = -\frac{V}{2a_0^2}, \quad \beta = -\frac{V^2}{4a_0^2}.$$

Підставляючи (6.18) в (6.15)-(6.17), отримаємо наступне фундаментальне рівняння теплопровідності з початковим і граничними умовами:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \bar{O}_v(x,t), \quad (6.19)$$

$$\bar{\theta}|_{t=0} = 0, \quad (6.20)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \bar{O}_v(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (6.21)$$

$$\text{де} \quad \bar{O}_v(x,t) = \hat{O}_v(x) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.22)$$

Для розв'язання системи рівнянь (6.19) - (6.21) використано розглянутий вище для одновимірних завдань теплопровідності метод інтегральних перетворень Фур'є (див. розділ 4).

Згідно цьому методу, для знаходження функції $\bar{\theta}(x,t)$ на *першому етапі* використовуємо пряме перетворення Фур'є по координаті x :

$$\bar{\theta}(x,t) \rightarrow F(\sigma_1,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\theta}(u,t) e^{-i\sigma_1 u} du, \quad (6.23)$$

де $\bar{\theta}(x,t)$ – оригінал (шукана функція); $F(\sigma_1,t)$ – зображення для функції $\bar{\theta}$ (i – уявна одиниця; $-\infty < \sigma_1 < +\infty$ – деякий речовий параметр).

Знайдемо $F(\sigma_1,t)$, перетворивши рівняння (6.19) - (6.21) за допомогою (6.23):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} e^{-i\sigma_1 u} du = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\theta} e^{-i\sigma_1 u} du \right) = \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{dF}{dt}, \quad (6.24)$$

$$a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \rightarrow a_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial u^2} e^{-i\sigma_1 u} du \right). \quad (6.25)$$

Застосовуючи до інтеграла, що стоїть в правій частині (6.25), двічі метод інтеграції по частинах і враховуючи граничні умови (6.23), отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial u^2} e^{-i\sigma_1 u} du = -\sigma_1^2 F. \quad (6.26)$$

Тоді

$$a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \rightarrow -a_0^2 \sigma_1^2 F. \quad (6.27)$$

Окрім цього, маємо

$$\bar{O}_v(x, t) \rightarrow \bar{O}_v(\sigma_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{O}_v(u, t) e^{-i\sigma_1 u} du. \quad (6.28)$$

Використовуючи (6.24) - (6.28), для знаходження зображення $F(\sigma_1, t)$ отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку (замість диференціального рівняння в часткових похідних 2-го порядку для функції $\bar{\theta}(x, t)$):

$$\frac{dF}{dt} = -a_0^2 \sigma_1^2 F + \bar{\theta}_v(\sigma_1, t) \quad (6.29)$$

з початковою умовою

$$F|_{t=0} = 0. \quad (6.30)$$

Розв'язок сформульованої задачі Коші (6.29) - (6.30) знаходимо стандартним методом (наприклад, методами Бернуллі, Ейлера тощо) [18, 64]:

$$F(\sigma_1, t) = \int_0^t \bar{O}_v(\sigma_1, \tau) e^{-a_0^2 \sigma_1^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (6.31)$$

На другому етапі розв'язання задачі для знаходження оригіналу $\bar{\theta}(x, t)$ скористаємося зворотним перетворенням Фур'є для функції $F(\sigma_1, t)$:

$$F(\sigma_1, t) \rightarrow \bar{\theta}(\sigma_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma_1, t) e^{i\sigma_1 x} d\sigma_1. \quad (6.32)$$

Підставляючи (6.28) та (6.31) в (6.32), отримуємо:

$$\bar{\theta}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{O}_v(u,\tau) e^{-i\sigma_1 u} du \right) e^{-a_0^2 \sigma_1^2 (t-\tau)} d\tau \right] e^{i\sigma_1 x} d\sigma_1 \right\}. \quad (6.33)$$

Згрупувавши інтеграли в і розбивши їх на внутрішній і зовнішній, отримуємо:

$$\bar{\theta}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \bar{O}_v(u,\tau) du d\tau \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_0^2 \sigma_1^2 (t-\tau)} e^{i\sigma_1 (x-u)} d\sigma_1}_{I} \right], \quad (6.34)$$

Для обчислення внутрішнього інтеграла I скористаємося відомою формулою Ейлера [18, 64]:

$$e^{i\sigma_1(x-u)} = \cos \sigma_1(x-u) + i \sin \sigma_1(x-u). \quad (6.35)$$

Отримуємо:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_0^2 \sigma_1^2 \tau} \cos \sigma_1(x-u) d\sigma_1 + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_0^2 \sigma_1^2 \tau} \sin \sigma_1(x-u) d\sigma_1}_{I'}. \quad (6.36)$$

Враховуючи, що $I' = 0$ (інтеграл від непарної функції з симетричними межами), маємо:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_0^2 \sigma_1^2 \tau} \cos \sigma_1(x-u) d\sigma_1. \quad (6.37)$$

Вираз для інтеграла типу (6.37) можна знайти в довіднику [116]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{a_0 \sqrt{t}} e^{-\frac{(x-u)^2}{4a_0^2 t}}. \quad (6.38)$$

Підставляючи (6.38) в (6.34), знаходимо наступний вираз для функції:

$$\bar{\theta}(x,t) = \frac{1}{2a_0 \sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{O}_v(u,\tau) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a_0^2 (t-\tau)}} du \right]. \quad (6.39)$$

Остаточно для розв'язання початкової задачі отримуємо:

$$T(x,t) = \left[T_0^{v+1} + \frac{v+1}{2\sqrt{\pi} C_{v_0} \lambda_0} e^{-\frac{v x}{2a_0^2} - \frac{v^2 t}{4a_0^2}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{v^2 \tau}{4a_0^2}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} q_v(u) e^{-\frac{v u}{2a_0^2} - \frac{(x-u)^2}{4a_0^2 (t-\tau)}} du \right]^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.40)$$

Підставляючи в (6.40) отримані дані по зондуванню СЕП (див. (6.10) - (6.13), отримаємо наступний вираз для $T(x,t)$, що дозволяє розраховувати вплив параметрів СЕП на температурне поле в тонкоплівковому елементі:

$$T(x,t) = \left\{ T_0^{v+1} + \frac{(v+1)P_0(I_i, U_{i\delta}) \sqrt{k_0(I_i, l)} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}}{2\sqrt{\pi} C_{V0} H B \operatorname{erf}\left(b(I_i, l) \sqrt{k_0(I_i, l)}\right)} \times \right. \\ \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 k_0(I_i, l)x^2 - V[2x+V(t-\tau)]}{4a_0^2 [1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)]}}}{\sqrt{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2a_0 \sqrt{t-\tau}} \left(b(I_i, l) \sqrt{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{x+V(t-\tau)}{\sqrt{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}} \right) \right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2a_0 \sqrt{t-\tau}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(b(I_i, l) \sqrt{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} - \frac{x+V(t-\tau)}{\sqrt{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}} \right) \right) \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.41)$$

6.2.2 Математична модель процесу нагрівання тонкої пластини великих розмірів

Для даної тонкої пластини великих розмірів виконуються наступні умови (рис. 6.4): $\delta < 2b$, $2c$ та $\delta > H$, тобто $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ (двомірне температурне поле $T(x, y, t)$).

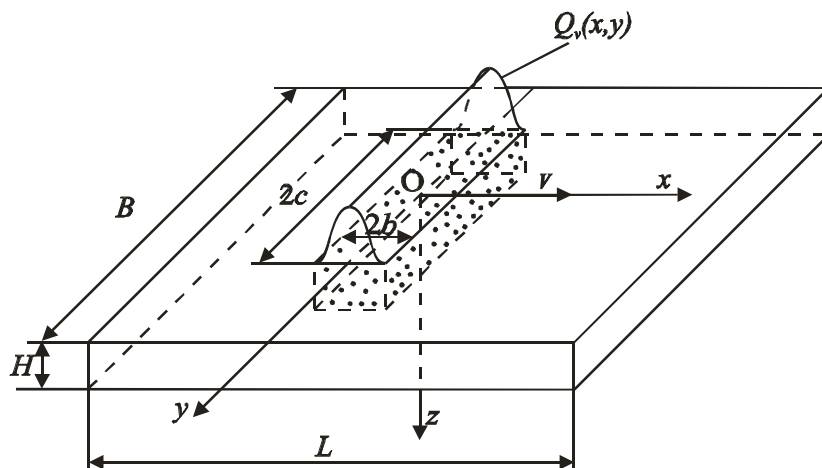


Рисунок 6.4 - Схема процесу нагрівання тонкої пластини великих розмірів рухомих СЕП

В цьому випадку щільність потоку енергії q стає наступним об'ємним джерелом тепла:

$$Q_v(x, y) = \begin{cases} \frac{P_0(I_{\bar{i}}, U_{i\delta})}{2CH} \sqrt{\frac{k_0(I_{\bar{i}}, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_{\bar{i}}, l)x^2}}{\operatorname{erf}\left[b(I_{\bar{i}}, l)\sqrt{k_0(I_{\bar{i}}, l)}\right]}, \\ |x| < b, \quad |y| < c, \\ 0, \quad |x| > b, \quad |y| > c, \end{cases} \quad (6.42)$$

де параметри $P_0(I_{\bar{i}}, U_{i\delta})$, $k_0(I_{\bar{i}}, l)$ та $b(I_{\bar{i}}, l)$ визначаються за формулами (6.5) - (6.7). При цьому джерело тепла рухається уздовж осі Ox зі швидкістю V .

Рівняння математичної моделі процесу нагрівання пластини (у рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом тепла) мають вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x} + Q_v(x, y),$$

$$t > 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad (6.43)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.44)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow 0, \quad Q_v(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x, y \rightarrow \pm\infty. \quad (6.45)$$

З урахуванням залежностей $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ отримуємо:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial x} + \bar{Q}_v(x, y), \quad (6.46)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (6.47)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \bar{Q}_v(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x, y \rightarrow \pm\infty, \quad (6.48)$$

де
$$\theta = T^{v+1} - T_0^{v+1}, \quad \bar{Q}_v(x, y) = \frac{v+1}{C_{V0}} Q_v(x, y). \quad (6.49)$$

Робимо підстановку

$$\theta_v(x, y) = \bar{\theta}(x, y) e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.50)$$

Отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right) + \bar{Q}_v(x, y), \quad (6.51)$$

$$\bar{\theta}|_{t=0} = 0, \quad (6.52)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \bar{Q}_v(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x, y \rightarrow \pm\infty, \quad (6.53)$$

де

$$\bar{Q}_v(x, y) = \bar{Q}_v(x, y) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.54)$$

Вирішуючи систему рівнянь (6.51)-(6.53) розглянутими методами інтегральних перетворень Фур'є (див. розділ 4) (спочатку по x , а потім по y) і враховуючи (6.49), (6.50) і (6.54), отримуємо розв'язок початкової задачі:

$$T(x, y, t) = \left[T_0^{v+1} + \frac{v+1}{4\pi\lambda_0} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2}}}{t-\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_v(\xi, \eta) e^{-\frac{V\xi}{2a_0^2} - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a_0^2(t-\tau)}} d\xi d\eta \right]^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.55)$$

Підставляючи (6.42) в (6.55), отримуємо остаточний вираз для $T(x, y, t)$, що дозволяє розраховувати вплив параметрів СЕП на температурне поле в тонкій пластині великих розмірів:

$$T(x, y, t) = \left\{ T_0^{v+1} + \frac{(v+1) P_0(I_i, U_{i\delta}) \sqrt{k_0(I_i, l)} a_0^2}{8\sqrt{\pi} c H \lambda_0 \operatorname{erf} \left[b(I_i, l) \sqrt{k_0(I_i, l)} \right]} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 k_0(I_i, l) x^2 - V[2x + V(t-\tau)]}{4a_0^2 [1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)]}}}{\sqrt{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{c+y}{2a_0 \sqrt{(t-\tau)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{c-y}{2a_0 \sqrt{(t-\tau)}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) + \frac{x + V(t-\tau)}{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right] + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) - \frac{x + V(t-\tau)}{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right] d\tau \left. \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.56)$$

6.2.3 Математична модель процесу нагрівання прямокутного бруска великої товщини

Для даного прямокутного бруска великої товщини виконуються наступні умови: $\delta < 2b, H$ та $\delta > B$, тобто $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (двомірне температурне поле $T(x, z, t)$); при цьому, брусок уздовж осі Oz розглядається як напівнескінченний. В цьому випадку щільність потоку енергії q стає поверхневим джерелом тепла q_n (Вт/м²), який рухається у напрямі осі Ox зі швидкістю V (рис. 6.5):

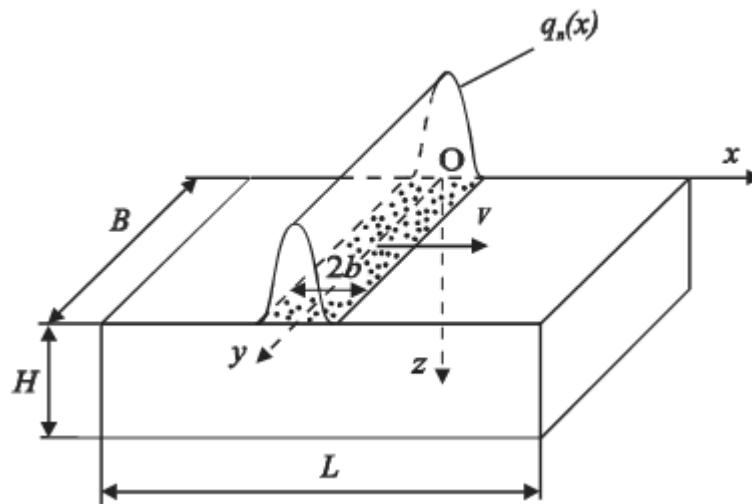


Рисунок 6.5 - Схема процесу нагрівання прямокутного бруска рухомих СЕП

$$q_i(x) = \begin{cases} \frac{P_0(I_i, U_{i\delta})}{\hat{A}} \sqrt{\frac{k_0(I_i, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_i, l)x^2}}{\operatorname{erf}\left[b(I_i, l)\sqrt{k_0(I_i, l)}\right]}, & |x| < b, \\ 0, & |x| > b. \end{cases} \quad (6.57)$$

Рівняння математичної моделі процесу нагрівання бруска великої товщини (у рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом тепла) мають вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + C_v(T) V \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad (6.58)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.59)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_i(x), \quad (6.60)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty. \quad (6.61)$$

Використовуючи $C_V(T)$ та $\lambda(T)$, отримуємо:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6.62)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (6.63)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_i(x), \quad (6.64)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty, \quad (6.65)$$

де

$$\theta = T^{v+1} - T_0^{v+1}, \quad \bar{q}_i(x) = \frac{v+1}{\lambda_0} q_i(x). \quad (6.66)$$

Для зведення системи рівнянь (6.62)-(6.66) до стандартного (фундаментального) вигляду зробимо заміну змінних:

$$\theta(x, z, t) = \bar{\theta}(x, z, t) e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.67)$$

Отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (6.68)$$

$$\bar{\theta}|_{t=0} = 0, \quad (6.69)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_i(x), \quad (6.70)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty, \quad (6.71)$$

$$\bar{q}_i(x) = \bar{q}_i(x) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.72)$$

Для розв'язання системи рівнянь (6.68) - (6.71) використовуємо методи інтегральних перетворень Фур'є (спочатку по координаті x , а потім по координаті z), а також, враховуючи (6.66), (6.67) і (6.72), отримуємо розв'язок початкової задачі у вигляді:

$$T(x, z, t) = \left[T_0^{v+1} + \frac{v+1}{2\pi\lambda_0} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2}}}{t-\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} q_i(\xi) e^{-\frac{V\xi}{2a_0^2} - \frac{(x-\xi)^2 + z^2}{4a_0^2(t-\tau)}} d\xi \right]^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.73)$$

Підставляючи (6.57) в (6.73), отримуємо наступний вираз для $T(x, z, t)$, що дозволяє розраховувати вплив параметрів СЕП на температурне поле в прямокутному бруску великої товщини:

$$T(x, z, t) = \left\{ T_0^{v+1} + \frac{(v+1)P_0(I_i, V_{i\delta})\sqrt{k_0(I_i, l)}a_0}{2\pi\lambda_0 \text{B erf} \left[b(I_i, l)\sqrt{k_0(I_i, l)} \right]} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\ \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 x^2 k_0(I_i, l) - V[2x+V(t-\tau)]}{4a_0^2 [1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)]} - \frac{z^2}{4a_0^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)(1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau))}} \times \\ \times \left[\text{erf} \left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) + \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right. \\ \left. + \text{erf} \left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) - \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right] d\tau \left. \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.74)$$

6.2.4 Математична модель процесу нагрівання прямокутного бруска малої товщини

Розглядається брусок, для якого виконуються наступні умови: $\delta < 2b$, $\delta \sim H$ та $\delta > B$, тобто $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (двомірне температурне поле $T(x, z, t)$); при цьому, тіло уздовж осі Oz розглядається як обмежене, тобто враховується теплообмін на нижній стороні (див. рис. 6.6).

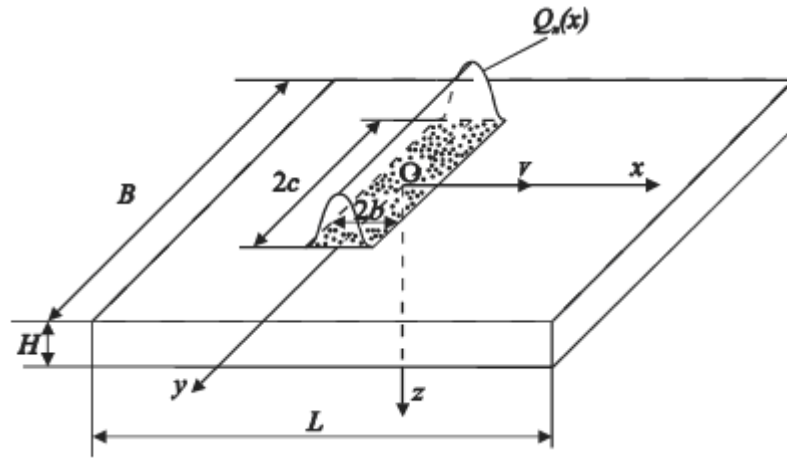


Рисунок 6.6 - Схема процесу нагрівання прямокутного елемента рухомих СЕП

За відсутності конвекційних і радіаційних витрат з поверхонь бруска, теплообмін при $z = H$ співпадає з умовою адіабатності теплового процесу. Тоді щільність потоку енергії $q = q_i(x)$ (див. (6.57)). Рівняння математичної моделі процесу нагрівання бруска малої товщини (у рухомій системі координат, пов'язаній з джерелом тепла) мають вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < z < H, \quad (6.75)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.76)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_i(x), \quad (6.77)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (6.78)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (6.79)$$

З врахуванням $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ маємо:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6.80)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (6.81)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_i(x), \quad (6.82)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (6.83)$$

де $\theta = T^{v+1} - T_0^{v+1}$, $\bar{q}_i(x) = \frac{v+1}{\lambda_0} q_i(x)$. (6.84)

Далі, використовуючи підстановку:

$$\theta(x, z, t) = \bar{\theta}(x, z, t) e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}, \quad (6.85)$$

отримуємо

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (6.86)$$

$$\bar{\theta} \Big|_{t=0} = 0, \quad (6.87)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_i(x), \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (6.89)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (6.90)$$

де $\bar{q}_i(x) = \frac{v+1}{\lambda_0} q_i(x, t) e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}$. (6.91)

Використовуючи метод інтегральних перетворень Фур'є (по координаті x) і метод розділення змінних (по координаті z) з врахуванням (6.84), (6.85) і (6.91), отримуємо:

$$T(x, z, t) = \left\{ T_0^{v+1} + \frac{v+1}{4\pi\lambda_0} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2}}}{t-\tau} d\tau \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n z}{H} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 (t-\tau)} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} q_n(\xi) e^{-\frac{V\xi}{2a_0^2} - \frac{(x-\xi)^2}{4a_0^2 (t-\tau)}} d\xi \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.92)$$

Враховуючи (6.57), отримуємо наступний вираз для $T(x, z, t)$, що дозволяє розраховувати вплив параметрів СЕП на температурне поле в прямокутному бруску малої товщини:

$$\begin{aligned}
 T(x, z, t) = & \left\{ T_0^{v+1} + \frac{(v+1)P_0(I_{\bar{1}}, U_{\bar{1}\delta})\sqrt{k_0(I_{\bar{1}}, l)}a_0}{4\pi\lambda_0 B \operatorname{erf}\left[b(I_{\bar{1}}, l)\sqrt{k_0(I_{\bar{1}}, l)}\right]} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\
 & \times \int_0^t \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^N \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 (t-\tau)} \right] \times \\
 & \times \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_{\bar{1}}, l) + \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau)}\right)\right) \right] + \\
 & \left. + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_{\bar{1}}, l) - \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau)}\right)\right) \right] \times \\
 & \times \left. \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 x^2 k_0(I_{\bar{1}}, l) - V[2x+V(t-\tau)]}{4a_0^2 [1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau)]}}}{\sqrt{(t-\tau)(1+4a_0^2 k_0(I_{\bar{1}}, l)(t-\tau))}} d\tau \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.93)
 \end{aligned}$$

6.2.5 Математична модель процесу нагрівання прямокутного елемента великої товщини

Розглядаються прямокутні елементи великих розмірів: $\delta < 2b, 2c, H$ та $2c < B, 2b < L$, тобто маємо тривимірне температурне поле $T(x, y, z, t)$.

В цьому випадку глибина проникнення теплової хвилі в елемент менше його товщини, тобто елемент можна розглядати як напівобмежений у напрямі осі Oz (рис. 6.6).

При цьому щільність потоку енергії q є поверхневим джерелом тепла $Q_n(x)$, що переміщається уздовж осі Ox зі швидкістю V :

$$Q_i(x) = \begin{cases} \frac{P_0(I_{\bar{1}}, l)}{2c} \sqrt{\frac{k_0(I_{\bar{1}}, l)}{\pi}} \frac{e^{-k_0(I_{\bar{1}}, l)x^2}}{\operatorname{erf}\left[b(I_{\bar{1}}, l)\sqrt{k_0(I_{\bar{1}}, l)}\right]}, & |x| < b, \quad |y| < c, \\ 0, & |x| > b, \quad |y| > c. \end{cases} \quad (6.94)$$

Рівняння математичної моделі процесу нагрівання даного елемента мають вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$-\infty < x, \quad y < +\infty, \quad z > 0, \quad (6.95)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.96)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q_i(x), \quad (6.97)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (6.98)$$

З урахуванням $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ маємо:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6.99)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (6.100)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{Q}_i(x), \quad (6.101)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (6.102)$$

де
$$\theta = T^{v+1} - T_0^{v+1}, \quad \bar{Q}_i(x) = \frac{v+1}{\lambda_0} Q_i(x). \quad (6.103)$$

Робимо підстановку

$$\theta(x, y, z, t) = \bar{\theta}(x, y, z, t) e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.104)$$

Отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (6.105)$$

$$\bar{\theta}|_{t=0} = 0, \quad (6.106)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{\bar{Q}}_i(x), \quad (6.107)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty, \quad (6.108)$$

де

$$\bar{Q}_i(x) = \frac{\nu+1}{\lambda_0} Q_i(x) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}. \quad (6.109)$$

Для розв'язання задачі (6.105)-(6.109) використовуємо методи інтегральних перетворень Фур'є (по координатах x , y і z), а також, враховуючи (6.103) і (6.104), отримуємо розв'язок даної задачі:

$$T(x, y, z, t) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{8\pi^2 a_0 \lambda_0} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(\xi) e^{\frac{V\xi}{2a_0^2} - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}{4a_0^2(t-\tau)}} d\xi d\eta \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.110)$$

З урахуванням (6.94), отримуємо наступний вираз для $T(x, y, z, t)$ для розрахунку впливу параметрів СЕП на температурне поле в прямокутному елементі великої товщини:

$$T(x, y, z, t) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{(\nu+1)P_0(I_i, U_{i\delta})\sqrt{k_0(I_i, l)}a_0}{16\pi c \lambda_0 \operatorname{erf}\left[b(I_i, l)\sqrt{k_0(I_i, l)}\right]} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2} - \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\ \times \int_0^t \frac{e^{-\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 x^2 k_0(I_i, l) - V[2x+V(t-\tau)]}{4a_0^2[1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)]} - \frac{z^2}{4a_0^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)(1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau))}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{c+y}{2a_0\sqrt{t-\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{c-y}{2a_0\sqrt{t-\tau}}\right) \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) + \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2(t-\tau)}} \left(b(I_i, l) - \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right] d\tau \left. \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.111)$$

6.2.6 Математична модель процесу нагрівання прямокутного елемента малої товщини

Розглядаються прямокутні елементи малої товщини: $\delta < 2b, 2c, \delta \sim H$, $2c < B$ та $2b < L$, тобто також маємо тривимірне температурне поле $T(x, y, z, t)$. При цьому глибина проникнення теплової хвилі в елемент порівнянна з його товщиною, тобто необхідно враховувати умови теплообміну на нижній стороні ($z = H$) його поверхні, які співпадають з умовами адіабатичності (див. рис. 6.6). Щільність потоку енергії q у даному випадку також є поверхневим джерелом тепла $Q_i(x)$ (див. (6.94).

Рівняння математичної моделі процесу нагрівання вказаного елемента мають вигляд [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$-\infty < x, \quad y < +\infty, \quad 0 < z < H, \quad (6.112)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (6.113)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q_i(x), \quad (6.114)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (6.115)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (6.116)$$

Враховуючи $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ і заміни змінних (6.103) та (6.104), отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right), \quad (6.117)$$

$$\bar{\theta} \Big|_{t=0} = 0, \quad (6.118)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{Q}_i(x), \quad (6.119)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|_{z=H} = 0, \quad (6.120)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad (6.121)$$

$$\text{де } \bar{\theta}_n(x, y, z, t) = (T^{\gamma+1} - T_0^{\gamma+1}) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}; \quad \bar{Q}_i(x) = \frac{\nu+1}{\lambda_0} Q_i(x) e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}}.$$

Розв'язуючи задачу (6.117) - (6.121) за допомогою інтегральних перетворень Фур'є (по координатах x і y) і методу розділення змінних (по координаті z), а також враховуючи (6.103) і (6.104), отримуємо розв'язок вказаної задачі:

$$T(x, y, z, t) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{8\pi^{\frac{3}{2}} a_0 \lambda_0} e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \int_0^t \frac{e^{\frac{V^2 \tau}{4a_0^2}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^N \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 (t-\tau)} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(\xi) e^{\frac{V\tau}{2a_0^2} - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a_0^2 (t-\tau)}} d\xi d\eta \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.122)$$

Враховуючи (6.94), отримуємо наступний вираз для $T(x, y, z, t)$, що дозволяє розраховувати вплив параметрів СЕП на температурне поле в прямокутному елементі малої товщини:

$$T(x, z, t) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{(\nu+1) P_0(I_i, U_{i\delta}) \sqrt{k_0(I_i, l)} a_0}{16\pi c \lambda_0 \operatorname{erf}\left[b(I_i, l) \sqrt{k_0(I_i, l)}\right]} e^{\frac{Vx}{2a_0^2} + \frac{V^2 t}{4a_0^2}} \times \right. \\ \times \int_0^t \frac{e^{\frac{V^2 \tau}{4a_0^2} - \frac{4a_0^2 x^2 k_0(I_i, l) - V[2x+V(t-\tau)]}{4a_0^2 [1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)]}}}{\sqrt{(t-\tau)(1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau))}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^N \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 (t-\tau)} \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{c+y}{2a_0 \sqrt{t-\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{c-y}{2a_0 \sqrt{t-\tau}}\right) \right] \times \\ \left. \times \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)}{4a_0^2 (t-\tau)}} \left(b(I_i, l) + \frac{x+V(t-\tau)}{1+4a_0^2 k_0(I_i, l)(t-\tau)} \right) \right) \right] \right\}$$

$$+ \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t - \tau)}{4a_0^2(t - \tau)}} \left(b(I_i, l) - \frac{x + V(t - \tau)}{1 + 4a_0^2 k_0(I_i, l)(t - \tau)} \right) \right) d\tau \Bigg\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.123)$$

6.2.7 Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на температурні поля в елементах із оптичного скла та кераміки, вибір граничних режимів нагрівання, зіставлення їх з експериментальними даними

При відпрацюванні технологічних режимів поверхневої обробки оптичних стекол і керамік [59, 114] встановлено, що максимальна температура обробки T_m (температура в центрі рухомого СЕП) не повинна перевищувати для оптичних стекол критичної температури T^* (T^* - температура скла в рідкому стані, коли різко збільшується його текучість; наприклад, для скла К8 - $T^* = 1400$ К), а для оптичної кераміки - T^{**} (T^{**} - температура початку інтенсивної рекристалізації кераміки; наприклад, для кераміки КО-2 - $T^{**} = 1100$ К).

Проведені технологічні експерименти показали, що перевищення вказаних температур при поверхневій обробці даних оптичних матеріалів СЕП приводить до наступних небажаних явищ, погіршуючи якість оброблених поверхонь:

- у разі оптичних стекол починається інтенсивне поверхневе випаровування матеріалу і значна деформація розплаву на їх поверхнях, що приводить до істотних порушень площинної та геометричної форми;
- у разі оптичних керамік відбувається інтенсифікація рекристалізації поверхні і прилеглих до неї шарів, що приводить до різкого збільшення поглинання випромінювання в ІЧ-області спектру, тобто помітно знижується їх коефіцієнт ІЧ-пропускання і погіршуються техніко-експлуатаційні характеристики виробів на їх основі.

Тому при виборі оптимальних режимів обробки оптичних стекол і керамік рухомими СЕП необхідно уміти прогнозувати вплив керованих

параметрів СЕП на максимальну температуру обробки T_m з метою визначення і контролю допустимих діапазонів зміни вказаних параметрів СЕП, що не приводять до перевищення вказаних вище температур T^* (для оптичних стекел) і T^{**} (для оптичних керамік), тобто до контролю виконання наступних умов:

$$1) \text{ для оптичних стекел} - T_m \leq T^* \text{ при } I_{i1}^* \leq I_i \leq I_{i2}^*, U_{i\delta 1}^* \leq U_{i\delta} \leq U_{i\delta 2}^*,$$

$$l_1^* \leq l \leq l_2^*, V_1^* \leq V \leq V_2^*, t_1^* \leq t \leq t_2^*;$$

$$2) \text{ для оптичних керамік} - T_m \leq T^{**} \text{ при } I_{i1}^{**} \leq I_i \leq I_{i2}^{**}, U_{i\delta 1}^{**} \leq U_{i\delta} \leq U_{i\delta 2}^{**},$$

$$l_1^{**} \leq l \leq l_2^{**}, V_1^{**} \leq V \leq V_2^{**}, t_1^{**} \leq t \leq t_2^{**}.$$

Для ефективнішого проведення чисельних експериментів на ПЕОМ, по розробленому комплексу нелінійних математичних моделей були розроблені спеціалізовані пакети прикладних програм по основних чисельних методах розв'язання інженерно-технологічних задач електронної обробки оптичних стекел і керамік (див. Додатки А-Г). З використанням відомих теплофізичних властивостей широко вживаних на практиці оптичного скла К8 і оптичної кераміки КО-2 [21, 65, 80, 111, 122], для оптичних елементів (наприклад, для інтегральної оптики і ІЧ-техніки) у вигляді прямокутних брусків великої товщини, а також із залученням вказаних вище пакетів програм були проведені розрахунки залежностей максимальної температури обробки T_m (температури в зоні дії рухомого СЕП: $T_m = T(0,0,t)$, див.(6.74)) від даних параметрів СЕП, рис. 6.7–6.10 (○, ● - експериментальні дані для кривих 1 і 2, отримані безконтактним методом на базі фоторезистора ФУО-613 (відносна похибка 5...8%).

З результатів розрахунків, представлених на рис. 6.7-6.10, витікає, що для часів обробки $t \geq t^*$ ($t^* = 0,2...0,3$ с – для скла К8; $t^* = 0,4...0,5$ с – для кераміки КО-2) процес нагрівання як оптичного скла, так і оптичної кераміки переходить на квазістаціонарний режим, тобто T_m не змінюється з часом; при цьому величина t^* практично не залежить від параметрів СЕП.

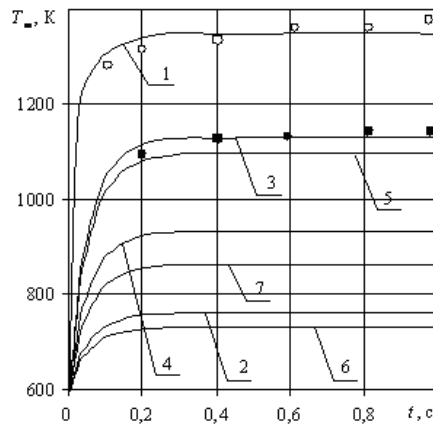
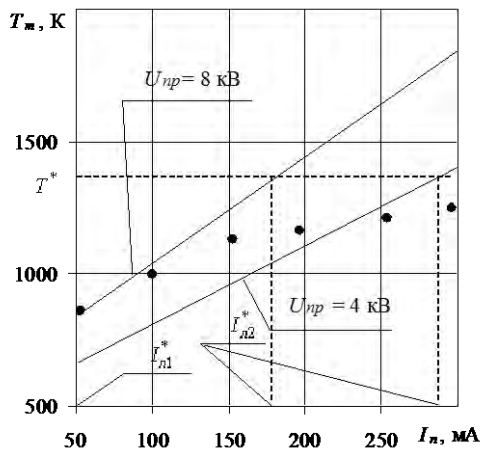
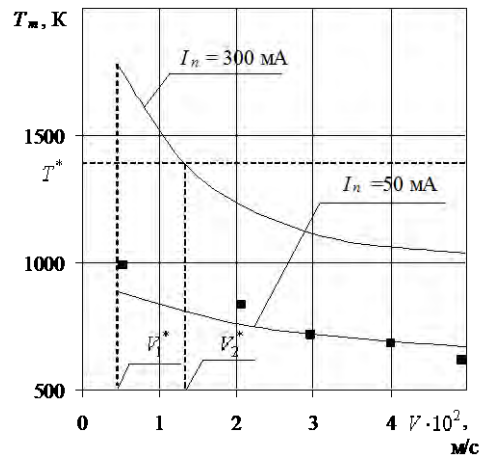


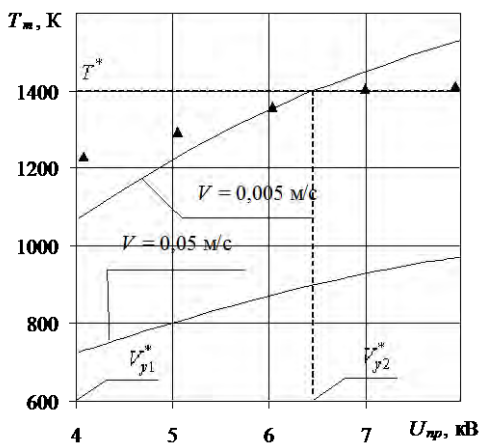
Рисунок 6.7 - Залежність максимальної температури T_m від часу електронної обробки прямокутного бруска з оптичного скла К-8: 1 – $I_n = 300$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 2 – $I_n = 50$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 3 – $I_n = 100$ мА, $U_{np} = 8$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 4 – $I_n = 100$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 5 – $I_n = 100$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,005$ м/с; 6 – $I_n = 100$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,05$ м/с; 7 – $I_n = 100$ мА, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 80$ мм, $V = 0,02$ м/с [59, 107].



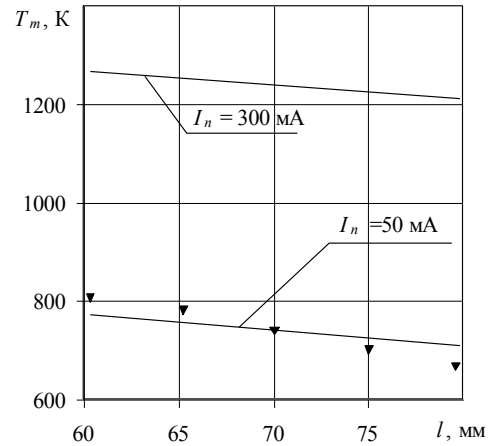
а)



б)



в)



г)

Рисунок 6.8 - Вплив параметрів СЕП на максимальну температуру T_m оброблюваного прямокутного бруска з оптичного скла К-8 (приведені експериментальні дані отримані в роботах [107]): а) – $t = 0,5$ с, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; б) – $t = 0,5$ с, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм; в) – $t = 0,5$ с, $I_n = 100$ мА, $l = 60$ мм; г) – $t = 0,5$ с, $U_{np} = 4$ кВ, $V = 0,02$ м/с [21, 65, 80, 111, 122].

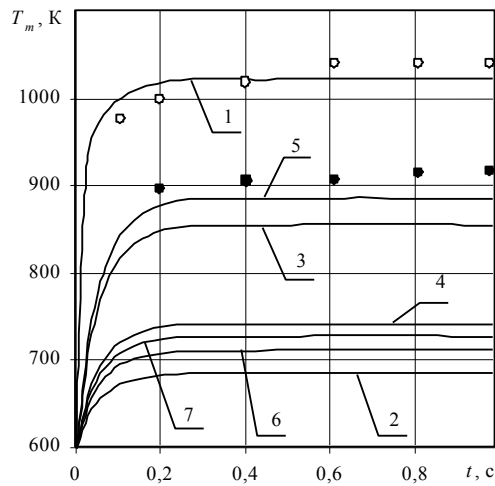


Рисунок 6.9 - Залежність максимальної температури T_m від часу електронної обробки прямокутного бруска з оптичної кераміки КО-2: 1 – $I_{\text{п}} = 300$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 2 – $I_{\text{п}} = 50$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 3 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{пр}} = 8$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 4 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; 5 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,005$ м/с; 6 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм, $V = 0,05$ м/с; 7 – $I_{\text{п}} = 100$ мА, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 80$ мм, $V = 0,02$ м/с [21, 65, 80, 111, 122].

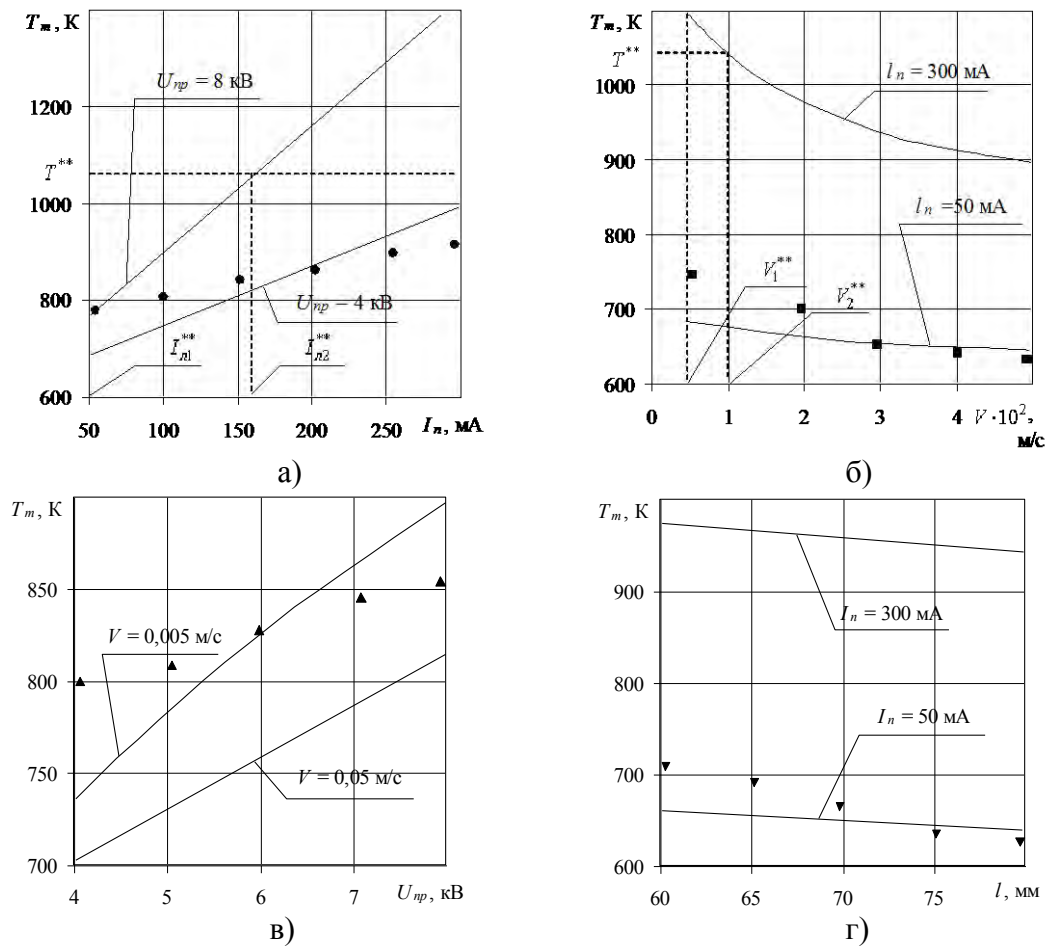


Рисунок 6.10 – Вплив параметрів СЕП на максимальну температуру T_m оброблюваного прямокутного бруска з оптичної кераміки КО-2: а) – $t = 0,5$ с, $l = 60$ мм, $V = 0,02$ м/с; б) – $t = 0,5$ с, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $l = 60$ мм; в) – $t = 0,5$ с, $I_{\text{п}} = 100$ мА, $l = 60$ мм; г) – $t = 0,5$ с, $U_{\text{пр}} = 4$ кВ, $V = 0,02$ м/с [107].

По ступеню впливу на величину T_m параметри СЕП розташовуються у вигляді наступного ряду: I_n , V , U_{np} і l . Кількісно ступінь їх впливу на T_m оцінюється таким чином: при збільшенні I_n від 50 мА до 300 мА величина T_m зростає (для скла К-8 - в 2,3...2,6 рази; для кераміки КО-2 - в 1,4...1,8 рази); зростання V від 0,005 м/с до 0,05 м/с призводить до убування T_m (для скла К-8 - в 1,3...1,5 рази; для кераміки КО-2 - в 1,2...1,3 рази); підвищення U_{np} від 4 кВ до 8 кВ відповідає збільшенню T_m (для скла К8 - в 1,2...1,4 раз; для кераміки КО-2 - в 1,1...1,2 раз); збільшення l в межах 60...80 мм приводить до зменшення T_m менше, ніж в 1,1 раз.

Аналіз результатів розрахунків з погляду визначення вказаних вище допустимих діапазонів зміни параметрів СЕП показує, що, дійсно, такі діапазони існують в процесі електронної обробки як оптичних стекл, так і оптичних керамік:

скло К8 для $t = 0,5$ с, $U_{np} = 8$ кВ, $l = 60$ мм та $V = 0,02$ м/с

маємо $I_{i1}^* = 50 \text{ i } \hat{A} \leq I_i \leq I_{i2}^* = 165 \text{ i } \hat{A}$;

для $t = 0,5$ с, $U_{np} = 4$ кВ, $l = 60$ мм та $V = 0,02$ м/с

маємо $I_{i1}^* = 50 \text{ i } \hat{A} \leq I_i \leq I_{i2}^* = 280 \text{ i } \hat{A}$;

для $t = 0,5$ с, $I_n = 300$ мА, $U_{np} = 4$ кВ та $l = 60$ мм

маємо $V_1^* = 0,005 \text{ i } / \hat{n} \leq V \leq V_2^* = 0,016 \text{ i } / \hat{n}$;

для $t = 0,5$ с, $I_n = 100$ мА, $V = 0,005$ м/с та $l = 60$ мм

маємо $U_{i\delta 1}^* = 4 \hat{e} \hat{A} \leq U_{i\delta} \leq U_{i\delta 2}^* = 6,3 \hat{e} \hat{A}$;

кераміка КО-2 для $t = 0,5$ с, $U_{np} = 8$ кВ, $l = 60$ мм та $V = 0,02$ м/с

маємо $I_{i1}^{**} = 50 \text{ мА} \leq I_i \leq I_{i2}^{**} = 175 \text{ мА}$;

для $t = 0,5$ с, $I_n = 300$ мА, $U_{np} = 4$ кВ та $l = 60$ мм

маємо $V_1^{**} = 0,005 \text{ м/с} \leq V \leq V_2^{**} = 0,01 \text{ м/с}$.

Для наочного уявлення про існування допустимих діапазонів зміни параметрів СЕП і для оптичних елементів інших геометричних форм (тонкоплівковий елемент, тонка пластина великих розмірів, прямокутні

бруски і прямокутні елементи різної товщини) результати розрахунків представлені в тривимірному вигляді.

Зіставлення окремих результатів розрахунків з експериментальними даними по вимірюванню T_m [59] показало, що вони адекватні один одному (відмінності між ними не перевищують 8...12 %).

Таким чином, розроблений комплекс нелінійних математичних моделей процесу нагрівання даних оптичних стекел і керамік дозволяє на стадії відпрацювання технологічних режимів електронної обробки виробів з оптичних матеріалів з точністю 8...12% вибирати допустимі режими зміни керованих параметрів СЕП, що не допускають різкого погіршення властивостей поверхневих шарів оброблюваних оптичних матеріалів, і тим самим підвищувати якість їхньої обробки.

6.3 Математичне моделювання термопружних напружень в оптичних елементах

В процесі експлуатації виробу ІЧ-техніки на певних ділянках своєї поверхні піддаються екстремальним термічним діям, що призводять до появи тріщин, сколів, шкідливих структурних змін в поверхневих шарах тощо, тобто до істотного погіршення працездатності виробів і, зрештою, до їх відмов. Тому з метою поліпшення властивостей поверхневих шарів виробів (підвищення мікротвердості і формування термозміцнення шарів без погіршення коефіцієнта ІЧ-пропускання оптичних керамік (КО-2, КО-4, КО-12 та інші) вказані ділянки їх поверхонь на стадії фінішного виготовлення додатково піддаються обробці СЕП.

Проте при застосуванні СЕП для обробки поверхонь вказаних вище виробів в їх поверхневих шарах можуть виникати критичні локальні перегріву, які зумовлені наявністю індукованою релаксацією термопружних напружень, що перевищують їх гранично допустимі значення для даного матеріалу. Тому на стадії розробки технологічних процесів додаткової

обробки поверхонь виробів ІЧ-техніки необхідно прогнозувати розподіли термопружних напружень в цих виробках залежно від керованих параметрів СЕП (струму електронного потоку I_n , мА, прискорюючої напруги U_{np} , кВ, часу дії на виріб t , с тощо) і визначати допустимі режими їх поверхневого термозміцнення.

6.3.1 Математична модель термопружних напружень в оптичних пластинах

При обробці поверхні пластини скануючим СЕП на її поверхню поступає рівномірно розподілений тепловий потік $q_n(t)$ (рис. 6.11).

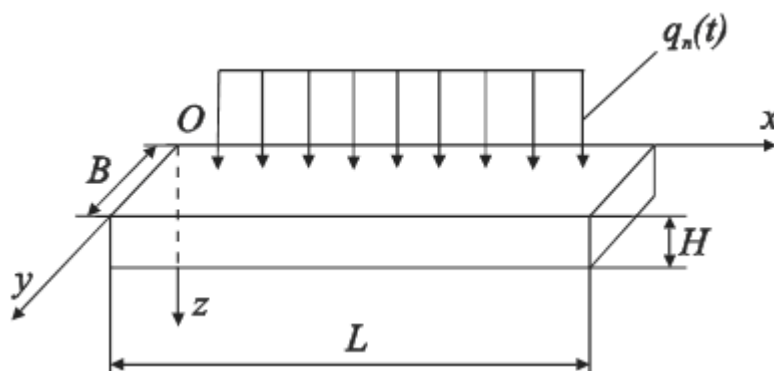


Рисунок 6.11 - Схема нагрівання оптичної пластини різної товщини скануючим СЕП

Розглядається пластина, для якої $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ (одновимірність розподілу тепла углиб пластини), а також глибина зони термічної дії $\delta \cong H$, тобто враховується теплообмін на нижній стороні пластини. Оскільки при термообробці оптичних керамік рухомим СЕП останні заздалегідь нагріваються до невеликих температур (початкова температура $T_0 = 350 \dots 400$ К, на відміну від оптичних стекел, для яких $T_0 = 600 \dots 850$ К [29, 59, 114]), то передбачається, що на нижній стороні пластини здійснюється радіаційний теплообмін з навколишнім середовищем. Виникнення ж термопружних напружень в цьому випадку пов'язане з градієнтом температури по товщині (уподовж z) пластини. Компоненти деформації в такій пластині, розташованій в площині xy можуть бути

визначені на основі допущень, що має місце плоский напружений стан і, що плоскі перетини, перпендикулярні поверхні пластини, до нагрівання залишаються такими ж в процесі нагрівання. В цьому випадку компоненти термонапружень $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$, а $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma(z, t)$.

Використовуючи відоме рівняння сумісності (див.(6.23) і припускаючи рівність нулю сили і її моменту на поверхні пластини товщиною H , отримуємо наступне рівняння математичної моделі для розрахунку термопружних напружень по її глибині в різні моменти часу t :

$$\sigma(z, t) = \frac{\alpha_v E}{1 - \nu} \left[-T(z, t) + \frac{2}{I^2} (2I - 3z) \int_0^i T(z, t) dz - \frac{6}{I^3} (I - 2z) \int_0^i T(z, t) z dz \right]. \quad (6.124)$$

Для проведення розрахунків по рівнянню (6.124) необхідно знати $T(z, t)$. Для знаходження значень $T(z, t)$ скористаємося наступним нелінійним рівнянням теплопровідності [61, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad t > 0, \quad 0 < z < H \quad (6.125)$$

з початковою умовою

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (6.126)$$

і граничними умовами

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_i(t), \quad (6.127)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} (T^4 - T_c^4) \Big|_{z=H}, \quad (6.128)$$

де T_c – температура навколишнього середовища, К; $\lambda(T)$, $C_V(T)$ – коефіцієнт теплопровідності (Вт/м·К) і об'ємна теплоємність (Дж/м³·К) матеріалу пластини; $\bar{\sigma} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К⁴ – постійна Стефана-Больцмана; $\bar{\varepsilon}$ – коефіцієнт чорноти випромінюючої поверхні. При цьому в рівняннях

(6.125)-(6.128) враховуються емпіричні залежності $C_V(T) = C_{V0} T^\nu$, $\lambda(T) = \lambda_0 T^\nu$.

Для розв'язання сформульованої нелінійної теплової задачі (6.125) - (6.128) зробимо заміну змінних (для випадку $q_n(t) = q_{n0} = const$):

$$\theta = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\nu+1}, \quad \eta = \frac{z}{H}, \quad F_0 = \frac{a_0^2 t}{H^2}, \quad \bar{q}_n = \frac{H(\nu+1)q_{n0}}{\lambda_0 T_0^{\nu+1}}, \quad \theta_c = \frac{T_c}{T_0},$$

$$\alpha = \frac{(\nu+1)H T_0^{3-\nu} \bar{\epsilon} \bar{\sigma}}{\lambda_0}. \quad (6.129)$$

Тоді система рівнянь (6.125)-(6.128) має наступний безрозмірний вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}, \quad F_0 > 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (6.130)$$

$$\theta|_{F_0=0} = 1, \quad (6.131)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \bar{q}_{n0}, \quad (6.132)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \alpha \left[\theta^{\frac{4}{\nu+1}}(1, F_0) - \theta_c^4 \right]. \quad (6.133)$$

Через нелінійність отриманої крайової задачі (6.130)-(6.133) для її розв'язання скористаємося інтегральним методом Гудмана [63]. Прийmemo розподіл температури по товщині пластини у вигляді полінома другого ступеня від η :

$$\theta = \sum_{i=0}^2 \beta_i \eta^i, \quad (6.134)$$

де коефіцієнти β_i залежать в загальному випадку від F_0 .

Для виконання граничних умов (6.127) і (6.128) вираз для профілю температури необхідно узяти у вигляді:

$$\theta = u - f(1-\eta) + \frac{1}{2}(f + \bar{q}_{n0})(1-\eta)^2, \quad (6.135)$$

де

$$f = \alpha \left(u^{\frac{4}{v+1}} - \theta_c^4 \right), \quad u = \theta(1, F_0). \quad (6.136)$$

Для профілю температури $T(z, t)$ в цьому випадку отримуємо наступний вираз:

$$T(z, t) = \left\{ T^{v+1}(H, t) - \frac{(v+1)H\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}}{\lambda_0} [T^4(H, t) - T_c^4] \left(1 - \frac{z}{H}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(v+1)H\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}}{\lambda_0} (T^4(H, t) - T_c^4) + \frac{(v+1)Hq_{i0}}{\lambda_0} \right] \right\}^{\frac{1}{v+1}}. \quad (6.137)$$

У отриманому виразі (6.137) залишається поки невизначеною температура нижньої сторони пластини $T(H, t)$.

Для встановлення взаємозв'язку між часом протікання процесу обробки верхньої сторони пластини скануючим СЕП і температурою $T(H, t)$ проінтегруємо рівняння (6.130) по η :

$$\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial F_0} d\eta = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} d\eta \quad (6.138)$$

і обчислимо інтеграли в лівій і правій частинах отриманої рівності:

$$\frac{d}{dF_0} \left(\int_0^1 \theta d\eta \right) = \frac{\partial \theta(1, F_0)}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta(0, F_0)}{\partial \eta}. \quad (6.139)$$

Визначаючи величини, що входять в (6.139), отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно $T(H, t)$:

$$\frac{d}{dt} \left[T^{v+1}(H, t) - \frac{(v+1)H\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}}{3\lambda_0} (T^4(H, t) - T_c^4) \right] = \\ = \frac{(v+1)a_0^2\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}}{\lambda_0 H} (T^4(H, t) - T_c^4) + \frac{(v+1)a_0^2 q_{i0}}{\lambda_0 H}. \quad (6.140)$$

з початковою умовою

$$T(H, t)|_{t=0} = T_0. \quad (6.141)$$

Отримане рівняння (6.139) для знаходження $T(H,t)$ перепишемо в наступному вигляді, зручному для чисельних розрахунків:

$$\frac{dT(H,t)}{dt} = F[T(H,t)], \quad (6.142)$$

де

$$F[T(H,t)] = \frac{3a_0^2}{H} \frac{\{\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}[T^4(H,t) - T_c^4] + q_{i0}\}}{3\lambda_0 T^v(H,t) - 4I \bar{\varepsilon}\bar{\sigma} T^3(H,t)}; \quad (6.143)$$

$$q_{i0} = \frac{I_i U_{i\delta}}{B L}. \quad (6.144)$$

Таким чином, для визначення функції $T(H,t)$ маємо завдання Коші для звичайного диференціального рівняння 1-го порядку (6.141)-(6.144).

Отримані вирази (6.124), (6.137), (6.141)-(6.143) дозволяють розраховувати вплив керованих параметрів СЕП на термопружні напруження, що виникають в поверхневих шарах пластин з оптичної кераміки при їх електронній обробці, а також визначати допустимі діапазони зміни вказаних параметрів, що не приводять до руйнування оптичного матеріалу.

6.3.2 Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на розподіл термопружних напружень в елементах із оптичної кераміки, вибір граничних режимів поверхневого термічного зміцнення, зіставлення їх з експериментальними даними

Для проведення розрахунків термопружних напружень в даних пластинах (див. (6.124) (6.137) (6.142) були використані вказані вище пакети прикладних програм, а також необхідні теплофізичні і фізико-механічні властивості оптичної кераміки КО-2 [29, 115].

В результаті проведених розрахунків (рис. 6.12-6.15) було встановлено, що по товщині пластини термопружні напруження істотно нерівномірні поблизу її поверхні.

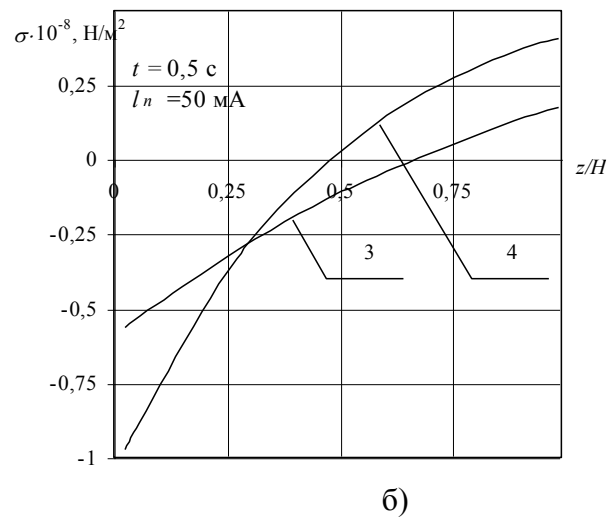
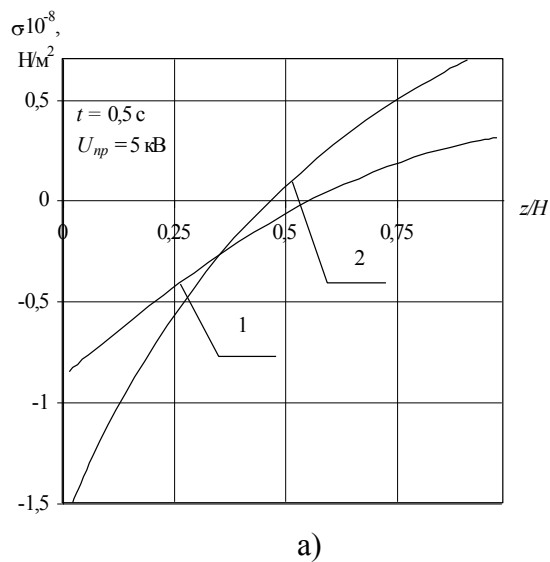


Рисунок 6.12 - Розподіл термопружних напружень по товщині пластини залежно від параметрів СЕП ($T_0 = T_c = 400 \text{ K}$; $a_0^2 = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = -0,143$; $B = 0,01 \text{ м}$; $H = 0,04 \text{ м}$; $L = 0,1 \text{ м}$; $\lambda_0 = 41,46 \text{ Вт/м}\cdot\text{K}^{\nu+1}$; $\varepsilon = 0,25$; $\bar{\sigma} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\cdot\text{K}^4$; $\alpha_\nu(T)$ та $E(T)$):

- а) – вплив струму електронного потоку I_n (1 – $I_n = 50 \text{ mA}$, 2 – $I_n = 300 \text{ mA}$)
- б) – вплив прискорюючої напруги $U_{пр}$ ($t = 5 \text{ с}$, 3 – $U_{пр} = 4 \text{ кВ}$, 4 – $U_{пр} = 8 \text{ кВ}$).

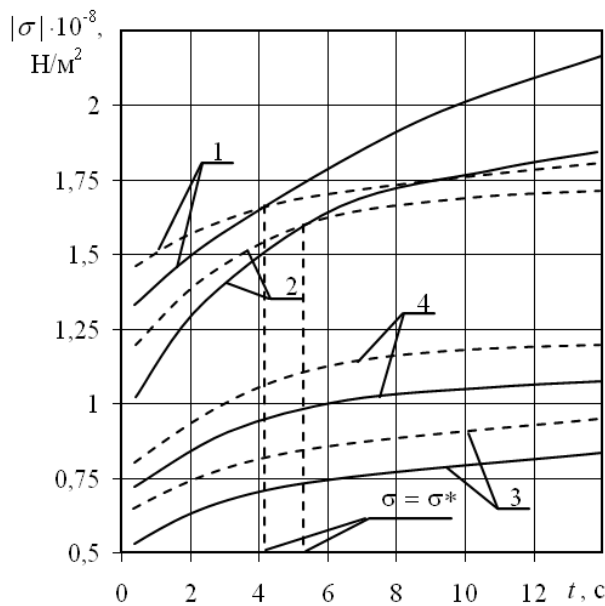


Рисунок 6.13 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ на верхній стороні пластини ($z = 0$) від дії СЕП: 1 – $I_n = 250 \text{ mA}$, $U_{пр} = 5 \text{ кВ}$; 2 – $I_n = 250 \text{ mA}$, $U_{пр} = 8 \text{ кВ}$; 3 – $I_n = 50 \text{ mA}$, $U_{пр} = 5 \text{ кВ}$; 4 – $I_n = 50 \text{ mA}$, $U_{пр} = 8 \text{ кВ}$;

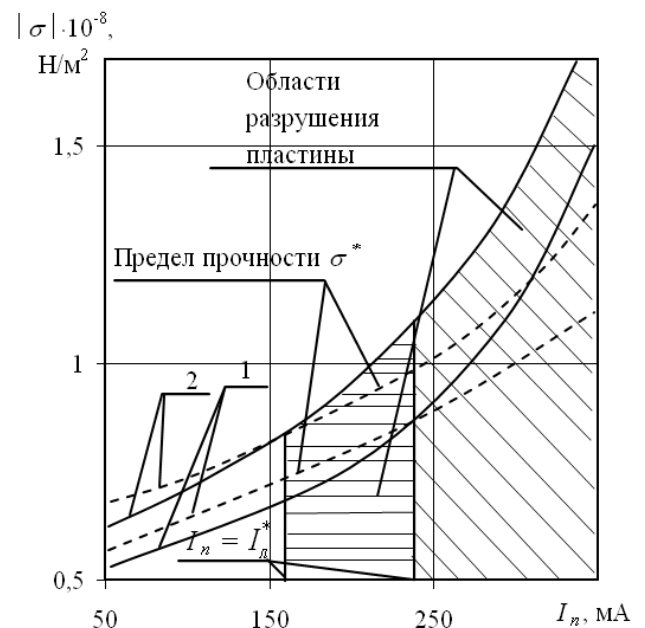


Рисунок 6.14 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ на поверхні пластини від I_n для різних моментів часу дії СЕП: 1 – $t = 5 \text{ с}$; 2 – $t = 25 \text{ с}$

— — розрахункові криві; - - - - - межа міцності σ^* оптичної кераміки КО-2

(решта позначень аналогічна рис. 6.12).

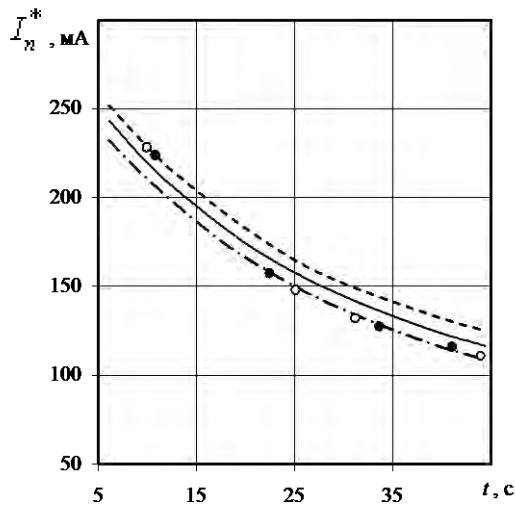


Рисунок 6.15 - Залежність критичних значень I_i^* від часу дії СЕП: - - - - - $U_{пр} = 4$ кВ; — — — — — $U_{пр} = 5$ кВ; - · - · - · - $U_{пр} = 8$ кВ; ● — експериментальні дані (для $U_{пр} = 5$ кВ), (решта позначень аналогічна рис. 6.12).

Тут, має місце місце стискуючі напруження ($\sigma < 0$, $|\sigma| = 7,5 \cdot 10^7 \dots 1,5 \cdot 10^8$ Н/м²), а на нижній стороні - розтягуючі напруження ($\sigma > 0$, $|\sigma| = 3,5 \cdot 10^7 \dots 5,5 \cdot 10^7$ Н/м²); при цьому з параметрів СЕП найбільш сильний вплив на величину $|\sigma|$ надає струм електронного потоку $I_{п}$ (збільшення $I_{п}$ від 50 мА до 300 мА приводить до збільшення $|\sigma|$ у 2...3 рази, а збільшення $U_{пр}$ від 4 кВ до 8 кВ приводить до збільшення $|\sigma|$ тільки у 1,2...1,3 рази). При збільшенні $I_{п}$ величина $|\sigma|$ зростає до значення $\sigma^* = \sigma(I_i^*)$ (σ^* — граничне значення термопружних напружень, при якому відбувається руйнування матеріалу пластини; I_i^* — значення струму електронного потоку, при якому величина $|\sigma|$ стає рівною σ^*). При цьому величина I_i^* істотно залежить від часу обробки: наприклад, при збільшенні t від 5 с до 40 с значення I_i^* зменшуються від 250 мА до 125 мА (для $U_{пр} = 4$ кВ); збільшення $U_{пр}$ від 4 кВ до 8 кВ практично не позначається на значеннях I_i^* .

Отримані результати розрахунків повністю відповідають результатам технологічних експериментів [36], згідно яким при певних режимах обробки

(сукупностях значень I_n , U_{np} , t) оптичної кераміки КО-2 спостерігається її поверхневе руйнування: поява тріщин, сколів та інших дефектів.

Зіставлення результатів розрахунків з експериментальними даними (див. рис. 6.15), показує їх повну якісну відповідність, кількісна ж відмінність між ними не перевищує 10...15 %.

Таким чином, розроблена математична модель і програмне забезпечення у вигляді пакетів прикладних програм для розрахунку термонапружень в пластині (багатоциклова обробка СЕП), можуть на стадіях відпрацювання режимів технологічних процесів термозміцнення поверхневих шарів оптичних керамік прогнозувати (з відносною похибкою 10...15 %) так звані “небезпечні” режими (сукупності значень параметрів СЕП, що перевищують їх допустимі значення I_i^* , $U_{i\delta}^*$, V^* , l^* , t^*), при яких оброблюваний матеріал руйнується. Це дозволяє підвищувати ефективність фінішної поверхневої обробки за допомогою СЕП виробів ІЧ-техніки з оптичних керамік з метою збільшення механічної міцності їх поверхневих шарів, що приводить зрештою, до підвищення надійності і стабільної роботи виробів в умовах ударних стартових та інтенсивних польотних навантажень.

6.4 Математичне моделювання процесу поверхневого оплавлення оптичних пластин та прямокутних елементів із оптичного скла

При відпрацюванні технологічних режимів поліровки виробів мікрооптики, оптоелектроніки, інтегральної і волоконної оптики, функціональної електроніки тощо рухомими стрічковими електронними потоками (СЕП) важливе практичне значення має прогнозування оптимальних значень глибини рідкої ванни (глибини оплавлення), що утворюється на поверхні виробу з оптичного матеріалу (оптичні стекла К8, К108, К208 тощо) залежно від різних режимів поліровки (сукупності параметрів СЕП: струму електронного потоку I_n (мА), прискорюючої напруги U_{np} (кВ), відстані від оброблюваної поверхні l (м), швидкості переміщення

електронного потоку V (м/с) і часу обробки t (с). Це обумовлено тим, що при оплавленні оброблюваних виробів більш, ніж на 150...200 мкм виникає помітне розтікання розплаву матеріалу на поверхні, що приводить до утворення «напливів» матеріалу на кінцевих ділянках обробки [59, 114], в результаті, відбувається зміна форми і розмірів виробів, що веде до їх відбракування. В зв'язку з цим важливого практичного значення набуває постановка і розв'язання задачі про математичне моделювання процесу оплавлення оптичних матеріалів, що обробляються рухомих СЕП. Вказану задачу розглядатимемо на прикладі наступних видів обробки матеріалів: багатocyкловий (скануючий) рух СЕП по поверхні пластини (нестационарний режим); одноцикловий рух СЕП уздовж поверхні прямокутного бруска товщини (квазістационарний режим).

6.4.1 Математична модель процесу оплавлення оптичних пластин

При поліровці поверхні пластини скануючим СЕП на її поверхню поступає рівномірно розподілений тепловий потік і встановлюється температура T_n , яка згідно встановленим технологічним режимам поліровки оптичних матеріалів визначається з умови (рис. 6.16) [114]:

$$T^* = (0,9 \dots 0,95) \cdot T_n.$$

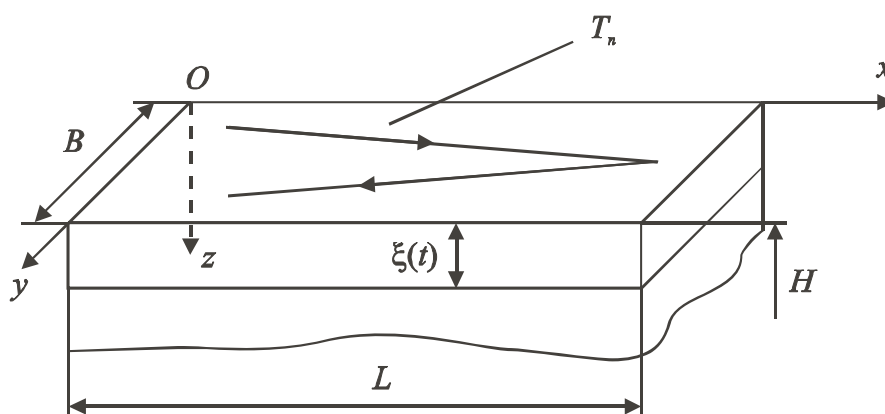


Рисунок 6.16 - Схема оплавлення оптичної пластини при багатocyкловому русі СЕП:

← - траєкторії руху СЕП по поверхні пластини

Тут, T^* – температура текучості (рідкого стану) оптичного матеріалу, яка визначається з експериментально встановлених залежностей $\eta(T)$ [109, 117, 120] (η – в'язкість розплаву оптичного матеріалу): наприклад, для скла К8 значення $T^* = 1400$ К.

Передбачається, що $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (одновимірність розповсюдження тепла углиб пластини), оскільки глибина зони термічної дії $\delta \ll H$ та $\delta > B$, L . Враховуючи, що теплообмін на нижній стороні пластини не впливає на температурне поле в пластині, а її обробка відбувається у вакуумі, то, нехтуючи тепловитратами за рахунок конвекції і випромінювання, рівняння математичної моделі даної задачі є нелінійним рівнянням теплопровідності з граничними умовами IV роду [21, 65, 80, 111, 122]:

$$C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad t > 0, \quad 0 < z < \xi(t), \quad (6.145)$$

$$T|_{z=0} = T_n, \quad t \geq 0, \quad (6.146)$$

$$T|_{z=\xi(t)} = T^*, \quad t \geq 0, \quad (6.147)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi(t)} = \lambda_i \rho \frac{d\xi}{dt}, \quad t \geq 0, \quad (6.148)$$

де $\xi(t)$ – змінна товщина оплавленого шару ($\xi(0) = 0$); λ_n – прихована теплота фазового переходу; ρ – щільність розплаву оптичного матеріалу.

З урахуванням емпіричних залежностей теплофізичних властивостей оптичних стекол від температури ($C_V(T)$ та $\lambda(T)$), рівняння (6.145) - (6.148) перетворюються до вигляду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad 0 < z < \xi(t), \quad (6.149)$$

$$\theta|_{z=0} = \phi, \quad t \geq 0, \quad (6.150)$$

$$\theta|_{z=\xi(t)} = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.151)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\xi(t)} = A \frac{d\xi}{dt}, \quad t \geq 0, \quad (6.152)$$

$$\text{де } \theta = T^{v+1} - T^{*v+1}, \quad A = -\frac{\lambda_n \rho(v+1)}{\lambda_0}, \quad a_0^2 = \frac{\lambda_0}{C_{V0}}, \quad \phi = T_n^{v+1} - T^{*v+1}. \quad (6.153)$$

У вказаному завданні (6.149)-(6.152) потрібно визначити закони руху фронту плавлення $(\xi(t), \frac{d\xi(t)}{dt})$ і функцію $\theta(z, t)$. Для розв'язання задачі (6.149) – (6.152) використовуємо методи теорії інтегральних перетворень в областях з рухомими межами [11, 51, 95].

З цією метою введемо інтегральне перетворення:

$$\tilde{\theta}(p, t) = \int_0^{\xi(t)} \theta(z, t) \cdot sh(z \cdot \sqrt{p}) dz, \quad (6.154)$$

де $p = \sigma + i\omega$ – комплексне число з $Re p \geq \beta > 0$ та $-\frac{\pi}{4} < arg \sqrt{p} < \frac{\pi}{4}$.

Помножимо обидві частини рівняння на $sh(z\sqrt{p})$ та інтегруємо його по z від нуля до $\xi(t)$:

$$\int_0^{\xi(t)} \frac{\partial \theta}{\partial t} sh(z\sqrt{p}) dz = a_0^2 \int_0^{\xi(t)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} sh(z\sqrt{p}) dz. \quad (6.155)$$

Інтегруючи (6.155) по частинах, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\xi(t)} \theta(z, t) sh(z\sqrt{p}) dz - \theta(\xi(t), t) sh(\xi(t)\sqrt{p}) \frac{d\xi}{dt} &= a_0^2 \frac{\partial T}{\partial x} sh(z\sqrt{p}) \Big|_0^{\xi(t)} + \\ &+ a_0^2 \sqrt{p} \theta(z, t) ch(z\sqrt{p}) \Big|_0^{\xi(t)} + a_0^2 p \int_0^{\xi(t)} \theta(z, t) sh(z\sqrt{p}) dz. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Враховуючи краєві умови (6.150)-(6.152), а також (6.154), приходимо до звичайного диференціального рівняння першого порядку з початковою умовою (задача Коші [18, 64]):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} - a_0^2 p \tilde{\theta} - a_0^2 A \frac{d\xi}{dt} sh(\xi(t)\sqrt{p}) - a_0^2 \sqrt{p} \phi = 0, & t > 0 \\ \tilde{\theta} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (6.157)$$

Розв'язуючи (6.157) одним із стандартних методів (наприклад, методом Бернуллі [18, 64]), отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(p,t) = & \left(a_0^2 \frac{A}{\sqrt{p}} \right) e^{a_0^2 p t} \left\{ e^{-a_0^2 p t} \operatorname{ch}(\xi(t)\sqrt{p}) - 1 + a_0^2 p \int_0^t e^{-a_0^2 p \tau} \operatorname{ch}(\xi(\tau)\sqrt{p}) d\tau \right\} + \\ & + a_0^2 \sqrt{p} \int_0^t e^{a_0^2 p(t-\tau)} \varphi d\tau. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Далі шукатимемо $\theta(z,t)$ у вигляді наступного ряду (типу ряду Фур'є [18]):

$$\theta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi n}{\xi(t)} \right]^2 t} \sin\left(\frac{\pi n z}{\xi(t)} \right), \quad (6.159)$$

припускаючи цей ряд абсолютним і таким, що рівномірно сходиться при будь-якому $0 < z < \xi(t)$ і будь-якому кінцевому $t > 0$. Підставляючи ряд (6.159) в (6.158) і проводячи інтеграцію, отримаємо наступне співвідношення:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n a_n(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi n}{\xi(t)} \right]^2 t}}{p + \pi^2 n^2 / \xi^2(t)} = \frac{\xi(t) \tilde{\theta}(p,t)}{\pi \operatorname{sh}(\xi(t)\sqrt{p})}. \quad (6.160)$$

Ліва частина виразу (6.160) регулярна усюди, за винятком полюсів, розташованих на негативній півосі:

$$p_n = \frac{-\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.161)$$

Проінтегруємо обидві частини рівності (6.160) по p послідовно по контурах $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots$. Контур γ_n складається з вертикалі $\sigma > 0$, півколу

радіусу $R_n = \left[\frac{\pi^2}{\xi^2(t)} \right] (2n^2 + 2n + 1)$ (контур γ_n перетинає вісь z у середній

точці між p_n та p_{n+1}) з центром на початку координат і двох горизонтальних

прямих $Y = \pm \left[\frac{\pi^2}{2\xi^2(t)} \right] (2n^2 + 2n + 1)$. Тоді коло R_n не проходить ні через

один з полюсів підінтегральної функції і по теоремі Коші [18, 64] інтеграл по

контур γ_n дорівнюватиме добутку $2\pi i$ на суму обчислень підінтегральної функції щодо її полюсів, що знаходяться усередині контуру γ_n :

$$\int_{\gamma_n} f(p) dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [f(p); p_k]. \quad (6.162)$$

Оскільки в (6.162) полюси p_n – прості, а підінтегральна функція $f(p)$ має вигляд $\frac{f_1(p)}{f_2(p)}$, то при обчисленні значень функції $\frac{f_1(p)}{f_2(p)}$ щодо простого полюса $p = p_k$ можна скористатися формулою [18]:

$$\text{Res} \left[\frac{f_1(p)}{f_2(p)}; p_k \right] = \left[\frac{f_1(p)}{f_2'(p)} \right]_{p=p_k}. \quad (6.163)$$

Проводячи послідовну інтеграцію по контурах $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$, слід врахувати, що якщо $f(p)$ – аналітична функція на замкнутому контурі γ і в однозв'язаній області, обмеженій контуром, то $\int_{\gamma} f(p) dp = 0$ (теорема Коші [18, 64]). З урахуванням вказаного вище, знаходимо:

$$\begin{aligned} a_1(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi n}{\xi(t)}\right]^2 t} \int_{\gamma_1} \frac{dp}{p + \frac{\pi^2}{\xi^2(t)}} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n a_n(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi n}{\xi(t)}\right]^2 t} \times \\ \times \int_{\gamma_1} \frac{dp}{p + \frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}} = \frac{\xi(t)}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\tilde{\theta}(p, t) dp}{sh(\xi(t) \sqrt{p})}. \end{aligned} \quad (6.164)$$

Оскільки $\text{Res} \left[\left(p + \frac{\pi^2}{\xi^2(t)} \right)^{-1}; \frac{-\pi^2}{\xi^2(t)} \right] = 1$, а $\int_{\gamma_1} \left[p + \frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)} \right]^{-1} dp = 0$ ($n \geq 2$), тоді:

$$a_1(t) = \xi(t) e^{\left[\frac{a_0 \pi}{\xi(t)}\right]^2 t} \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\gamma_1} \frac{\tilde{\theta}(p, t) dp}{sh(\xi(t) \sqrt{p})}. \quad (6.165)$$

Проінтегруємо (6.160) по контуру γ_2 :

$$a_1(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi}{\xi(t)}\right]^2 t} \int_{\gamma_2} \frac{dp}{p + \frac{\pi^2}{\xi^2(t)}} - 2a_2(t) e^{-\left[\frac{2\pi a_0}{\xi(t)}\right]^2 t} \int_{\gamma_2} \frac{dp}{p + \frac{4\pi^2}{\xi^2(t)}} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} n a_n(t) e^{-\left[\frac{a_0 \pi n}{\xi(t)}\right]^2 t} \int_{\gamma_2} \frac{dp}{p + \frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}} = \frac{\xi(t)}{\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})}. \quad (6.166)$$

Звідси знаходимо, використовуючи (6.162)-(6.165):

$$a_2(t) = -\frac{\xi(t)}{2\pi} e^{-\left[\frac{2a_0 \pi}{\xi(t)}\right]^2 t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} \right\}. \quad (6.167)$$

Продовжуючи розглянутий вище процес інтеграції (6.160) по контурах $\gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_n$, отримаємо наступний вираз для $a_n(t)$:

$$a_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} \xi(t)}{\pi n} e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)}\right]^2 t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n-1}} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} \right\}, \quad (6.168)$$

де $\tilde{\theta}(p,t)$ представлено виразом (6.158). З врахуванням (6.158) представимо детальніше підінтегральний вираз в (6.168):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\theta}(p,t)}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} &= \frac{a_0^2 A ch(\xi(t)\sqrt{p})}{\sqrt{p} sh(\xi(t)\sqrt{p})} - \frac{a_0^2 A e^{a_0^2 p t}}{\sqrt{p} sh(\xi(t)\sqrt{p})} + \frac{a_0^4 A \sqrt{p}}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} \times \\ &\times \int_0^t e^{a_0^2 p(t-\tau)} ch(\xi(t)\sqrt{p}) d\tau + \frac{a_0^2 \sqrt{p}}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} \int_0^t e^{a_0^2 p(t-\tau)} \varphi d\tau. \end{aligned} \quad (6.169)$$

Аналізуючи вираз (6.169), бачимо, що перші два доданки регулярні усюди, за винятком простих полюсів $p=0$ та $p=p_n$ (6.161).

Якщо врахувати, що [64]:

$$\begin{aligned} Res \left\{ \frac{ch(\xi(t)\sqrt{p})}{\sqrt{p} sh(\xi(t)\sqrt{p})} \right\}_{p=-\frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}} &= \frac{2}{\sqrt{t}} \quad (n \geq 0); \\ Res \left\{ \frac{e^{a_0^2 p t}}{\sqrt{p} sh(\xi(t)\sqrt{p})} \right\}_{p=-\frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}} &= (-1)^n \frac{2}{\xi(t)} e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)}\right]^2 t} \quad (n \geq 0); \\ Res \left\{ \frac{\sqrt{p} ch(\xi(t)\sqrt{p})}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} e^{a_0^2 p(t-\tau)} \right\}_{p=-\frac{\pi^2 n^2}{\xi^2(t)}} &= \end{aligned}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2\pi^2 n^2}{\xi^2(t)} \cos \left[\frac{\pi n \xi(\tau)}{\xi(t)} \right] e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)} \right]^2 (t-\tau)} \quad (n \geq 0);$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n-1}} \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})} = Res \left\{ \frac{\tilde{\theta}(p,t) dp}{sh(\xi(t)\sqrt{p})}; P_n \right\},$$

то після обчислення інтегралів (6.166) – (6.168) отримуємо

$$a_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} a_0^2 A}{\pi n} \left\{ (-1)^{n+1} + e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)} \right]^2 t} + \frac{2a_0^4 A \pi n}{\xi^2(t)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^t e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)} \right]^2 \tau} \cos \left[\frac{\pi n \xi(\tau)}{\xi(t)} \right] d\tau + \frac{2a_0 \pi n}{\xi^2(t)} \cdot \int_0^t e^{-\left[\frac{\pi n a_0}{\xi(t)} \right]^2 \tau} \varphi d\tau \right\}, \quad n \geq 1. \quad (6.170)$$

Для знаходження виразу для $\xi(t)$ скористаємося методом диференціальних рядів [18], згідно якому функція $\theta(z,t)$ представляється у вигляді наступного загального співвідношення:

$$\theta(z,t) = -A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_0^{2n} (2n+1)!} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ [\xi(t) - z]^{2n+1} \frac{d\xi}{dt} \right\}. \quad (6.171)$$

Використовуючи для $\theta(z,t)$ граничну умову, отримуємо

$$-\frac{\varphi}{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_0^{2n} (2n+1)!} \frac{d^n}{dt^n} \left[\xi^{2n+1}(t) \frac{d\xi}{dt} \right] = const. \quad (6.172)$$

Співвідношення (6.172) виконується, якщо

$$\begin{cases} \xi^{2n+1}(t) \frac{d\xi}{dt} = \gamma_n t^n, \\ \xi(0) = 0. \end{cases} \quad (6.173)$$

Інтегруючи (6.173), знаходимо

$$[\xi^2(t)]^{n+1} = 2\gamma_n t^{n+1}. \quad (6.174)$$

Вважаючи $2\gamma_n = \beta^{2(n+1)}$, отримуємо закони руху фронту плавлення

$$\xi(t) = \beta \sqrt{t}, \quad (6.175)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\beta}{2\sqrt{t}},$$

де β – невідомий коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Для цього підставимо (6.175) в (6.172) і провівши підсумовування з використанням відомого співвідношення [18, 64]:

$$a_0 \sqrt{\pi} e^{\frac{\beta^2}{4a_0^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a_0}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{2m+1} m!}{a_0^{2m+1} (2m+1)!},$$

отримуємо наступне трансцендентне рівняння для знаходження β :

$$-\frac{\Phi}{A a_0 \sqrt{\pi}} = \beta e^{\frac{\beta^2}{4a_0^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a_0}\right). \quad (6.176)$$

Тепер, підставляючи (6.175) в (6.170), отримуємо:

$$a_n(t) = a_n = \frac{2a_0^2 A}{\pi n} \left[1 + (-1)^{n+1} e^{\frac{a_0^2 \pi^2 n^2}{\beta^2}} + a_0^2 \int_0^{\frac{\pi^2 n^2}{\beta^2}} e^{a_0 t} \cos(\beta \sqrt{t}) dt \right] + \frac{2\Phi}{\pi n} \left(e^{\frac{a_0^2 \pi^2 n^2}{\beta^2}} - 1 \right) = \text{const}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (6.177)$$

Вважаючи $t = u^2$ і застосовуючи до інтеграла в квадратних дужках формулу інтеграції по частинах, отримаємо після нескладних перетворень:

$$a_n = \frac{2a_0^2 \beta A}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi n}{\beta}} e^{a_0^2 u^2} \sin(\beta u) du + \frac{2\Phi}{\pi n} \left(e^{\frac{a_0^2 \pi^2 n^2}{\beta^2}} - 1 \right), \quad n \geq 1. \quad (6.178)$$

Підставляючи (6.178) в (6.159) і враховуючи (6.153), отримуємо наступний розв'язок початкової задачі:

$$T(z, t) = \left\{ T^{*v+1} - \frac{2a_0^2 \beta \lambda_n \rho(v+1)}{\pi \lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{\beta}\right)^2} \right] \times \right.$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi n a_0}{\beta}} e^{a_0^2 u^2} \sin(\beta u) du + \frac{2(T_n^{v+1} - T^{*v+1})}{\pi n} \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{\beta}\right)^2} \right) \left[\sin\left(\frac{\pi n z}{\beta \sqrt{t}}\right) \right]^{\frac{1}{v+1}},$$

$$0 < z < \beta \sqrt{t} \quad (6.179)$$

Обмежившись першими N членами ряду і вважаючи $T^* = 0,925 \cdot T_n$, отримуємо наступний вираз для профілю температури по глибині розплаву, що утворюється на поверхні оптичної пластини при поліровці її скануючим СЕП:

$$T(z, t) = \left\{ T^{*v+1} - \frac{2a_0^2 \beta \lambda_n \rho (v+1)}{\pi \lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{\beta}\right)^2} \times \right. \right.$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi n a_0}{\beta}} e^{a_0^2 u^2} \sin(\beta u) du + \frac{2T^{*v+1} (1,081^{v+1} - 1)}{\pi n} \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{\beta}\right)^2} \right) \left. \right] \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi n z}{\beta \sqrt{t}}\right) \left. \right\}^{\frac{1}{v+1}}, \quad 0 < z < \beta \sqrt{t} \quad (6.180)$$

6.4.2 Математична модель процесу оплавлення оптичних прямокутних елементів

Даний режим обробки здійснюється в квазістаціонарній постановці, що відповідає достатньо тривалій дії СЕП на оптичні матеріали (від десятків секунд і більш), наприклад, виробу інтегральної і волоконної оптики. Це особливо важливо для протяжних виробів (наприклад, основи оптичних інтегральних схем [37, 59, 65, 80, 100]), оскільки час виходу на квазістаціонарний режим багато менше сумарного часу обробки виробів.

При цьому, на відміну від відомих задач про проплавлення тіл різними джерелами тепла, в даній задачі із-за невеликих глибин оплавлення (менше 200...250 мкм), виробів, що реалізуються в практично відпрацьованих технологічних режимах поліровки, з оптичних стекел [29, 59, 97, 114], їх

значення оцінюватимемо по ізотермі плавлення (координатній лінії початку утворення рідкої фази) без розв'язку задачі Стефана, яка покладена в основу всіх вказаних задач [51, 88, 95, 104, 126]. Окрім цього, для підвищення точності розрахунків глибин оплавлення виробів враховуються експериментально встановлені температурні залежності об'ємної теплоємності $C_V(T)$ та $\lambda(T)$ для оптичних стекл.

Математична постановка даної задачі полягає в наступному: розглядається процес формування на поверхні зони обробки розплаву, об'єм якого з часом може змінюватися, прагнучи до деякого квазістаціонарного стану. Утворення рідкої фази здійснюється джерелом теплоти (рухомий СЕП), що має нормальний розподіл щільності теплової дії $q_n(x)$ і що переміщається з постійною швидкістю V уздовж поверхні прямокутного бруска, що є основним виробом різних інтегрально-оптичних мікросхем (рис. 6.17).

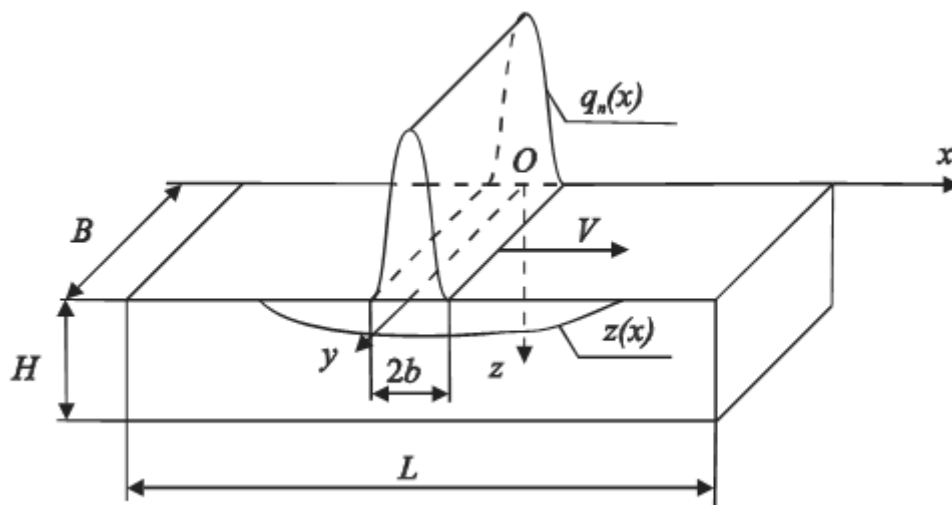


Рисунок 6.17 - Схема оплавлення оптичного прямокутного бруска при одноцикловому русі СЕП $z(x)$ – рівняння координатної лінії початку утворення рідкої фази

Також як і у разі пластини, нехтуючи теплообміном на нижній стороні бруска, конвекційними і радіаційними тепловитратами, для математичного опису температурних полів в даному прямокутному бруську маємо наступне квазістаціонарне нелінійне рівняння теплопровідності з граничною умовою II роду [21, 65, 80, 111, 122]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + C_V(T) V \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (6.181)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_i(x), \quad (6.182)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty \quad z \rightarrow +\infty. \quad (6.183)$$

У даному випадку щільність потоку енергії q є поверхневим джерелом тепла q_n (Вт/м²), який рухається у напрямі осі OX із швидкістю V (див. (6.57)). Для розв'язання сформульованої задачі (6.181)-(6.183) зробимо заміну змінних

$$\theta = T^{v+1} - T_0^{v+1}. \quad (6.184)$$

Тоді замість системи рівнянь (6.181) - (6.183) отримуємо:

$$a_0^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (6.185)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_i(x), \quad (6.186)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (6.187)$$

де
$$\bar{q}_i(x) = \frac{v+1}{\lambda_0} q_i(x). \quad (6.188)$$

Далі зробимо підстановку

$$\theta = \bar{\theta} e^{-\mu x}, \quad \mu = \frac{V}{2a_0^2} \quad (6.189)$$

у рівняння (6.185):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{-\mu x} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} - \mu e^{-\mu x} \bar{\theta}, \quad (6.190)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = e^{-\mu x} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - 2\mu e^{-\mu x} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \mu^2 e^{-\mu x} \bar{\theta}, \quad (6.191)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = e^{-\mu x} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}. \quad (6.192)$$

Остаточно, отримуємо наступну задачу для функції $\bar{\theta}(x, z)$:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \mu^2 \bar{\theta} = 0, \quad (6.193)$$

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q}_n(x) e^{\mu x}, \quad (6.194)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow +\infty, \quad (6.195)$$

тобто отримаємо стандартну задачу Гельмгольца [65, 111, 122], розв'язок якої знаходиться відомим методом джерел [14, 19, 21, 102]:

$$\bar{\theta}(x, z) = \frac{\nu + 1}{2\pi\lambda_0} \int_{-b(I_1, l)}^{b(I_1, l)} K_0 \left[\frac{V}{2a_0^2} \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2} \right] q_n(\xi) d\xi, \quad (6.196)$$

де K_0 – циліндрова функція уявного аргументу нульового порядку другого роду [64, 116].

З врахуванням (6.57), (6.154) і (6.189) отримуємо наступний вираз для розподілу температури уздовж поверхні і по глибині розплаву, що утворюється на поверхні оптичного прямокутного елемента при дії на нього рухомого СЕП:

$$T(x, z) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{(\nu + 1) I_1 U_{i\delta} \sqrt{k_0(I_1, l)} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2}}}{2\pi^{\frac{3}{2}} \lambda_0 \operatorname{erf}(b(I_1, l) \sqrt{k_0(I_1, l)})} \times \right. \\ \left. \times \int_{-b(I_1, l)}^{b(I_1, l)} K_0 \left[\frac{V}{2a_0^2} \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2} \right] e^{-k_0(I_1, l) \xi^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.197)$$

Виключаючи режими глибоко оплавлення оброблюваних прямокутних елементів, тобто вважаючи $h \ll 2b$ (h – глибина оплавлення елемента), отримуємо наступне представлення функції $K_0(y)$ [116]:

$$k_0(y) \approx -\ln y = - \left[\ln \left(\frac{V}{2a_0^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left((x - \xi)^2 + z^2 \right) \right]. \quad (6.198)$$

Підставляючи (6.198) в (6.197) отримуємо наступний вираз для розподілу температури уздовж поверхні і по глибині розплаву невеликої товщини:

$$T(x, z) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{(\nu+1) I_{\bar{i}} U_{\bar{i}\delta} \sqrt{k_0(I_{\bar{i}}, l)} e^{-\frac{Vx}{2a_0^2}}}{2\pi^{\frac{3}{2}} \lambda_0 \operatorname{erf}\left(b(I_{\bar{i}}, l) \sqrt{k_0(I_{\bar{i}}, l)}\right)} \times \right. \\ \left. \times \int_{-b(I_{\bar{i}}, l)}^{b(I_{\bar{i}}, l)} \left[\ln\left(\frac{V}{2a_0^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left((x-\xi)^2 + z^2\right) \right] e^{-k_0(I_{\bar{i}}, l) \xi^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (6.199)$$

З отриманої формули (6.199) по координатній лінії початку утворення рідкої фази:

$$T^* = T(z, x) \Big|_{z=h} \quad (6.200)$$

визначається товщина оплавленого шару $h(x)$.

Розглянемо максимальну товщину оплавленого шару h_m і вплив на неї параметрів СЕП, оскільки це дозволить визначати допустимі діапазони їх зміни (відразу для всієї оброблюваної поверхні елемента), що не дозволяють в процесі поліровки даних елементів перевищувати гранично допустимі значення $h = h^*$, що приводять до зміни геометричної форми оброблюваних виробів і, зрештою, до їх відбракування.

Враховуючи (6.199) і (6.200), для величини h_m отримуємо наступний вираз:

$$T^* = T(0, z) \Big|_{z=h_m}, \quad (6.201)$$

де

$$\dot{O}(0, z) = \left\{ T_0^{\gamma+1} + \frac{(\gamma+1) I_{\bar{i}} U_{\bar{i}\delta} \sqrt{k_0(I_{\bar{i}}, l)}}{2\pi^{3/2} \lambda_0 \operatorname{erf}\left[b(I_{\bar{i}}, l) \sqrt{k_0(I_{\bar{i}}, l)}\right]} \times \right. \\ \left. \times \int_{b(I_{\bar{i}}, l)}^{-b(I_{\bar{i}}, l)} \left[\ln\left(\frac{V}{2a_0^2}\right) + \frac{1}{2} \ln(z^2 + \xi^2) \right] e^{-k_0(I_{\bar{i}}, l) \xi^2} d\xi \right\}^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (6.202)$$

6.4.3 Розрахунки впливу параметрів стрічкового електронного потоку на швидкість та глибину оплавлення елементів із оптичного скла, вибір граничних режимів поверхневого оплавлення, зіставлення їх з експериментальними даними

По отриманих формулах (6.57), (6.172), (6.179), (6.199) та (6.202) з використанням розроблених пакетів прикладних програм для оптичних стекол К-8 [29, 30, 59, 114], що широко використовуються на практиці, були проведені розрахунки розподілів температури уздовж поверхні і по глибині розплаву, законів руху розділу фаз, максимальної товщини оплавленого шару і впливу на них керованих параметрів СЕП (рис. 6.18-6.21).

Результати розрахунків для пластини при багатоцикловому русі.

В результаті проведених розрахунків (рис. 6.18-6.21) було встановлено, що температура розплаву незалежно від його глибини із збільшенням часу обробки пластини зростає і виходить на плато, тобто спостерігається квазістаціонарний режим оплавлення пластини ($dT/dt = 0$ при $t \geq 0,5 \dots 0,6$ с).

Показано, що температура по глибині розплаву (до 300 мкм) убиває: наприклад, для часу обробки пластини $t = 0,1 \dots 0,5$ с температура розплаву убиває в 1,1...1,2 рази, при цьому, результати розрахунки температури повністю відповідають експериментальним даним (відносна похибка не перевищує 8...10%). Що стосується оплавленого шару, то він на поверхні пластини формується протягом перших десятих доль секунди і далі істотно збільшується із зростанням часу обробки. Наприклад, при збільшенні t від 0,1 с до 0,6 с значення y зростають в 3 рази. При цьому швидкість оплавлення поверхні пластини із збільшенням часу її обробки спочатку різко зменшується (при збільшенні t від 0,01 с до 0,4 с значення dy/dt зменшуються в 6,5 рази), а потім цей процес істотно сповільнюється (при збільшенні t від 0,4 с до 0,6 с значення dy/dt зменшуються вже в 1,2 рази).

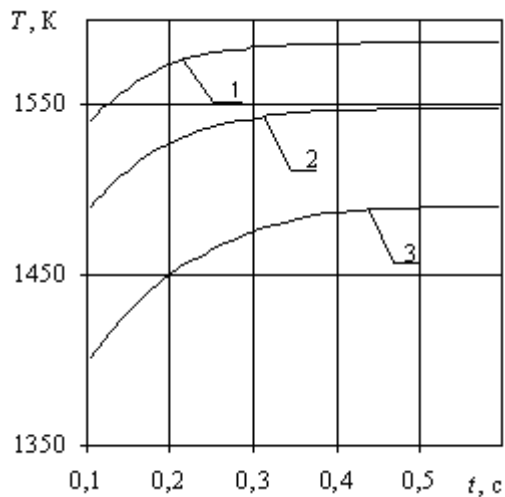


Рисунок 6.18 - Зміна температури розплаву на різних відстанях від поверхні пластини залежно від часу її обробки скануючим СЕП: 1 – $z = 50$ мкм; 2 – $z = 100$ мкм; 3 – $z = 300$ мкм

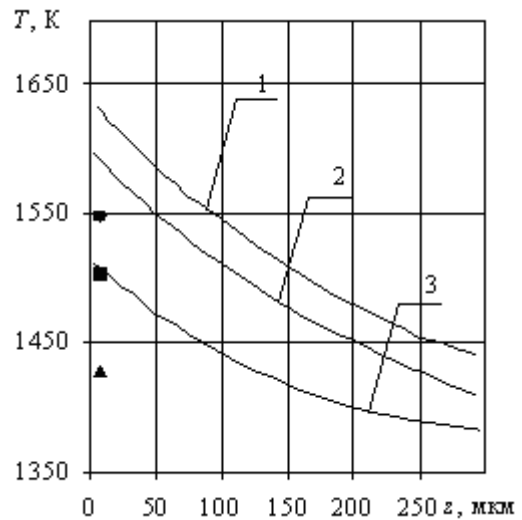


Рисунок 6.19 - Зміна температури по глибині розплаву для різного часу обробки пластини скануючим СЕП: 1 – $t = 0,5$ с; 2 – $t = 0,3$ с; 3 – $t = 0,1$ с; ●, ■, ▲ - експериментальні дані відповідно для кривих 1-3, отримані вказаним вище методом (див.рис. 6.7)

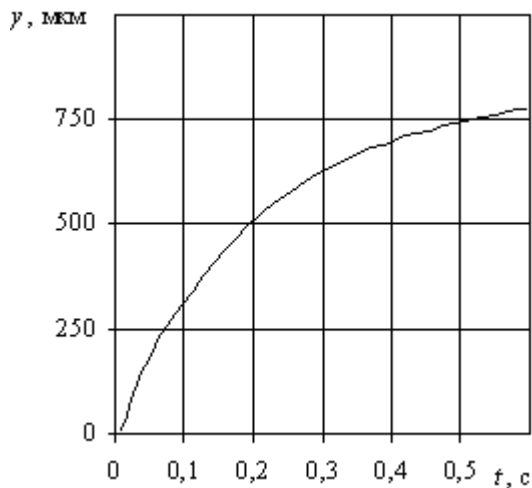


Рисунок 6.20 - Залежність товщини оплавленого шару від часу обробки пластини скануючим СЕП

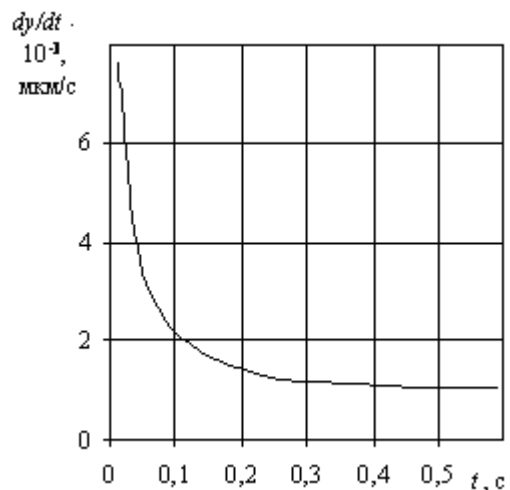


Рисунок 6.21 - Залежність швидкості оплавлення поверхні пластини від часу її обробки скануючим СЕП

$$(a_0^2 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \lambda_0 = 0,068 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}^{\gamma+1}, \gamma = 0,479, T^* = 1400 \text{ К}, \\ \rho = 2,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \lambda_n = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \beta = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^{1/2})$$

Таким чином, при багатоцикловій електронній обробці пластини (нестационарний режим) на її поверхні за лічені доли секунди ($t = 0,1 \dots 0,2$ с) утворюється розплавлений шар великої товщини (до 300...400 мкм), тобто при одночасному оплавленні відразу всієї оброблюваної поверхні пластини (при багатоцикловому русі СЕП створюється аналог рівномірної

розподіленої теплової дії уздовж всієї поверхні) допустимими є наступні діапазони зміни часу її електронної обробки: $t < 0,05 \dots 0,1$ с, оскільки в цьому випадку на поверхні пластини формується розплавлений шар завтовшки не більш 100...200 мкм, який не призводить до порушення площини поверхні пластини, утворенню напливів і так далі, і, зрештою, до порушення геометричної форми виробів і до їх відбракування.

Результати розрахунків для прямокутного елемента при одноцикловому русі СЕП. З представлених результатів розрахунків по розподілах температури уздовж поверхні і по глибині оброблюваного прямокутного елемента (рис. 6.22-6.26) витікає, що для різних точок поверхні температура із збільшенням глибини (уздовж осі OZ) зменшується, а у напрямі руху СЕП (уздовж осі OX) має максимум T_{max} , величина якого істотно залежить від параметрів СЕП.

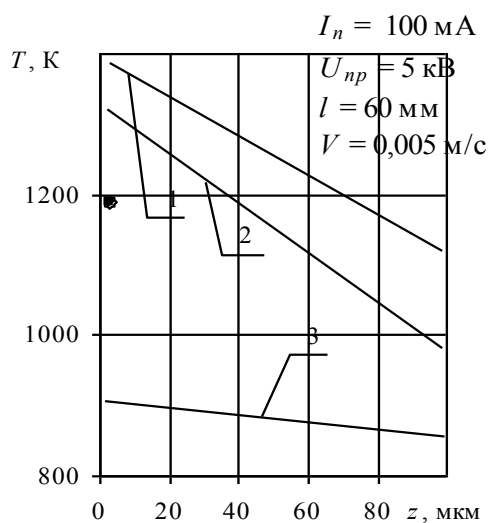


Рисунок 6.22 - Розподіл температури по глибині прямокутного елемента, що обробляється СЕП при його одноцикловому русі: 1 – $x = -100$ мкм; 2 – $x = 0$ мкм; 3 – $x = 100$ мкм; ● - експериментальні дані відповідно для кривої 2

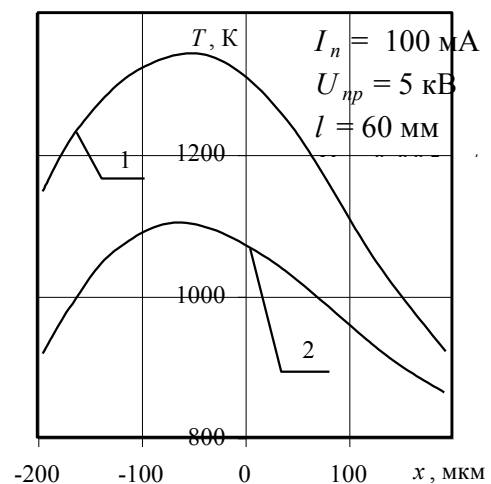


Рисунок 6.23 - Розподіл температури у напрямі руху СЕП уздовж оброблюваної поверхні прямокутного елемента: 1 – $z = 10$ мкм; 2 – $z = 100$ мкм

$$T_0 = 823 \text{ K}, a_0^2 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \gamma = 0,479, \lambda_0 = 0,068 \text{ Вт/м} \cdot \text{K}^{\gamma+1}$$

Наприклад, збільшення I_n від 50 мА до 300 мА і $V_{пр}$ від 4 кВ до 8 кВ призводить до збільшення T_{max} відповідно в 1,6 рази і 1,3 рази, а збільшення l від 60 мм до 80 мм і V від 0,002 м/с до 0,005 м/с приводить вже до зменшення

T_{max} відповідно в 1,1 рази і 1,2 рази. Температура зміщена від центру джерела теплової дії ($x=0$) убік, протилежну руху СЕП (на відстанях 50...80 мкм для досліджених діапазонів вимірювання параметрів СЕП).

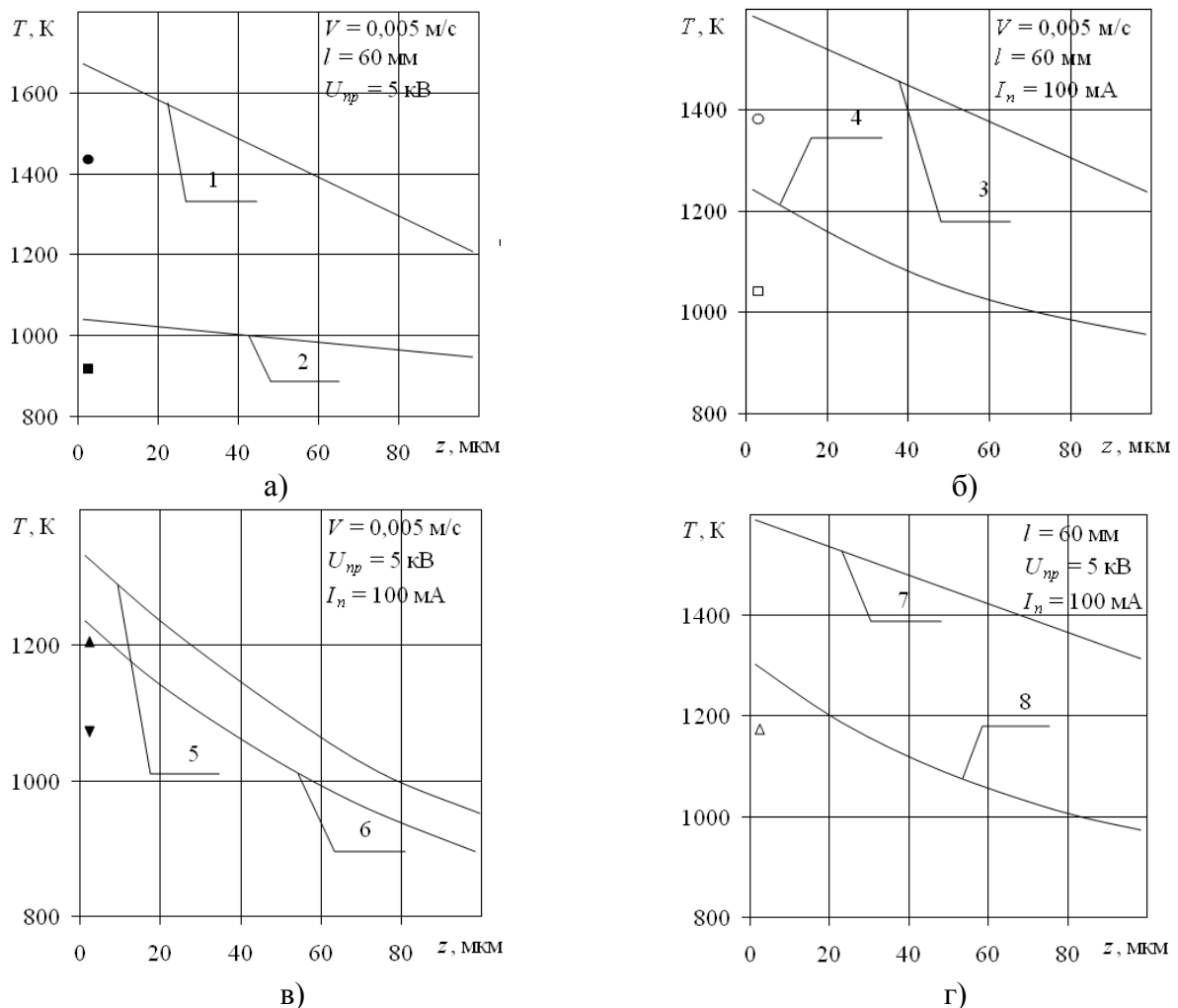


Рисунок 6.24 - Вплив параметрів СЕП на розподіл температури по глибині оброблюваного прямокутного елемента ($x=0$):

- а) вплив струму електронного потоку I_n (1 - $I_n = 300$ мА, 2 - $I_n = 50$ мА);
 - б) вплив прискорюючої напруги U_{np} (3 - $U_{np} = 8$ кВ, 4 - $U_{np} = 4$ кВ);
 - в) вплив відстані від оброблюваної поверхні l (5 - $l = 60$ мм; 6 - $l = 80$ мм);
 - г) вплив швидкості переміщення електронного потоку (7 - $V = 0,002$ м/с; 8 - $V = 0,005$ м/с;
- , ■, ▲, ▼, Δ- експериментальні дані відповідно для кривих 1-6,8.

Таким чином, при одноцикловій електронній обробці прямокутних елементів (квазістаціонарний режим оплавлення) розплавлений шар максимальної товщини утворюється зліва від центру рухомого СЕП ($x=0$) на відстанях порядку 50...80 мкм; при цьому відмінності між T_{max} і $T/x=0$ не перевищують 5...8%, що дозволяє в межах вказаної похибки визначати

величину h_m по координатній лінії початку утворення рідкої фази (див. (6.201)). Зіставлення результатів розрахунків по температурі в центрі СЕП з експериментальними даними, отриманими в даній роботі (див. рис. 6.22, 6.24, 6.25), показує, що відмінності між ними не перевищують 10...12%.

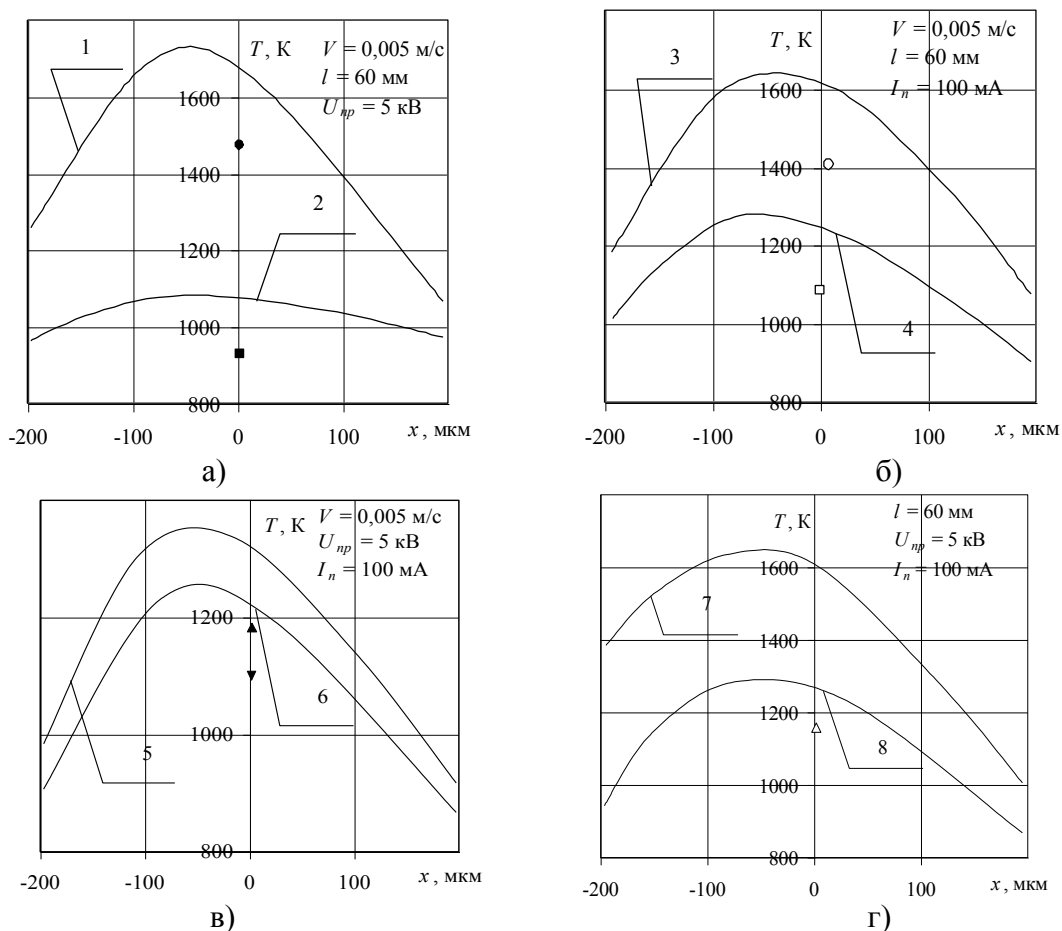
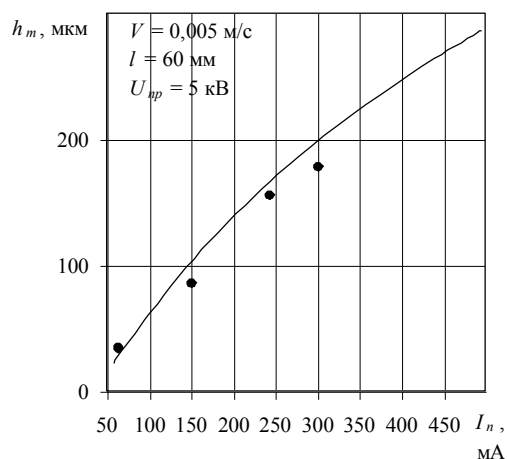
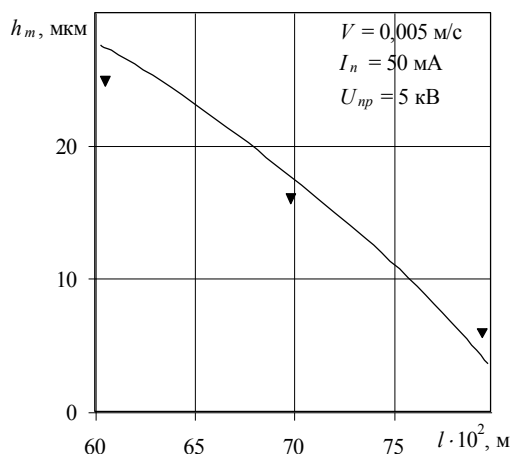


Рисунок 6.25 - Вплив параметрів СЕП на розподіл температури уздовж оброблюваної поверхні прямокутного елемента ($z=0$) (решта позначень аналогічна рис. 6.24)

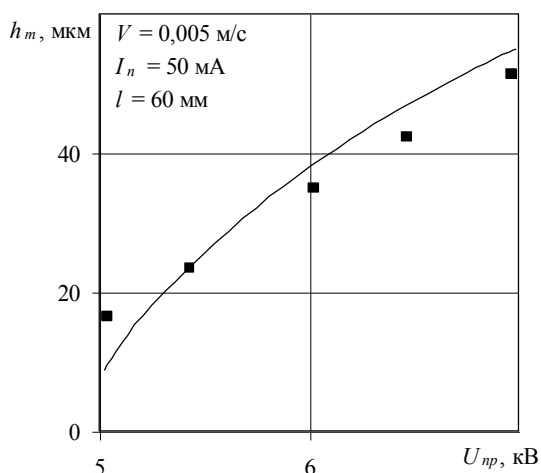
Аналіз результатів розрахунків залежностей $h_m = f(I_n, U_y, l, V)$ (рис. 6.27) показує, що на величину h_m найбільш сильний вплив чинять параметри I_n і V : так, при $I_n > 300...400$ мА та $V < 10^{-3}...2 \cdot 10^{-3}$ м/с значення h_m можуть вже значно перевершувати 100...200 мкм (у декілька разів).



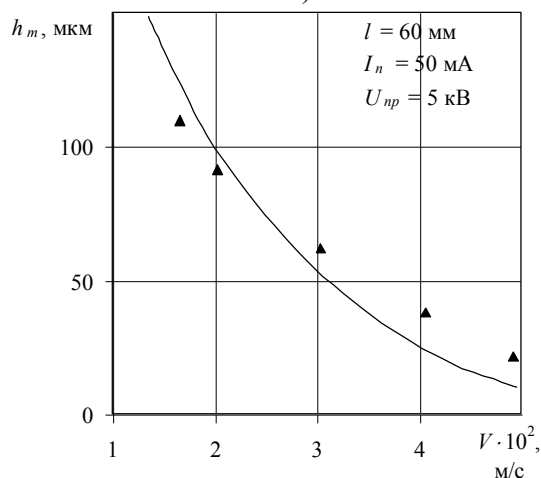
а)



б)



в)



г)

Рисунок 6.26 - Вплив параметрів СЕП на максимальну товщину оплавленого шару h_m , прямокутного елемента, що утворюється на поверхні, при його електронній обробці: а) вплив струму електронного потоку I_n ; б) вплив відстані від оброблюваної поверхні l ; в) вплив прискорюючої напруги U_{np} ; г) вплив швидкості переміщення електронного потоку V ; ●, ■, ▲, ▼ - експериментальні дані

Зіставлення результатів розрахунків залежностей h_m від параметрів СЕП з експериментальними даними показує, що відмінності між ними не перевищують 10...15%. Отримуємо, що при технологічних процесах поліровки прямокутних елементів рухомим СЕП повинні існувати їх гранично допустимі режими (сукупності критичних значень параметрів СЕП) не дотримання яких приводить до відбракування виробів. Так, зокрема, для оптичного скла К-8 допустимими режимами поліровки є наступні сукупності параметрів СЕП: $I_n < 300$ мА, $V > 10^{-3}$ м/с, $U_{np} = 4...8$ кВ, $l = 60...80$ мм.

Отримані результати розрахунків (як для пластини, так і для прямокутного елемента) повністю відповідають даним технологічних експериментів по відпрацюванню процесів фінішної поліровки виробів мікрооптики і наноелектроніки, інтегральної та волоконної оптики [29, 59, 114].

Контрольні питання та завдання:

1. В чому полягають загальні принципи моделювання процесів дії концентрованих потоків енергії на матеріали ?
2. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання тонкоплівкового оптичного елемента.
3. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання тонкої пластини великих розмірів.
4. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання прямокутного оптичного бруска великої товщини.
5. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання прямокутного оптичного бруска малої товщини.
6. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання прямокутного оптичного елемента великої товщини.
7. Сформулювати математичну модель процесу нагрівання прямокутного оптичного елемента малої товщини.
8. Обґрунтувати вибір граничних режимів нагрівання стрічковим електронним потоком в елементах із оптичного скла та кераміки.
9. Які явища погіршують якість обробки оптичних поверхонь ?
10. Сформулювати математичну модель виникнення термопружних напружень в оптичних елементах.
11. Які граничні режими поверхневого термічного зміцнення виробів із оптичної кераміки стрічковим електронним потоком ?

12. В чому полягає різниця між режимами глибокого проплавлення та поверхневого оплавлення оптичного скла при дії стрічкового електронного потоку ?
13. Сформулювати математичну модель процесу поверхневого оплавлення пластин із оптичного скла.
14. Сформулювати математичну модель процесу поверхневого оплавлення прямокутних виробів із оптичного скла.
15. Обґрунтувати вибір граничних режимів поверхневого оплавлення стрічковим електронним потоком виробів із оптичного скла.

**Розділ 7 МЕТОДИ РОЗРАХУНКІВ НАГРІВАННЯ ПОВЕРХНІ ВИРОБІВ
З ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ЇХНЬОМУ НАДЗВУКОВОМУ
ОБДУВАННІ ПОТОКОМ ПОВІТРЯ**

Використання обтічників (пластин, півсфер) з оптичної кераміки у виробках ІЧ-техніки бортових систем управління літальними апаратами [26, 31, 114] при надзвукових швидкостях потоку повітря до 5...6 М супроводжується нестійкостями в їх роботі і відмовами (рис.7.1).

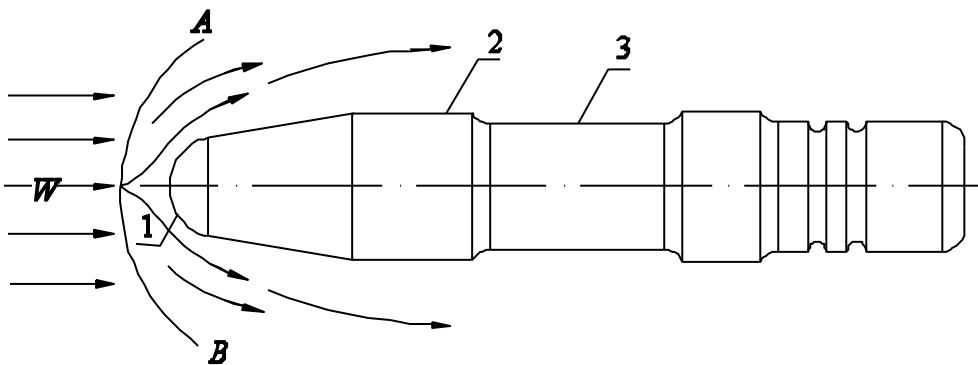


Рисунок 7.1 - Схема експлуатації виробів з ІЧ-системами: W – швидкість зустрічного потоку повітря; АВ - фронт ударної хвилі; 1, 2 - обтічники з оптичної кераміки, що захищають пристрої самонаведення; 3 - виріб

Причиною цього є нерівномірний короткочасне нагрівання обтічників в умовах інтенсивного надзвукового обдування, що приводить до виникнення значних термопружних напружень на їх поверхні, до появи тріщин, сколів та руйнування матеріалу.

З метою підвищення надійності виробів з ІЧ-системами самонаведення необхідно на фінішній стадії виготовлення обтічників сформувати в їх поверхні шари підвищеної термомеханічної міцності. Дослідження технологічних властивостей оптичних керамік (КО-2, КО-4, КО-12 та інших) показали прийнятність обробки стрічковими електронними потоками.

Для ефективного застосування електронного методу обробки необхідно знати найбільш небезпечні ділянки на поверхні обтічників, де залежно від параметрів їх експлуатації (швидкості і висоти польоту, складу

навколишнього середовища тощо) зароджуються мікродфекти, що приводять до руйнування виробів.

Теоретично їх можна визначити, розв'язавши термогазодинамічну задачу надзвукового обдування потоком повітря пластини і півсфери. Через розглянуті вище причини вказані термогазодинамічні задачі вирішуватимемо роздільно: *на першому етапі* для вирішення газодинамічних задач використовувався напівемпіричний підхід при знаходженні виразів для теплового потоку q_w з пограничного шару у виріб; *на другому етапі* вирішується задача нагрівання виробу при заданому зовнішньому тепловому потоці q_w .

7.1 Термогазодинамічні процеси на поверхні пластини при її надзвуковому обдуванні потоком повітря

Газодинамічну задачу розглядатимемо як квазістаціонарну, що справедливо для більшості практичних випадків, за винятком імпульсних режимів [2, 24, 40, 75, 78, 130] (рис.7.2).

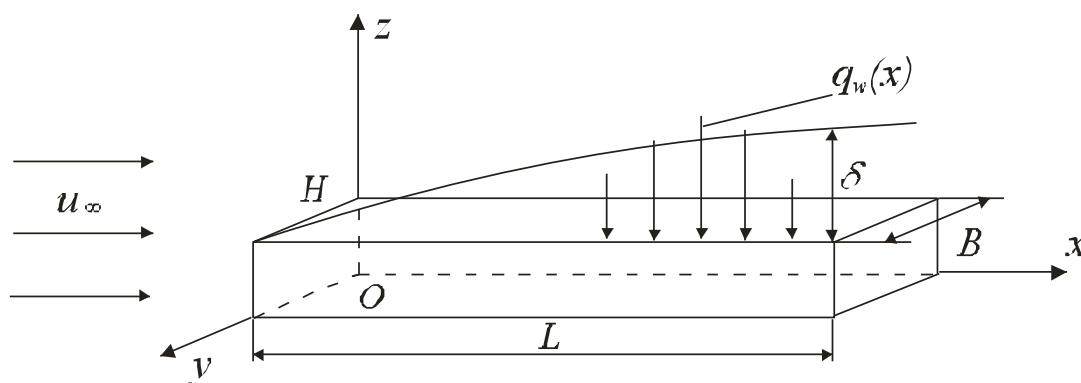


Рисунок 7.2 - Схема нагрівання оптичної пластини: L , B , H – довжина, ширина і товщина пластини відповідно; δ – товщина динамічного пограничного шару; $q_w(x)$ – розподілення теплового потоку з пограничного шару уздовж поверхні пластини; U – швидкість незбуреного газового потоку

Це обумовлено тим, що об'ємна теплоємність газового потоку (C_{Vr}) мала в порівнянні з об'ємною теплоємністю обтічної пластини ($C_{Vп}$), тобто $\frac{C_{V\bar{a}}}{C_{Vr}} \ll 1$. При цьому на практиці [70] використовуються пластини з оптичної кераміки (КО-2, КО-4, КО-12 та іншої), для яких виконуються умови $\delta \gg B$, $\delta \leq L$, $\delta \approx H$ [65, 80, 111, 122], що визначають вид геометричної моделі ($\delta = 2\sqrt{a^2 \tau}$ – глибина проникнення теплової хвилі; a^2 – коефіцієнт температуропровідності матеріалу пластини; τ – час теплової дії), тобто розподіл теплової дії уздовж осі y відсутній, а на нижній її стороні ($z = 0$) необхідно враховувати теплообмін з навколишнім середовищем.

На основі проведених експериментальних досліджень (подовжнє обдування потоком повітря, нульові кути атаки і ковзання, діапазон зміни швидкостей повітряного потоку $M = 2 \dots 6$, різні режими обтікання (ламінарний або турбулентний) для теплового потоку q_w з пограничного шару було отримано наступний емпіричний вираз (відносна похибка 5...8 %) [24, 40, 48, 76, 108]:

$$q_w(x) = \frac{f(Pr)}{\left(\frac{\rho_\delta u_\delta x}{\mu_\delta}\right)^{0.2}} \rho_\delta u_\delta C_p (T_r - T_w), \quad (7.1)$$

де $f(Pr)$ – задана функція числа Прандтля Pr , яка залежить від геометричної форми тіла і режиму обтікання $Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda_a}$; ρ , u , μ , C_p , λ_a – відповідно щільність, швидкість уздовж координати x , коефіцієнт динамічної в'язкості, теплоємність і коефіцієнт теплопровідності газового потоку; T_w – температура поверхні пластини; індекс “ δ ” означає, що значення параметру береться на межі динамічного пограничного шару; T_r – температура відновлення в пограничному шарі, що є температурою повітря в безпосередній близькості до поверхні тіла, яка визначається по наступній емпіричній формулі [2, 40, 75, 130]:

$$T_r = T_\delta (1 + 0,2\bar{r}M^2), \quad (7.2)$$

де \bar{r} – коефіцієнт відновлення, що характеризує частку кінетичної енергії зовнішнього потоку повітря, яка переходить в тепловий вміст при повному гальмуванні потоку (для ламінарного режиму обтікання зазвичай приймають $\bar{r} = 0,85$, а для турбулентного режиму – $\bar{r} = 0,88 \dots 0,90$).

Передбачається, що для зон, близьких до критичної точки справедлива рівність $u_\delta = \beta x$, де β – функція тільки числа M незбуреного потоку перед ударною хвилею (вказане співвідношення отримане шляхом вимірювання тиску і розрахунку швидкостей). Підстановка рівності $u_\delta = \beta x$ в (7.1) дає:

$$q_w(x) = f(Pr) \beta^{4/5} \mu_\delta x^{3/5} C_p (T_r - T_w). \quad (7.3)$$

Підставляючи в (7.3) відомі газодинамічні співвідношення [2, 75], отримуємо наступний вираз для теплового потоку у разі турбулентного режиму обтікання:

$$q_w(x, M) = \frac{0,001}{Pr^{0,6}} \left(\frac{\beta L}{u_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{v_\infty}{u_\infty L} \right)^{1/5} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty} \right)^{1/5} \rho_\infty u_\infty C_p (T_r - T_w) \left(\frac{x}{L} \right)^{3/5}, \quad (7.4)$$

де індекс “ ∞ ” означає, що значення параметра береться для незбуреного газового потоку.

Аналогічно, для ламінарного режиму обтікання пластини тепловий потік можна представити у вигляді:

$$q_w(x, M) = \frac{0,05}{Pr^{0,4}} \left(\frac{\beta L}{u_\infty} \right)^{1/2} \left(\frac{v_\infty}{u_\infty L} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty} \right)^{1/2} \rho_\infty u_\infty C_p (T_r - T_w), \quad (7.5)$$

Для подальшої деталізації формул (7.5) і (7.6) скористаємося відомими газодинамічними співвідношеннями [2, 75]:

$$\beta = \frac{u_\infty}{2L} \left(\frac{8(\gamma_\infty - 1)M^2 + 2}{(\gamma_\infty + 1)M^2} \left[1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} \frac{(\gamma_\infty - 1)M^2 + 2}{2\gamma_\infty M^2 - (\gamma_\infty - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_\infty - 1}} \right)^{0,5}, \quad (7.6)$$

де $\gamma_\infty = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ (повітря).

Співвідношення $\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty}$ та $\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty}$ визначаються розрахунком тиску по методу

Ньютона і адіабатичного розширення від критичної точки уздовж поверхні пластини (у напрямі x) [40, 75]:

$$\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} = 6,35 \left(1 - \frac{1}{7M^2}\right)^{-2,5} \left(1 + \frac{5}{M^2}\right)^{-1} \bar{P}^{2,5}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty} = 0,447M \left(1 + \frac{5}{M^2}\right)^{0,5} \frac{1 + \frac{S}{T_\infty}}{1 + \frac{S}{T_T}} \bar{P}^{3/14}, \quad (7.8)$$

де \bar{S} – постійна Сатерленда ($\bar{S} = 110,4$ К); \bar{P} – відношення тиску на зовнішній межі пограничного шару P_δ до тиску гальмування P_T ; T_T – температура гальмування. У роботі [40] отримана достатньо точна (відносна похибка 3...5%) формула для визначення розподілу тиску в напрямі x (для $M > 2...3$ та $x/L < 1,2...1,5$):

$$\bar{P} = \frac{P_\delta}{P_T} = 1 - (1,525 - 1,85 \bar{k}_0) \left(\frac{x}{L}\right)^2 + (0,487 - 1,323 \bar{k}_0) \left(\frac{x}{L}\right)^4, \quad (7.9)$$

де

$$\bar{k}_0 = \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty + 1} + \frac{2}{(\gamma_\infty + 1)M^2}. \quad (7.10)$$

Тиск в точці гальмування визначається за формулою [2]:

$$P_T = P_\infty M^2 \frac{\gamma_\infty - 1}{2} \left[\frac{(\gamma_\infty - 1)M^2}{4\gamma_\infty M^2 - 2(\gamma_\infty - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_\infty - 1}}. \quad (7.11)$$

Температура гальмування має вигляд [91]:

$$T_T = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} M^2\right). \quad (7.12)$$

По отриманих формулах (7.4) - (7.5) з використанням розробленого комплексу прикладних програм для персонального комп'ютера, що складається з 9 спеціалізованих пакетів програм (див. додатки 1 - 9), були проведені розрахунки розподілів теплового потоку з пограничного шару

уздовж поверхні пластини залежно від різних умов експлуатації виробів (рис.7.3 – 7.6).

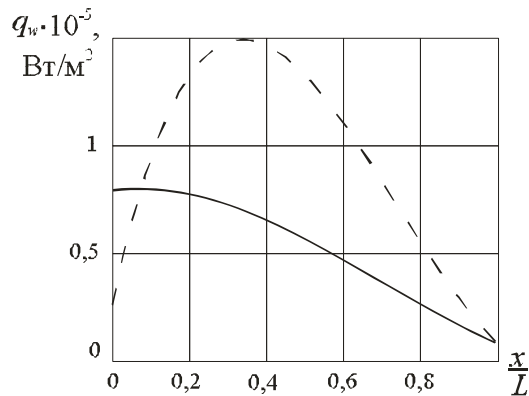


Рисунок 7.3 - Розподіл теплового потоку q_w уздовж поверхні пластини при надзвуковому обдуванні потоком повітря оптичного виробу ($T_\infty = 300$ К; $M = 3$)

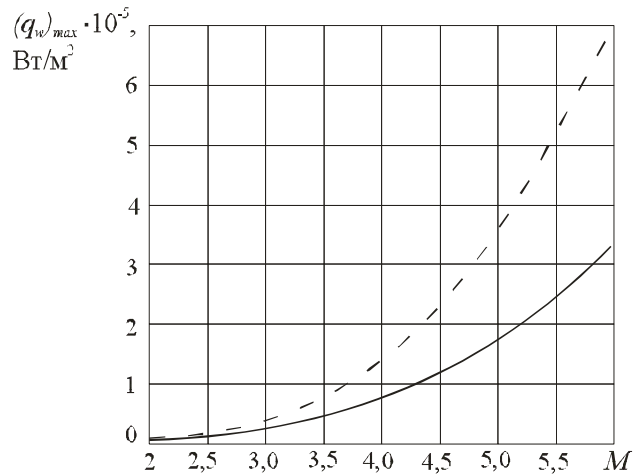


Рисунок 7.4 - Залежність максимальних значень теплового потоку $(q_w)_{max}$ від швидкості надзвукового обдування потоком повітря пластини ($T_\infty = 300$ К; $L = 0,1$ м)

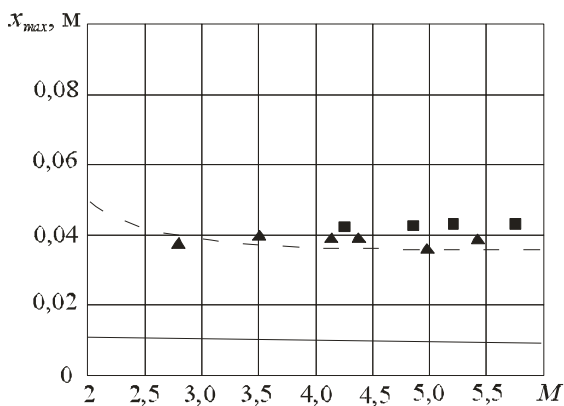


Рисунок 7.5 - Залежність місця розташування $(q_w)_{max}$ на поверхні пластини від швидкості надзвукового обдування потоком повітря оптичного виробу ($T_\infty = 300$ К; $L = 0,1$ м)

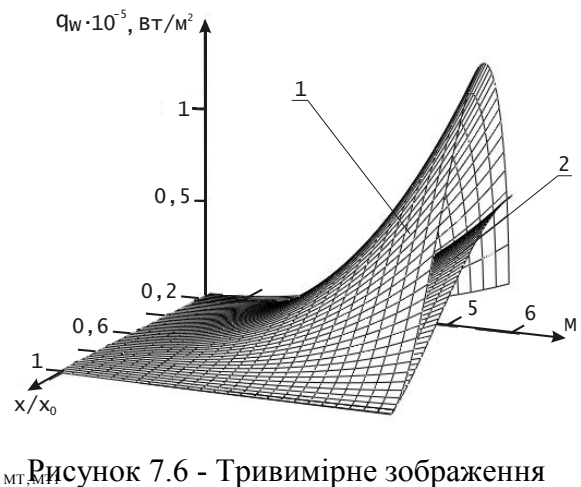


Рисунок 7.6 - Тривимірне зображення розподілу теплового потоку $q_w(x, M)$ на поверхні пластини, яку обтікає надзвуковий потік повітря ($T_\infty = 300$ К; $x_0 = 0,1$ м):

1 – турбулентний режим обтікання;
2 - ламінарний режим обтікання

----- турбулентний режим обтікання; ————— ламінарний режим обтікання
▲, ■ – результати лабораторних і натурних випробувань відповідно

За результатами розрахунків, представлених на рис.7.3-7.5, витікає, що місця розташування максимальних значень теплового потоку $(q_w)_{max}$ на поверхні пластини істотно залежать від режиму обтікання: для ламінарного режиму обтікання значення $(q_w)_{max}$ знаходяться поблизу передньої критичної точки ($x = 0$) пластини; для турбулентного режиму обтікання значення $(q_w)_{max}$ вже зміщуються від $x = 0$ до x_{max} .

При цьому із збільшенням швидкості обдування потоком повітря від $M = 2$ до $M = 6$ значення $(q_w)_{max}$ зростають від $0,5 \cdot 10^5$ Вт/м² до $7 \cdot 10^5$ Вт/м² (турбулентний режим обтікання) та від $0,2 \cdot 10^5$ Вт/м² до $3,5 \cdot 10^5$ Вт/м² (ламінарний режим обтікання).

Що стосується значень x_{max} , то для ламінарного режиму обтікання $x_{max} = 0$ незалежно від M . При турбулентному режимі обтікання x_{max} лежить в межах $(0,38 \dots 0,43) \cdot L$ (наприклад, для $L = 0,1$ м, $x_{max} = 0,038 \dots 0,043$ м), тобто істотно не змінюється, що відповідає отриманим експериментальним даним.

7.2 Процеси нагрівання пластини при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничного шару

Процес нагрівання пластини розглядатимемо на її поверхні, де тепловий потік $q_w = (q_w)_{max}$, тобто оцінимо зміну температури в зонах максимальних зовнішніх термічних дій, які відповідають за виникнення руйнуючих термопружних напружень в її матеріалі. Також передбачалося, що нижня сторона теплоізолювана, а тепловитратами за рахунок випромінювання і конвекції можна нехтувати. Рівняння теплопровідності, початкова і граничні умови для даного випадку мають вигляд [65, 80]:

$$C_V(T(z,t)) \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T(z,t)) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right), \quad 0 < z < H, t > 0, \quad (7.13)$$

$$T(z,t)|_{t=0} = T_0, \quad (7.14)$$

$$\lambda(T(z,t)) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=H} = (q_w)_{max}, \quad (7.15)$$

$$\lambda(T(z,t)) \left. \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (7.16)$$

де $T(z,t)$ – температура в різних точках z по товщині пластини в різні моменти часу t , K , T_0 - початкова температура пластини, K .

З урахуванням існуючих емпіричних залежностей (відносна погрішність 3...5 %) [23, 74, 120]:

$$C_V(T) = C_{V0} T^v; \quad \lambda(T) = \lambda_0 T^v \quad (7.17)$$

(C_{V0} , λ_0 , v – емпіричні константи, залежні від марки оптичної кераміки) і заміни змінних:

$$\theta(z,t) = T(z,t)^{v+1} - T_0^{v+1} \quad (7.18)$$

отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2}, \quad (7.19)$$

$$\theta(z,t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (7.20)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right|_{z=H} = (\bar{q}_w)_{max}, \quad (7.21)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (7.22)$$

де
$$(\bar{q}_w)_{max} = \frac{v+1}{\lambda_0} (q_w)_{max}, \quad a_0^2 = \frac{\lambda_0}{C_{V0}}. \quad (7.23)$$

Далі замість змінної $\theta(z,t)$ введемо нову змінну $\bar{q}(z,t)$, яка визначається співвідношенням:

$$\bar{q}(z,t) = \frac{\lambda_0}{v+1} \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}. \quad (7.24)$$

Продиференціюємо рівняння (7.19) по z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(a_0^2 \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} \right). \quad (7.25)$$

Отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right) = a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \right) \quad (7.26)$$

або

$$\frac{\partial \bar{q}(z,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{q}(z,t)}{\partial z^2}, \quad (7.27)$$

тобто отримали рівняння типу (7.19), де замість змінної $\theta(z,t)$ стоїть змінна $\bar{q}(z,t)$. Початкові та граничні умови для нової змінної $\bar{q}(z,t)$ мають вигляд:

$$\bar{q}(z,t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (7.28)$$

$$\bar{q}(z,t) \Big|_{z=H} = (\bar{q}_w)_{max}, \quad (7.29)$$

$$\bar{q}(z,t) \Big|_{z=0} = 0. \quad (7.30)$$

Таким чином, отримали завдання теплопровідності типу (7.19)-(7.26), але вже з граничними умовами I роду [11, 111, 122], для вирішення якої, на відміну від громіздких стандартних методів [14, 19, 65, 79, 81], використовуємо наступний підхід.

Представимо розв'язок шуканої задачі (7.28) - (7.30) у вигляді:

$$\bar{q}(z,t) = N(z) + M(z,t). \quad (7.31)$$

У виразі (7.31) функцію $N(z)$ підбираємо так, щоб функція $M(z,t)$ задовольняла рівнянню (7.27), а граничні умови (7.29)-(7.30) були однорідними. Неважко показати, що в цьому випадку:

$$N(z) = \frac{(\bar{q}_w)_{max} z}{H}, \quad (7.32)$$

а функція $M(z,t)$ знаходиться як розв'язок наступної задачі:

$$\frac{\partial M(z,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 M(z,t)}{\partial z^2}, \quad (7.33)$$

$$M(z,t) \Big|_{t=0} = \bar{N}(z), \quad (7.34)$$

$$M(z,t) \Big|_{z=H} = 0, \quad (7.35)$$

де
$$\bar{N}(z) = -N(z). \quad (7.36)$$

Розв'язок задачі (7.33) - (7.36) знаходимо відомим методом розділення змінних [65, 111, 122]:

$$M(z,t) = -\frac{2(\bar{q}_w)_{max}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{n} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t}. \quad (7.37)$$

З урахуванням (7.31) отримуємо:

$$\frac{\bar{q}(z,t)}{(\bar{q}_w)_{max}} = \frac{z}{H} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t}. \quad (7.38)$$

Функцію $\theta(z,t)$ знайдемо з формули (7.24)

$$\theta(z,t) = \frac{\nu+1}{\lambda_0} \int \bar{q}(z,t) dz + \varphi(t) + C, \quad (7.39)$$

де $\varphi(t)$ – деяка функція часу; C - деяка постійна.

Підставляючи розв'язок (7.38) в (7.39) і інтегруючи отриманий вираз, знаходимо:

$$\begin{aligned} \theta(z,t) &= \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} z^2}{2H\lambda_0} + \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} H}{\lambda_0} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{\pi^2 n^2} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t} + \varphi(t) + C, \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\text{або } \theta(z,t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max}}{\lambda_0} \left[\frac{z^2}{2H} + 2H \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{\pi^2 n^2} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t} \right] + \varphi(t) + C. \quad (7.41)$$

Щоб визначити $\varphi(t)$ та C , скористаємося наступним співвідношенням:

$$(q_w)_{max} = \frac{C_{V0} H}{\nu+1} \frac{d\bar{\theta}(t)}{dt}, \quad (7.42)$$

де $\bar{\theta}(t)$ – середнє значення функції $\theta(z,t)$ по товщині пластини, визначуване за формулою:

$$\bar{\theta}(t) = \frac{1}{H} \int_0^H \theta(z,t) dz. \quad (7.43)$$

Вираз (7.42) можна написати в інтегральній формі:

$$\bar{\theta}(t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} t}{C_{V_0} H}. \quad (7.44)$$

Знайдемо $\bar{\theta}(t)$ із співвідношення (7.41) з урахуванням (7.43):

$$\bar{\theta}(t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} H}{6\lambda_0} + \varphi(t) + C. \quad (7.45)$$

Порівнюючи (7.44) та (7.45), знаходимо:

$$\varphi(t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} t}{C_{V_0} H}, \quad C = -\frac{(\nu+1)(q_w)_{max} H}{6\lambda_0}. \quad (7.46)$$

Підставляючи (7.46) в (7.41), отримуємо:

$$\theta(z,t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max}}{\lambda_0} \left[\frac{z^2}{2H} + 2H \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{\pi^2 n^2} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t} \right] + \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} t}{C_{V_0} H} - \frac{(\nu+1)(q_w)_{max} H}{6\lambda_0} \quad (7.47)$$

або

$$\theta(z,t) = \frac{(\nu+1)(q_w)_{max}}{\lambda_0} \left[\frac{z^2}{2H} + 2H \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{\pi^2 n^2} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t} + \frac{\lambda_0 t}{C_{V_0} H} - \frac{H}{6} \right] \quad (7.48)$$

З урахуванням (7.18), остаточно, отримуємо наступний розв'язок даної теплової задачі:

$$T(z,t) = \left\{ T_0^{\nu+1} + \frac{(\nu+1)(q_w)_{max}}{\lambda_0} \left[\frac{a_0^2 t}{H} + \frac{3z^2 - H^2}{6H} + \frac{2H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi n z}{H}\right)}{n^2} e^{-\left(\frac{\pi n a_0}{H}\right)^2 t} \right] \right\}^{\frac{1}{\nu+1}}. \quad (7.49)$$

Для проведення розрахунків за формулами (7.49) з урахуванням (7.4) та (7.5) було використано вказано вище програмне забезпечення. Результати

розрахунків для оптичної кераміки КО-2 ($a_0^2 = 3,36 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $C_{V0} = 12,35 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{К}^{\nu+1}$, $\lambda_0 = 41,46 \text{ Вт}/\text{м} \cdot \text{К}^{\nu+1}$, $\nu = -0,143$) при різних швидкостях обдування потоком повітря, режимів обтікання, часу теплової дії і різних відстанях по товщині пластини представлені на рис.7.7 – 7.12.

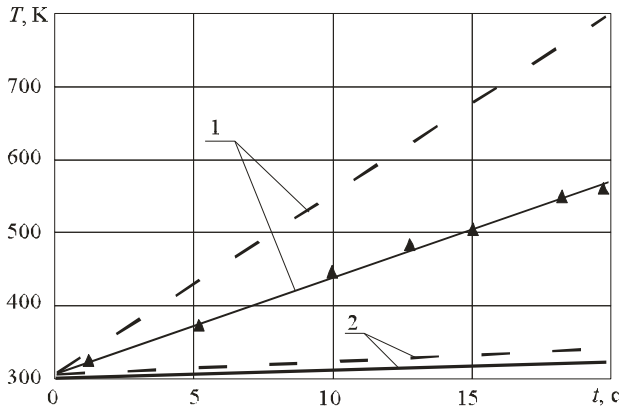


Рисунок 7.7 - Залежність температури поверхні пластини від часу теплової дії надзвукового потоку повітря ($T_0 = 300 \text{ К}$; $H = 0,012 \text{ м}$): 1 – $M = 3$; 2 – $M = 1,5$

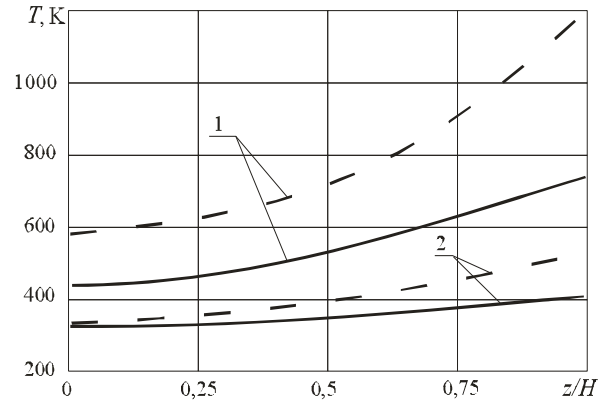


Рисунок 7.8 - Розподіл температури по товщині пластини, що обдувається надзвуковим потоком повітря ($T_0 = 300 \text{ К}$; $H = 0,012 \text{ м}$; $t = \text{с}$): 1 – $M = 3$; 2 – $M = 1,5$

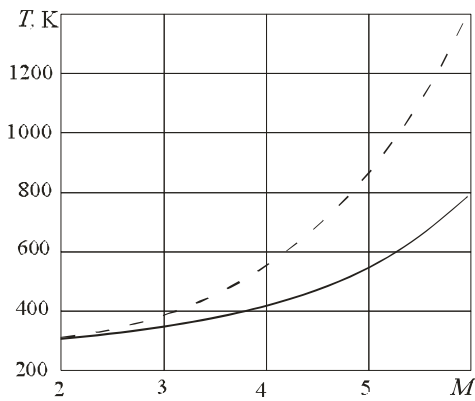


Рисунок 7.9 - Залежність температури поверхні пластини від швидкості надзвукового обдування потоком повітря ($T_0 = 300 \text{ К}$; $z = H$; $H = 0,012 \text{ м}$; $t = 3 \text{ с}$)

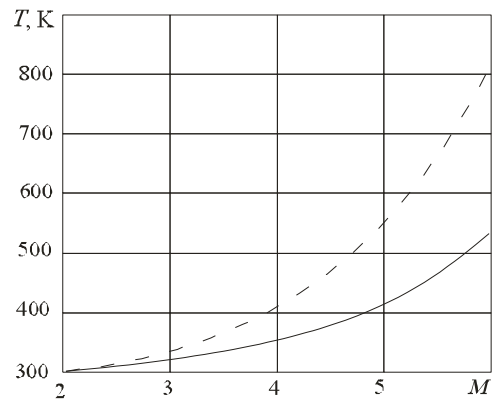
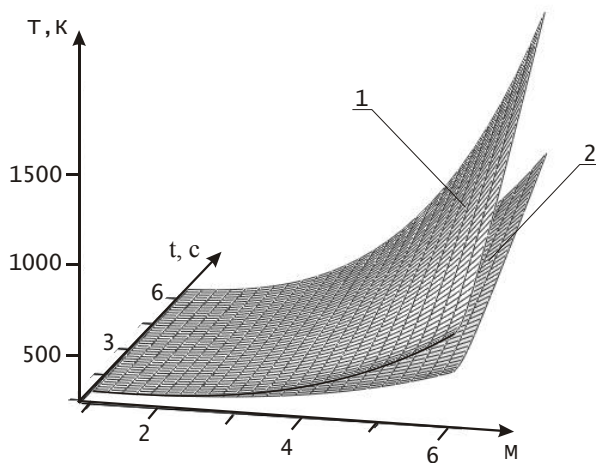


Рисунок 7.10 - Залежність температури нижньої сторони пластини від швидкості надзвукового обдування потоком повітря ($T_0 = 300 \text{ К}$; $z = 0$; $H = 0,012 \text{ м}$; $t = 3 \text{ с}$)

----- турбулентний режим обтікання;

————— – ламінарний режим обтікання;

▲ – експериментальні дані (ламінарний режим, передня критична точка ($x = 0$)) [2]



^{тг, тт1} Рисунок 7.11 - Тривимірне зображення залежності $T(M, t)$ на поверхні пластини, яка обтікає надзвуковим потоком повітря ($T_0 = 300 \text{ K}$; $z = H$; $H = 0,012 \text{ м}$, $t = 6 \text{ с}$)

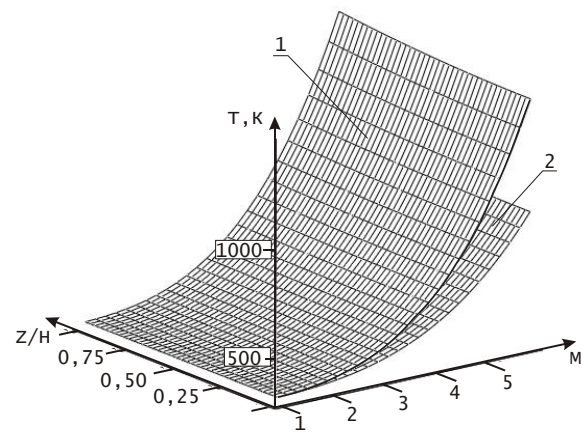


Рисунок 7.12 - Тривимірне зображення залежності $T(M, Z/H)$ по товщині пластини, яка обтікає надзвуковим потоком повітря ($T_0 = 300 \text{ K}$; $H = 0,012 \text{ м}$, $t = 5 \text{ с}$)

1 – турбулентний режим обтікання; 2 - ламінарний режим обтікання

З результатів розрахунків, представлених на рис.7.7–7.12, витікає, що температура в зонах максимальної зовнішньої термічної дії істотно залежить від швидкості обдування потоком повітря і режиму обтікання: наприклад, для часу зовнішньої теплової дії $t = 5 \dots 10 \text{ с}$ при збільшенні швидкості обдування від $M = 2$ до $M = 6$ значень температури на поверхні пластини зростають в $2 \dots 3$ рази для ламінарного режиму обтікання і в $4 \dots 5$ разів – для турбулентного режиму обтікання; при цьому для нижньої сторони пластини вказані збільшення температури знижуються відповідно для ламінарного режиму обтікання до $1,5 \dots 2,0$ рази, а для турбулентного режиму обтікання - до $2,3 \dots 3,0$ рази. Крім того, збільшення часу зовнішньої теплової дії призводить в усіх випадках тільки до зростання температури в будь-якій точці по товщині пластини. Таким чином, температура в зонах максимальної зовнішньої теплової дії на поверхні пластини (аналогічно і для її нижньої сторони) у разі турбулентного режиму її обтікання значно перевищує температуру в цих зонах для випадку ламінарного режиму (наприклад, для $M = 5 \dots 6$ в $1,5 \dots 2,0$ рази).

7.3 Розрахунки термопружних напружень та визначення критичних умов екстремальних термічних дій на поверхню пластини

Виникнення термопружних напружень в даному випадку пов'язане з градієнтом температури по товщині (уповдовж z) пластини (див.рис.7.2). Компоненти деформації в такій пластині, розташованій в площині xu можуть бути визначені на основі припущень, що має місце плоский напружений стан, і, що плоскі перетини, перпендикулярні до поверхні пластини, що нагрівається залишаються такими ж в процесі нагрівання.

В цьому випадку напруження $\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=\sigma_{zy}=\sigma_{zz}=0$, а $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma(z,t)$. Використовуючи відоме рівняння сумісності [15, 61] і припускаючи рівність нулю сили і її моменту на поверхні пластини товщиною H , отримуємо [36]:

$$\sigma(z,t) = \frac{\alpha_v E(T)}{1-\bar{\nu}} \left[-T(z,t) + \frac{2}{H^2}(2H-3z) \times \int_0^H T(z,t) dz + \frac{6}{H^3}(H-2z) \int_0^H T(z,t) dz \right], \quad (7.50)$$

де $\alpha_v(T)$ – температурний коефіцієнт розширення (K^{-1}); $E(T)$ – модуль Юнга (H/M^2); $\bar{\nu}$ – коефіцієнт Пуассона; $T(z,t)$ – температурний профіль.

За формулою (7.50) з урахуванням (7.4), (7.5), (7.49) і за допомогою вказаного вище програмного забезпечення були проведені розрахунки розподілу $\sigma(z,t)$ у даних зонах на поверхні пластини з оптичної кераміки КО-2 ($\alpha_v = 8,94 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $E = 3,41 \cdot 10^9 H/M^2$ (при $T_0 = 300 K$), $\bar{\nu} = 0,25$ [115]) залежно від швидкості обдування потоком повітря, різних режимів обтікання і часу теплової дії (рис.7.13–7.24).

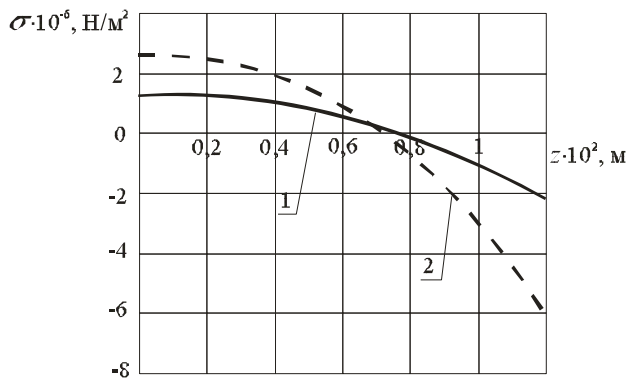


Рисунок 7.13 - Розподіл термопружних напружень по товщині пластини в зоні максимальної зовнішньої термічної дії для ламінарного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

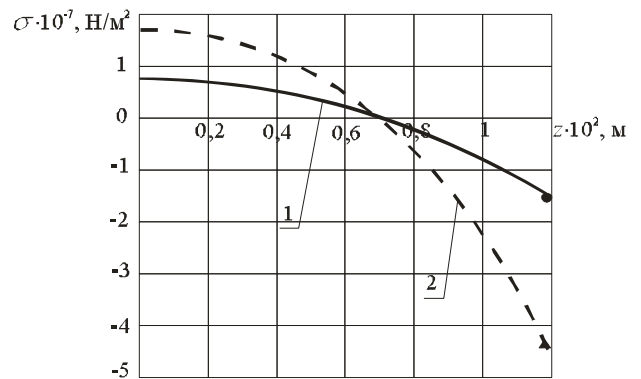


Рисунок 7.14 - Розподіл термопружних напружень по товщині пластини в зоні максимальної зовнішньої термічної дії для турбулентного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

розрахункові криві для режимів: 1 – $M = 3,5$; 2 – $M = 4,0$

●, ▲ – результати експериментальних досліджень, відповідно, для $M = 3,5$ та $M = 4,0$.

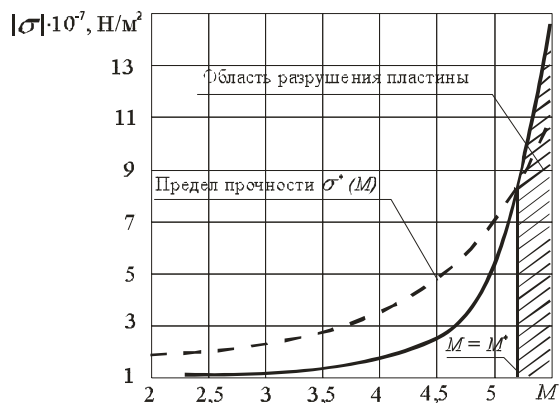


Рисунок 7.15 - Залежність модуля термопружної напруги $|\sigma|$ у зоні максимальної термовоздействия на поверхні пластини від M для ламінарного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

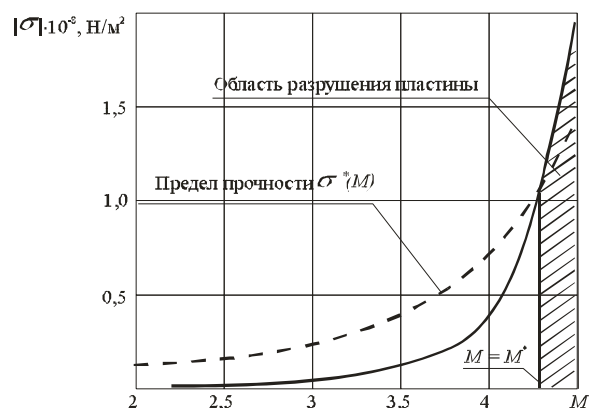


Рисунок 7.16 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ у зоні максимальної термічної дії на поверхні пластини від M для турбулентного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

————— – розрахункова крива;

----- – межа міцності σ^* оптичної кераміки КО-2, отримана експериментально по методу центрального кільцевого вигину ($\sigma^* = 6,9 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^3 \cdot T + 31,2 \cdot T^2$, відносна похибка 3...5% [115]).

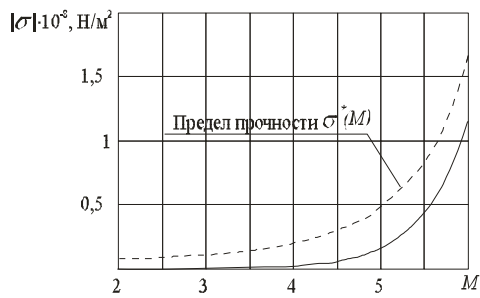


Рисунок 7.17 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ у зоні максимальної термічної дії на нижній стороні пластини від M для ламінарного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

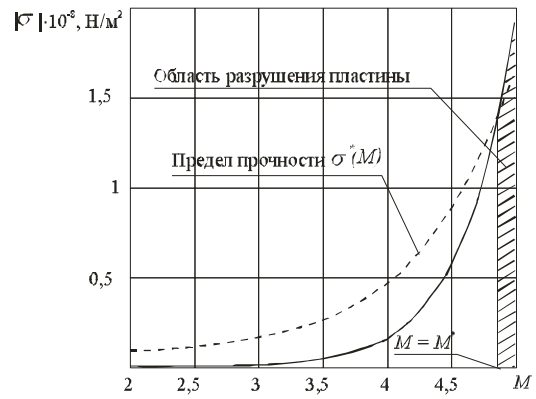


Рисунок 7.18 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ у зоні максимальної термічної дії на нижній стороні пластини від M для турбулентного режиму обтікання ($t = 15$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К)

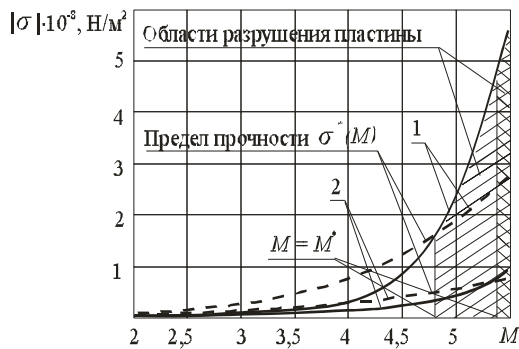


Рисунок 7.19 - Залежність $|\sigma(M)|$ від часу зовнішньої термічної дії для ламінарного режиму обтікання поверхні пластини:
1 – $t = 30$ с; 2 – $t = 15$ с

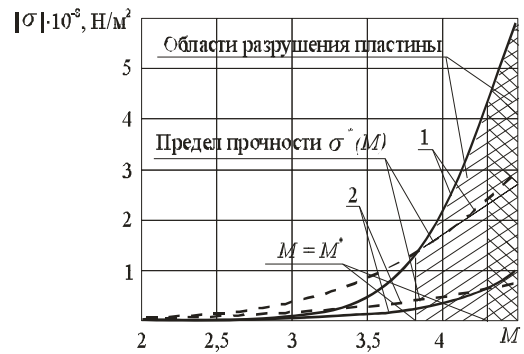


Рисунок 7.20 - Залежність $|\sigma(M)|$ від часу зовнішньої термічної дії для турбулентного режиму обтікання поверхні пластини: 1 – $t = 30$ с; 2 – $t = 15$ с

————— — розрахункова крива;

----- — межа міцності σ^* оптичної кераміки КО-2, отримана експериментально по методу центрального кільцевого вигину ($\sigma^* = 6,9 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^3 \cdot T + 31,2 \cdot T^2$, відносна похибка 3...5% [115]).

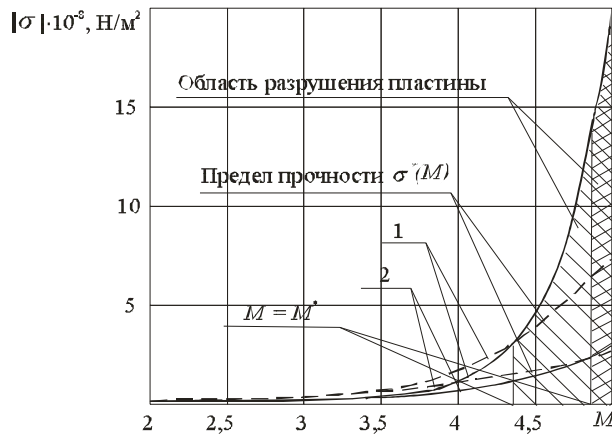


Рисунок 7.21 - Залежність $|\sigma(M)|$ від часу зовнішньої термічної дії для турбулентного режиму обтікання поверхні пластини: нижня сторона пластини: 1 – $t = 30$ с; 2 – $t = 15$ с
 ————— розрахункова крива;
 - - - - - межа міцності σ^* оптичної кераміки КО-2, отримана експериментально по методу центрального кільцевого вигину

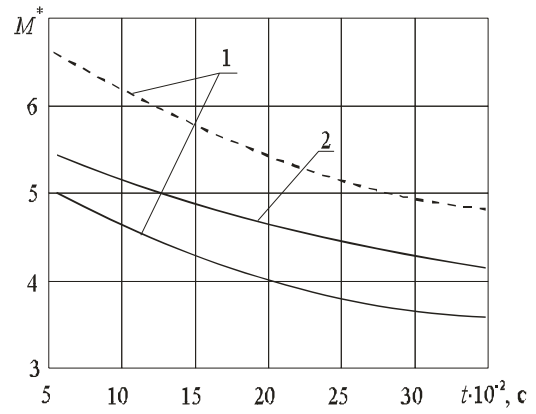


Рисунок 7.22 - Залежність критичних значень M^* від часу зовнішньої термічної дії на поверхню оптичної пластини ($T_0 = 300$ К; $H = 0,01$ м):
 1 – поверхня пластини ($z = H$);
 2 – нижня сторона пластини ($x = 0$);
 ————— турбулентний режим обтікання;
 - - - - -

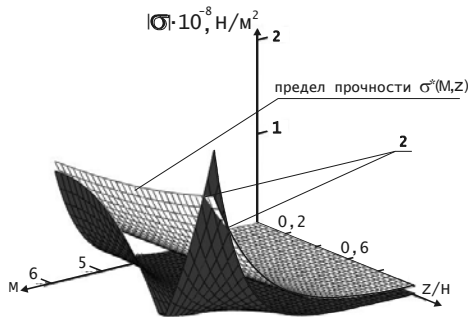


Рисунок 7.23 - Тривимірне зображення функції $|\sigma| = f(M, z)$ для ламінарного режиму обтікання ($t = 20$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К): 1 – область руйнування на поверхні оптичної пластини

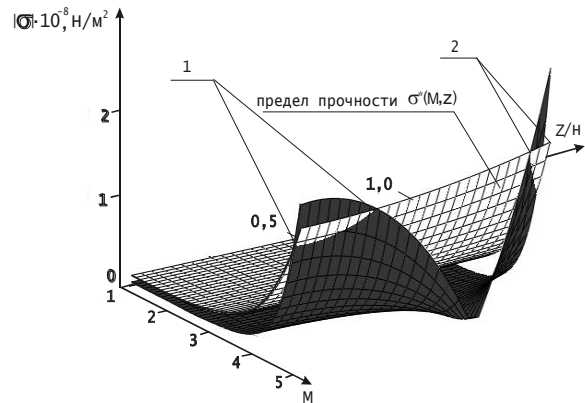


Рисунок 7.24 - Тривимірне зображення функції $|\sigma| = f(M, z)$ для турбулентного режиму обтікання ($t = 20$ с; $H = 0,01$ м; $T_0 = 300$ К): 1, 2 – область руйнувань на нижній стороні та на поверхні пластини

Аналіз результатів розрахунків, представлених на рис.7.13–7.24, показує, що для даних матеріалів пластини (оптична кераміка КО-2), часу зовнішньої теплової дії, швидкостей обдування потоком повітря і режимів обтікання (ламінарного, турбулентного) термопружні напруження в зонах

максимальних зовнішніх термічних дій розподілені по товщині пластини таким чином: на поверхні пластини ($z = H$) і в її приповерхневих шарах має місце стискуєче напруження ($\sigma < 0$, $|\sigma|$ досягає значень $1,5 \cdot 10^8 \dots 2 \cdot 10^8$ Н/м²), а на нижній стороні пластини ($z = 0$) і в її прилеглих шарах - розтягуючі напруження ($\sigma > 0$ та досягає значень $0,5 \cdot 10^6 \dots 2 \cdot 10^7$ Н/м²); при цьому, для турбулентного режиму обтікання $|\sigma|$ перевищує його значення для ламінарного режиму обтікання більше, ніж на порядок. При збільшенні швидкості обдування потоком повітря від $M = 2,0$ до $M = 6,0$ величина $|\sigma|$ зростає як для ламінарного, так і турбулентного режимів обтікання до значення $\sigma^* = |\sigma(M^*)|$ (σ^* – граничне значення термопружних напружень, при якому настає руйнування матеріалу пластини; M^* – значення швидкості обдування потоком повітря, при якій величина $|\sigma|$ стає рівною σ^*). При цьому, величина M^* істотно залежить як від режиму обтікання пластини, так і від часу зовнішньої теплової дії t : наприклад, при збільшенні t від 20 с до 10^3 с значення M^* зменшуються від 5,21 до 3,42 (поверхня пластини, ламінарний режим обтікання), від 6,12 до 4,63 (нижня сторона пластини, ламінарний режим обтікання), від 4,31 до 2,25 (поверхня пластини, турбулентний режим обтікання), від 4,92 до 2,86 (нижня сторона пластини, турбулентний режим обтікання). Таким чином, в зонах максимальних зовнішніх термічних дій на поверхні пластини для різних режимів обтікання (ламінарний, турбулентний) і часу термічної дії при збільшенні швидкості обдування потоком повітря ($M > 2$) руйнування матеріалу пластини спостерігається як в приповерхневих шарах пластини, так і в шарах, прилеглих до її нижньої сторони.

7.4 Термогазодинамічні процеси на поверхні напівсферичного обтічника при його надзвуковому обдуванні потоком повітря

Також як і у разі пластини, газодинамічну задачу розглядатимемо в квазістаціонарній постановці (рис.7.25).

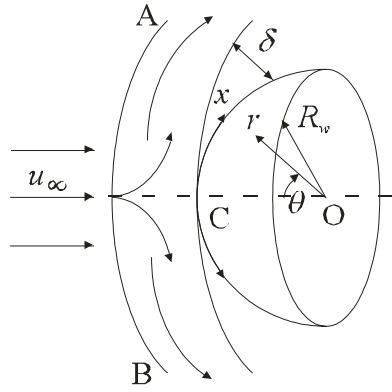


Рисунок 7.25 - Схема нагріву півсферичного обтічника: АВ – фронт ударної хвилі; С – передня критична точка; R_w – радіус обтічника; x – напрям уздовж поверхні обтічника; r , θ – сферичні координати

В результаті проведених експериментальних досліджень (зустрічне обдування потоком повітря, нульові кути атаки і ковзання, швидкість повітряного потоку $M=2\dots 6$, ламінарний або турбулентні режими обтікання) для теплового потоку q_w з пограничного шару на поверхню обтічника була знайдена емпірична формула, аналогічна виразу (7.3) [24, 40, 48, 76, 108].

Підставляючи в цей вираз необхідні газодинамічні співвідношення, отримаємо наступний вираз для теплового потоку у разі турбулентного режиму обтікання:

$$q_w(r, M) = \frac{0,00042}{Pr^{2/3}} \left(\frac{\beta R_w}{u_\infty} \right)^{0,8} \left(\frac{v_\infty}{u_\infty R_w} \right)^{0,2} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} \right)^{0,8} \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty} \right)^{0,2} \times \rho_\infty u_\infty C_p (T_r - T_w) (\sin \theta)^{0,6}. \quad (7.51)$$

Аналогічно, для ламінарного режиму обтікання півсфери тепловий потік можна представити у вигляді:

$$q_w(r, M) = \frac{0,0083}{Pr^{0,6}} \left(\frac{\beta R_w}{u_\infty} \right)^{0,5} \left(\frac{v_\infty}{u_\infty \cdot R_w} \right)^{0,5} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} \right)^{0,5} \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty} \right)^{0,5} \rho_\infty u_\infty C_p (T_r - T_w). \quad (7.52)$$

У формулах (7.51) та (7.52) вираз для β має вигляд [2, 75]:

$$\beta = \frac{u_\infty}{2R_w} \left(\frac{8(\gamma_\infty - 1)M^2 + 2}{(\gamma_\infty + 1)M^2} \left[1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} \frac{(\gamma_\infty - 1)M^2 + 2}{2\gamma_\infty M^2 - (\gamma_\infty - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_\infty - 1}} \right)^{0,5}. \quad (7.53)$$

Відношення $\frac{\rho_\delta}{\rho_\infty}$ та $\frac{\mu_\delta}{\mu_\infty}$ знаходяться за формулами (7.7)-(7.8),

а вираз для \bar{P} – за формулою [40]:

$$\bar{P} = 1 - (1,525 - 1,85 \bar{k}_0) (\sin \theta)^2 + (0,487 - 1,323 \bar{k}_0) (\sin \theta)^4, \quad (7.54)$$

де \bar{k}_0 має вигляд (7.10).

По отриманим формулам (7.51)-(7.52) за допомогою розробленого програмного забезпечення були проведені розрахунки розподілів теплового потоку з пограничного шару q_w уздовж поверхні обтічника залежно від різних умов експлуатації виробів (рис.7.26–7.29).

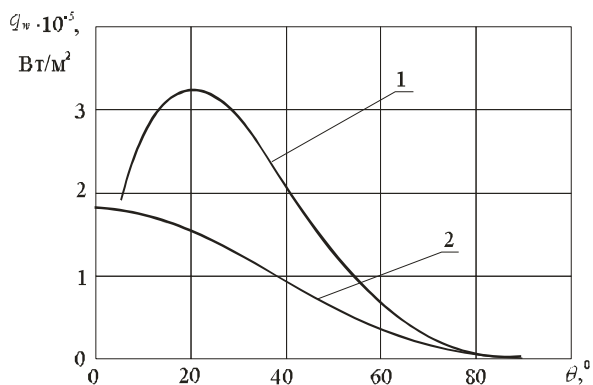


Рисунок 7.26 - Розподіл теплового потоку q_w уздовж поверхні обтічника при його надзвуковому обдуванні потоком повітря ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$; $M = 6$)

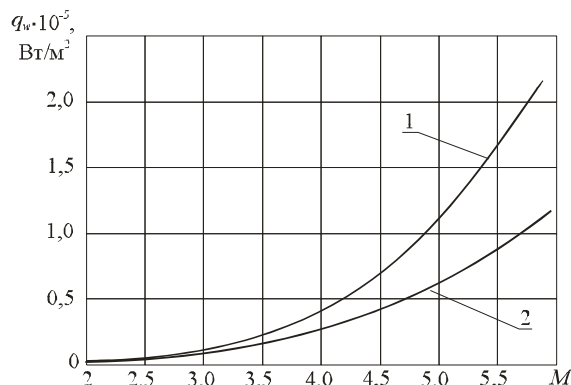


Рисунок 7.27 - Залежність максимальних значень теплового потоку $(q_w)_{max}$ від швидкості надзвукового обдування потоком повітря обтічника ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$)

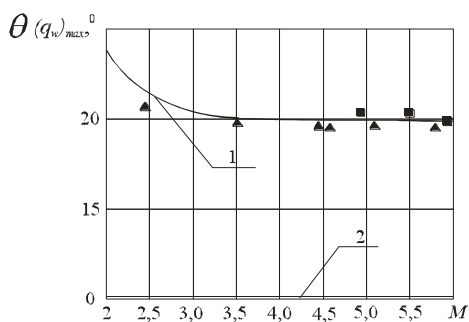


Рисунок 7.28 - Залежність $\theta_{max}(M)$ для різних надзвукових режимів обтікання ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$).

▲, ■ – результати лабораторних і натурних випробувань, відповідно.

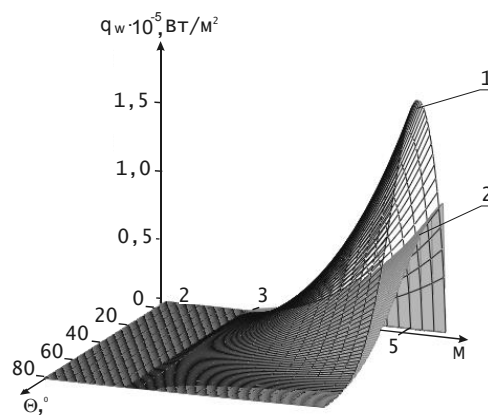


Рисунок 7.29 - Тривимірне зображення розподілу теплового потоку $q_w(\theta, M)$ на поверхні півсфери, обтічної надзвуковим потоком повітря ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$).

1 – турбулентний режим обтікання;
2 - ламінарний режим обтікання.

За результатами розрахунків, представлених на рис.7.26-7.29, витікає, що місця розташування максимальних значень теплового потоку $(q_w)_{max}$ на

поверхні обтічника істотно залежать від режиму обтікання: для ламінарного режиму обтікання, значення $(q_w)_{max}$ знаходяться поблизу передньої критичної крапки ($\theta = 0^0$) обтічника; для турбулентного режиму обтікання, значення $(q_w)_{max}$ зміщуються від $\theta = 0^0$ до θ_{max} .

При цьому із збільшенням швидкості обдування потоком повітря від $M = 2$ до $M = 6$, значення $(q_w)_{max}$ зростають від $0,3 \cdot 10^5$ Вт/м² до $2,3 \cdot 10^5$ Вт/м² (турбулентний режим обтікання) та від $0,2 \cdot 10^5$ Вт/м² до $1,3 \cdot 10^5$ Вт/м² (ламінарний режим обтікання). Що стосується значень θ_{max} , то для ламінарного режиму обтікання $\theta_{max} = 0$ незалежно від M . При турбулентному режимі обтікання для дослідженого діапазону зміни $M = 2 \dots 6$ значення θ_{max} лежать в межах $20 \dots 23^0$, тобто практично не змінюються, що повністю відповідає отриманим експериментальним даним.

7.5 Математичне моделювання нагрівання напівсферичного обтічника при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничного шару

Рівняння математичної моделі нагрівання півсферичного обтічника в областях, де тепловий потік q_w з пограничного шару досягає максимальних значень $(q_w)_{max}$, мають наступний вигляд [11, 81, 85, 128]:

$$\frac{\partial \bar{T}(r,t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}(r,t)}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R_w, \quad t > 0 \quad (7.55)$$

$$\bar{T} \Big|_{t=0} = f(r), \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \Big|_{r=R_w} = \frac{1}{\lambda} (q_w)_{max}, \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (7.58)$$

де $\bar{T} = T^{\gamma+1}$, $f(r)$ – деякий початковий розподіл температури по товщині обтічника; $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda + 1}$.

Для розв'язання задачі (7.55) – (7.58) використовуємо наступне кінцеве інтегральне перетворення Фур'є [128]:

$$r\bar{T}(r,t) \rightarrow F_p(p,t) = \int_0^{R_w} r\bar{T}(r,t) \frac{\sin(p,r)}{p} dr, \quad (7.59)$$

де значення параметра p знаходяться з рівняння:

$$\sin(pR_w) - pR_w \cos(p,r) = 0. \quad (7.60)$$

Зворотний перехід від зображення $F_p(p,t)$ до його оригіналу $\bar{T}(r,t)$ здійснюється за формулою:

$$F_p(p,t) \rightarrow \bar{T}(r,t) = \frac{3}{R_w^3} F_p(0,t) + \frac{2}{R_w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\sin^2(p_n R_w)} \frac{\sin(p_n r)}{r} F_s(p,t). \quad (7.61)$$

Застосуємо перетворення (7.59) до рівняння (7.55) і врахуємо умову (7.58), тоді

$$\int_0^{R_w} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}(r,t)}{\partial r} \right) r \frac{\sin(p,r)}{p} dr = \left(\frac{\partial \bar{T}(r,t)}{\partial r} \frac{\sin(p,r)}{p} \right) \Big|_{r=R_w} - p^2 F_p(p,t). \quad (7.62)$$

З умови (7.57) виходить, що

$$\int_0^{R_w} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}(r,t)}{\partial r} \right) r \frac{\sin(p,r)}{p} dr = \frac{(q_w)_{max}}{\bar{\lambda}} R_w \frac{\sin(pR_w)}{p} - p^2 F_p(p,t). \quad (7.63)$$

Якщо тепер помножити всі члени рівняння (7.56) на $r \frac{\sin(pr)}{p}$ та проінтегрувати по r у межах від 0 до R_w , то на основі (7.63) отримаємо:

$$\frac{dF_p(p,t)}{dt} + a_0^2 p^2 F_p(p,t) = \frac{a_0^2}{\bar{\lambda}} R_w \frac{\sin(pR_w)}{p} (q_w)_{max}. \quad (7.64)$$

Розв'язок рівняння (7.64) має вигляд [18, 64]:

$$F_p(p,t) = e^{-a_0^2 p^2 t} \left[c(p) + \frac{a_0^2}{\bar{\lambda}} R_w \frac{\sin(pR_w)}{p} \int_0^t (q_w)_{max} e^{a_0^2 p^2 \tau} d\tau \right]. \quad (7.65)$$

Для визначення $c(p)$ скористаємося початковою умовою (7.55):

$$c(p) = \int_0^{R_w} r f(r) \frac{\sin(pr)}{r} dr. \quad (7.66)$$

Тоді розв'язок (7.65) має вигляд:

$$F_p(p,t) = e^{-a_0^2 p^2 t} \left[\int_0^{R_w} r f(r) \frac{\sin(pr)}{p} dr + \frac{a_0^2}{\lambda} R_w \frac{\sin(pr)}{p} \int_0^t (q_w)_{max} e^{a_0^2 p^2 \tau} d\tau \right]. \quad (7.67)$$

Для переходу до оригіналу спочатку знайдемо:

$$F_p(0,t) = \int_0^{R_w} r^2 f(r) dr + \frac{a_0^2}{\lambda} \int_0^t (q_w)_{max} d\tau. \quad (7.68)$$

Підставимо значення $F_p(0,t)$ та $F_p(p,t)$ у формулу (7.61), тоді отримаємо розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r,t) = & \frac{3}{R_w^3} \int_0^{R_w} r^2 f(r) dr + \frac{3a_0^2}{\lambda R_w} \int_0^t (q_w)_{max} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\sin^2(p_n R_w)} \times \\ & \times \frac{\sin(p_n r)}{p_n} e^{-a_0^2 p_n^2 t} \frac{2}{R_w} \int_0^{R_w} r f(r) \frac{\sin(p_n r)}{p_n} dr + \frac{a_0^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_w p_n \sin(p_n R_w)}{p_n \sin^2(p_n R_w)} \times \\ & \times \frac{\sin(p_n r)}{r} e^{-a_0^2 p_n^2 t} \frac{2}{R_w} \int_0^t (q_w)_{max} e^{a_0^2 p_n^2 \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Позначимо $\mu_n = p_n R_w$ і використовуючи рівняння

$$\sin \mu = \mu \cos \mu, \quad (7.70)$$

розв'язком якого є нескінченний ряд чисел $\mu_1 = 7,7251$; $\mu_2 = 10,9037$; $\mu_3 = 14,0656$; $\mu_4 = 17,2203$ і так далі [128], отримаємо розв'язок в остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r,t) = & \frac{3}{R_w^3} \int_0^{R_w} r^2 f(r) dr + \frac{3a_0^2}{\lambda R_w} \int_0^t (q_w)_{max} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_w}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)} \times \\ & \times \frac{\mu_n \sin\left(\frac{2\mu_n}{R_w}\right)}{r} e^{-\left(\frac{\mu_n a_0}{R_w}\right)^2 t} \int_0^t (q_w)_{max} e^{\left(\frac{\mu_n a_0}{R_w}\right)^2 \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Для випадку (реалізується на практиці), що розглядається нами, коли

$$T(r,0) = f(r) \equiv T_0, \quad (7.72)$$

$$(q_w)_{max} = (q_w)_{max}(M), \quad (7.73)$$

отримуємо наступний розв'язок даної задачі:

$$T(r,t) = \left\{ T_0^{v+1} + \frac{(q_w)_{max}(M)R_w(v+1)}{\lambda_0} \left[\frac{3a_0^2 t}{R_w^2} - \frac{3R_w^2 - 5r^2}{10R_w^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{R_w \sin\left(\frac{\mu_n r}{R_w}\right)}{r \mu_n} e^{-\left(\frac{\mu_n a_0}{R_w}\right)^2 t} \right]^{\frac{1}{v+1}} \right\}. \quad (7.74)$$

З використанням вказаних вище пакетів прикладних програм за формулами (7.51), (7.52) та (7.74) були проведені розрахунків температурних полів для використовуваної на практиці оптичної кераміки КО-2, для різних швидкостей обдування потоком повітря, різних режимах обтікання, часу теплової дії і різних відстанях по товщині обтічника (рис.7.30-7.34).

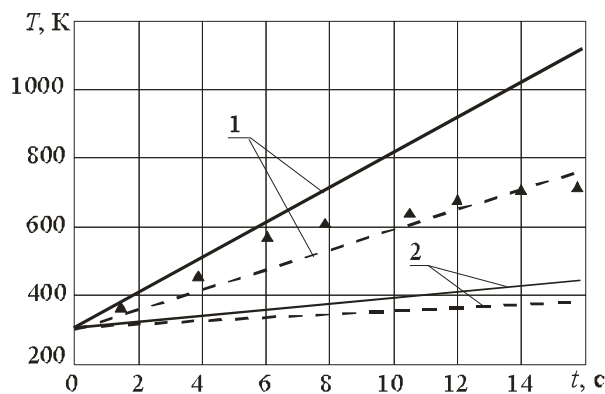


Рисунок 7.30 - Залежність температури поверхні обтічника від часу теплової дії надзвукового потоку повітря ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м): 1 – $M = 5$; 2 – $M = 3$;

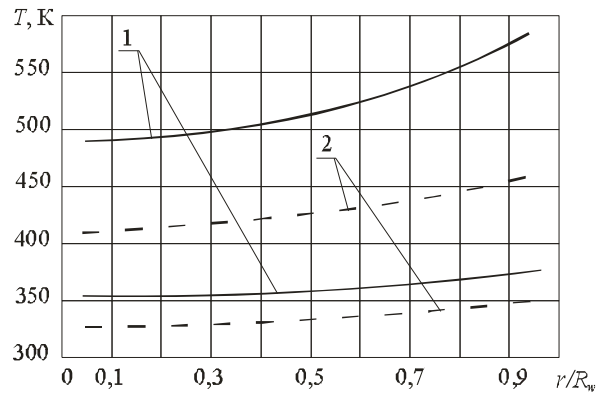


Рисунок 7.31 - Розподіл температури по товщині обтічника, що обдувається надзвуковим потоком повітря ($T_0 = 300$ К; $t = 3$ с; $R_w = 0,015$ м): 1 – $M = 6$; 2 – $M = 4$

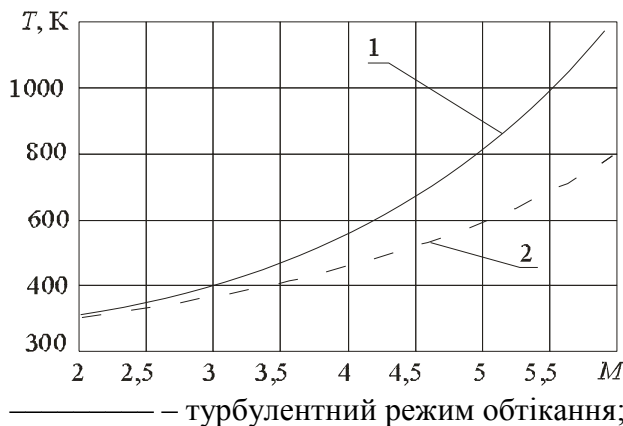


Рисунок 7.32 - Залежність температури поверхні обтічника від швидкості надзвукового потоком повітря ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м; $t = 10$ с): 1 – турбулентний режим обтікання; 2 - ламінарний режим обтікання

— — — — — турбулентний режим обтікання; — — — — — ламінарний режим обтікання; ▲ – експериментальні дані (ламінальний режим обтікання, передня критична $\theta = 0^0$) [2].

З результатів розрахунків, представлених на рис.7.30-7.34, витікає, що температура в зонах максимальної зовнішньої термічної дії істотно залежить від швидкості обдування потоком повітря і режиму обтікання: наприклад, для часу зовнішньої теплової дії $t = 10 \dots 15$ с із збільшенням швидкості обдування від $M = 2$ до $M = 6$ значення температури на поверхні обтічника зростають в 2,5...3 рази для ламінарного режиму обтікання і в 3,5...4 рази для турбулентного режиму обтікання.

Окрім цього, збільшення часу зовнішньої теплової дії приводить у всіх випадках тільки до зростання температури в будь-якій точці по товщині обтічника. При збільшенні відстані від поверхні обтічника температура убуває для усіх даних режимів обтікання (у 1,1...1,2 рази для ламінарного режиму обтікання і в 1,1...1,2 рази для турбулентного режиму обтікання).

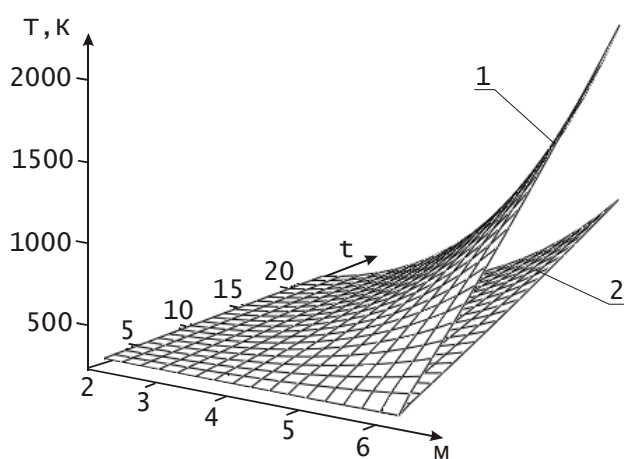


Рисунок 7.33 - Залежність температури на поверхні обтічника від швидкості надзвукового потоку повітря і часу
($T_0 = 300$ К; $r = R_w$; $R_w = 0,015$ м)

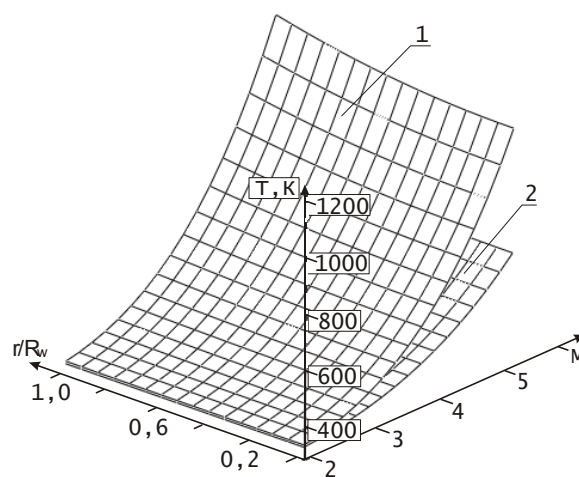


Рисунок 7.34 Залежність розподілу температури по товщині обтічника від швидкості надзвукового потоку повітря
($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м)

1 – турбулентний режим обтікання; 2 - ламінарний режим обтікання

Таким чином, температура в зонах максимальної зовнішньої теплової дії на поверхні обтічника у разі турбулентного режиму його обтікання значно перевищує температуру в цих зонах для випадку ламінарного режиму обтікання (наприклад, для $M = 5 \dots 6$ в 1,2...1,6 рази).

7.6 Розрахунок термопружних напружень та визначення критичних умов екстремальних термічних дій на поверхню обтічника

Виникнення термопружних напружень в даному випадку пов'язане з градієнтом температури по товщині (у довж r) обтічника (див.рис.7.25). Компоненти термопружних напружень, так само як і у разі пластини, можуть бути визначені на основі припущень, що має місце плоский термонапружений стан, коли плоскі перетини, перпендикулярні до поверхні нагрівання обтічника залишаються такими самими в процесі нагрівання [30, 85]:

$$\sigma(r,t) = \frac{\alpha_v E}{1-\nu} \left[-T(r,t) + \frac{2}{R_w^2} (2R_w - 3z) \int_0^{R_w} T(r,t) dr + \frac{6}{R_w^3} (H - 2r) \int_0^{R_w} T(r,t) r dr \right]. \quad (7.75)$$

За формулою (7.75) з урахуванням (7.51), (7.52) та (7.74), а також за допомогою розробленого програмного забезпечення, були проведені розрахунки розподілів $\sigma(r,t)$ у даних зонах на поверхні обтічника з оптичної кераміки КО-2 залежно від швидкості обдування потоком повітря, різних режимів обтікання і часу теплової дії (рис.7.35-7.42).

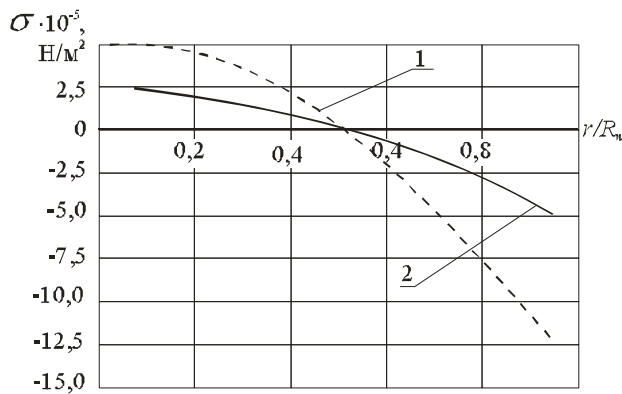


Рисунок 7.35 - Розподіл термопружних напружень по товщині обтічника в зоні максимальної зовнішньої термічної дії для ламінарного режиму обтікання

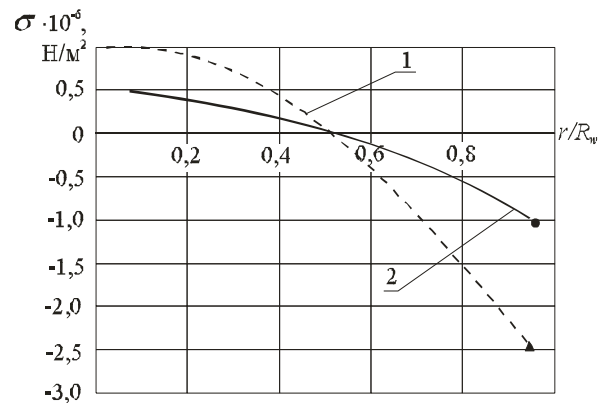


Рисунок 7.36 - Розподіл термопружних напружень по товщині обтічника в зоні максимальної зовнішньої термічної дії для турбулентного режиму обтікання

$$T_0 = 300 \text{ К}; R_w = 0,015 \text{ м}; t = 10 \text{ с}; \quad 1 - M = 4; \quad 2 - M = 3,5$$

▲, ● – результати експериментальних досліджень, відповідно для $M = 3,5$ та $M = 4$

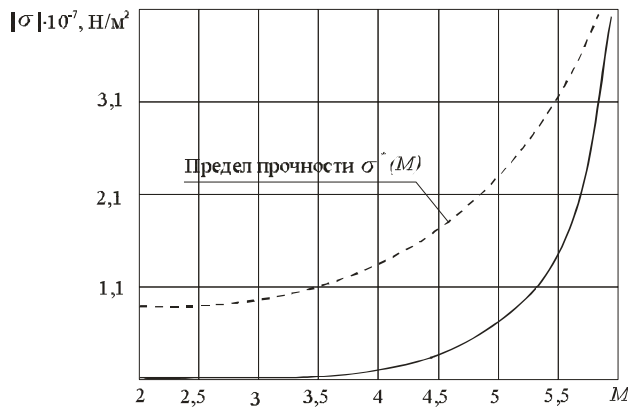


Рисунок 7.37 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ у зоні максимальної термічної дії на поверхні обтічника від M для ламінарного режиму обтікання ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м; $t = 10$ с)

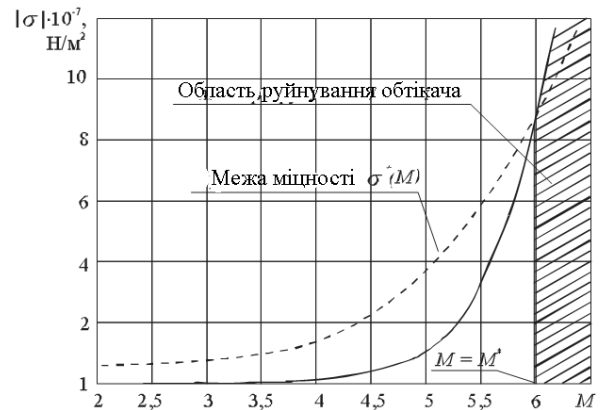


Рисунок 7.38 - Залежність модуля термопружних напружень $|\sigma|$ у зоні максимальної термічної дії на поверхні обтічника від M для турбулентного режиму обтікання ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м; $t = 15$ с)

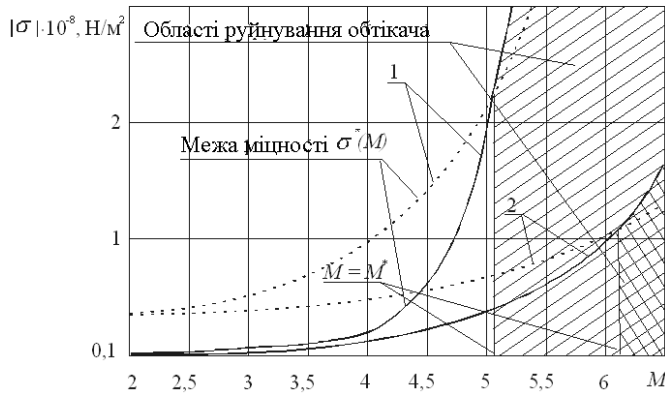


Рисунок 7.39 - Вплив на залежність $|\sigma(M)|$ часу зовнішньої термічної дії для турбулентного режиму обтікання поверхні півсфери: 1 – $t = 30$ с; 2 – $t = 15$ с ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м)

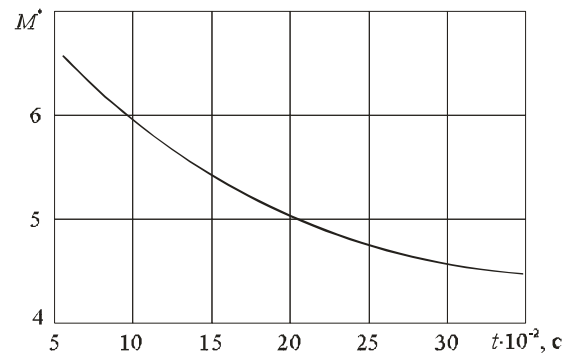


Рисунок 7.40 - Залежність критичних значень M^* від часу зовнішньої теплової дії на поверхню обтічника (турбулентний режим обтікання; $t \geq 5$ с; $T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м)

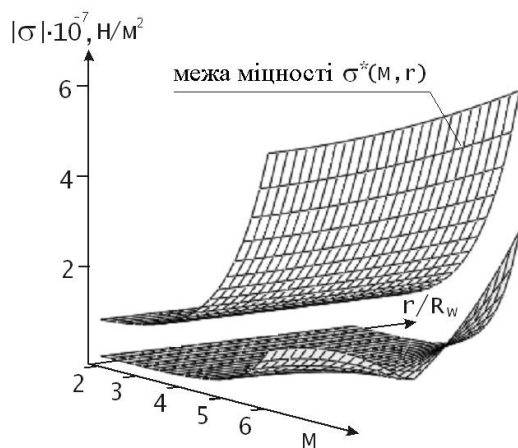


Рисунок 7.41 - Тривимірне зображення функції $|\sigma| = \varphi(M, r)$ для ламінарного режиму обтікання ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м)

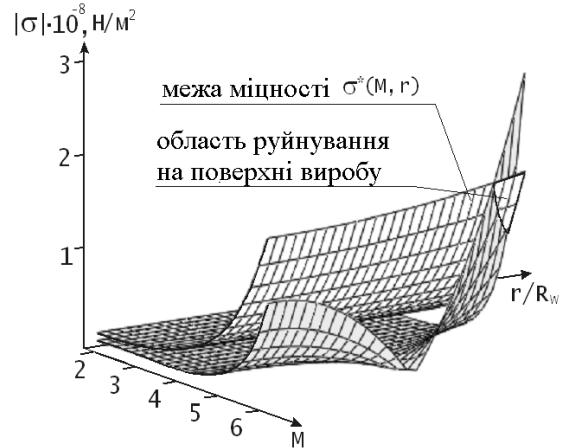


Рисунок 7.42 - Тривимірне зображення функції $|\sigma| = \varphi(M, r)$ для турбулентного режиму обтікання ($T_0 = 300$ К; $R_w = 0,015$ м)

Аналіз результатів розрахунків, представлених на рис.7.35-7.42, показує, що термопружне напруження в зонах максимальної зовнішньої термічної дії розподілена по товщині обтічника таким чином: на поверхні обтічника і в його поверхневих шарах має місце стискуєче напруження ($\sigma < 0$, $|\sigma|$ досягає значень 10^8 Н/м²... $1,5 \cdot 10^8$ Н/м²), а на відстанях $r = R_w$ – розтягуючи напруження ($\sigma > 0$, $|\sigma|$ досягає значень $0,5 \cdot 10^8$... $1 \cdot 10^8$ Н/м²); при цьому, для турбулентного режиму обтікання $|\sigma|$ перевищує його значення для ламінарного режиму обтікання в 4...5 рази. При збільшенні швидкості обдування потоком повітря від $M = 2$ до $M = 6$ величина $|\sigma|$ зростає як для ламінарного, так і турбулентного режимів обтікання до значення $\sigma^* = |\sigma(M^*)|$ (σ^* – граничне значення термопружних напружень, при якому настає руйнування матеріалу; M^* – значення швидкості обдування потоком повітря, при якій величина $|\sigma|$ стає рівною σ^*). При цьому, величина M^* істотно залежить як від режиму обтікання півсфери, так і від часу зовнішньої теплової дії t : наприклад, при збільшенні t від 0,05 с до 0,4 с значення M^* зменшуються від 6,46 до 4,91 (турбулентний режим обтікання); для всього дослідженого діапазону зміни M у разі ламінарного режиму обтікання значення M^* відсутні.

Таким чином, в зонах максимальної зовнішньої термічної дії на поверхню обтічника процес руйнування матеріалу залежить від режиму обтікання: для турбулентного режиму обтікання руйнування матеріалу обтічника відбувається в приповерхневих шарах обтічника; для ламінарного режиму обтікання руйнування матеріалу обтічника вже не спостерігається.

На закінчення слід зазначити, що за допомогою розроблених математичних моделей і пакетів прикладних програм можна чисельно на персональному комп'ютері в діалоговому режимі і в режимі реального часу прогнозувати місця розташування небезпечних ділянок на поверхні пластини і півсферичного обтічника з оптичних керамік, в яких мають місце екстремальні зовнішні термічні дії при обтіканні їх надзвуковим потоком

повітря, а також критичні умови цих дій (швидкість повітряного потоку M^* , режим обтікання (ламінарний, турбулентний) і час зовнішньої дії t^* , при яких вказані ділянки на поверхні пластини і півсферичного обтічника руйнуються (виконується співвідношення $|\sigma| \geq \sigma^*$).

Проведене зіставлення розглянутих вище результатів розрахунків з результатами окремих лабораторних і натурних випробувань, отриманими в роботах показало, що вони повністю адекватні один одному (відносна похибка 8...12%).

Контрольні питання та завдання:

1. Привести схему експлуатації оптичних виробів з ІЧ-системами.
2. Сформулювати основні поняття надзвукового обтікання тіл з оптичних матеріалів: ударна хвиля, передня критична точка тіла, пограничний шар, температура гальмування потоку, температура відновлення в пограничному шарі, тепловий потік із пограничного шару на поверхню тіла.
3. В чому полягає методика розв'язання термогазодинамічних задач ?
4. Описати термогазодинамічні процеси на поверхні пластини при її надзвуковому обдуванні потоком повітря .
5. Де розташовані місця максимальних значень теплового потоку ?
6. Опишіть процеси нагрівання пластини при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничного шару.
7. Опишіть зміну температури в зонах максимальної зовнішньої термічної дії.
8. Поясніть порядок розрахунку термопружних напружень по товщині оптичної пластини.
9. Визначте критичні умови екстремальних термічних дій на поверхню оптичної пластини.

10. Опишіть розподіл термопружних напружень в зонах максимальної зовнішньої термічної дії по товщині оптичної пластини.
11. Поясніть термогазодинамічні процеси, які виникають на поверхні напівсферичного оптичної обтічника при його надзвуковому обдуванні потоком повітря.
12. Як відбувається нагрівання напівсферичного оптичної обтічника при заданому зовнішньому тепловому потоці з граничним шаром ?
13. Опишіть порядок розрахунку термопружних напружень по товщині оптичної обтічника.
14. Визначте критичні умови екстремальних термічних дій на поверхню оптичної обтічника.
15. Поясніть розподіл термічних напружень в зонах максимальної зовнішньої термічної дії по товщині оптичної обтічника.

ГЛОСАРІЙ

Атомно-силова мікроскопія – (від латин. *µ*крос — дрібний, маленький та *скопос* — бачу) — вивчення об'єктів з використанням атомно-силового мікроскопу, тобто скануючого зондового мікроскопу високої роздільної здатності, принцип дії якого оснований на взаємодії зонду кантилевера з поверхнею досліджуваного зразка.

Вектор – елемент лінійного простору, який позначає напрям зміни певних параметрів.

Векторна лінія – (див. Лінія струму, Силова лінія) крива, в кожній точці якої дотична має напрям вектора $\vec{A}(x, y, z)$ поля.

Векторне поле – (див. Поле величин, Скалярне поле) частина простору, в кожній точці M якого відповідно до певного закону заданий деякий вектор $\vec{A}(M)$.

Відхилення від площинності (неплощинність) – δn , найбільша відстань від точок реального профілю (або реальної поверхні) до прилеглої прямої або площини.

Високотемпературні технологічні процеси (ВТП) - послідовність технологічних операцій із застосуванням КПЕ, необхідних для виконання певного виду робіт. ВТП складаються з технологічних (робочих) операцій, які, у свою чергу, складаються з робочих рухів (прийомів).

Геометричні умови – умови однозначності, які задають форму і розміри тіла, в якому протікає процес.

Градiєнт – (від латин. “*gradiens*” – той, що крокує) вектор-функція $\varphi(x, y, z)$:

$$\vec{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \text{ в якій } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{ одиничні}$$

вектори декартових осей.

Девіатор напружень - $\vec{\delta}$ неізотропна частина тензору напружень, що містить дотичні і деякі діагональні члени, в сумі рівні нулю.

Дивергенція (векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$) – границя відношення потоку векторного поля по замкнутій поверхні до об'єму всередині цієї поверхні, якщо ця поверхня і об'єм стягуються в точку:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z.$$

Динамічний пограничний шар - тонкий шар газу близько поверхні, в якому швидкість газу змінюється від нуля до швидкості незбуреного потоку U_0 (далеко від поверхні тіла).

Еквіпотенціальна поверхня – поверхні рівня потенціалу $u(M)$.

Електронно-променева гармата – клас електровакуумних електронних пристроїв, які схематично відносяться до тріодних пристроїв і призначені для формування сфокусованих параксіальних потоків електронів, та керування їхньою інтенсивністю та положенням у просторі.

Електронно-променева обробка – сукупність технологічних процесів електронної обробки різноманітних матеріалів сфокусованим параксіальним потоком електронів, який формується у вакуумі за допомогою спеціальних пристроїв – електронно-променевих гармат: зварювання, паяння, термообробка металу (гартування, відпалювання тощо); напилювання різноманітних матеріалів та їхніх з'єднань на поверхню зразка з отриманням покриттів з металевих та неметалевих матеріалів; скрайбування, полірування оптичних матеріалів, тощо.

Коефіцієнт тепловіддачі - α [Вт/(м²·К)], чисельно дорівнює кількості теплоти, що віддається (отримується) одиницею площі поверхні тіла в одиницю часу при різниці температур між поверхнею і середовищем в

один градус і характеризує інтенсивність теплової взаємодії середовища з поверхнею тіла.

Конвекційна тепловіддача - конвекційний теплообмін між поверхнею твердого тіла та рідиною.

Конвекція (конвекційний теплообмін) - перенесення теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу в просторі.

Концентровані потоки енергії (КПЕ) - сфокусовані в області малих розмірів потоки заряджених часток (електронів, іонів), лазерне випромінювання (імпульсно-періодичне та безперервне) з різною довжиною хвилі, імпульсні та безперервні потоки низькотемпературної плазми, радіаційні теплові потоки, високотемпературні понадзвукові газові потоки, хвилі горіння тощо, які використовуються в цілях проведення технологічних операцій зварювання, термічної обробки, розмірної обробки, полірування, напилювання, наплавлення тощо.

Крайові умови - сукупність початкових (полягають в завданні розподілу температури в тілі в початковий момент часу і необхідні лише при розгляді нестационарних задач) і граничних (задаються розподілом температури по поверхні S тіла у будь-який момент часу: $T(x, y, z, t) \big|_S = \varphi(x, y, z, t) = T_s, x, y, z \in S$) умов.

Криволінійний інтеграл – границя суми скалярних добутків векторного поля на елементарні переміщення вздовж шляху інтегрування, коли довжина кожного переміщення прагне до нуля, а кількість переміщень прагне до

$$\text{нескінченності: } \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} A_r dr = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \vec{A}(\vec{r}_n) \Delta \vec{r}_n.$$

Лінія струму - (див. Векторна лінія, Силова лінія) векторна лінія поля швидкостей.

Математична модель процесу - сукупність диференціального рівняння теплопровідності та умов однозначності (початкові та граничні умови,

фізичні характеристики матеріалу, геометричні розміри тіла), що описують цей процес.

Метод розділення змінних - один з фундаментальних аналітичних методів розв'язання різних задач теплопровідності для обмежених тіл (пластини кінцевої товщини, тонкі стрижні тощо), який полягає у пошуку розв'язків вигляду: $T(x,t)=M(x)N(t)$, де $M(x)$ – функція, яка залежить лише від змінної x , а $N(t)$ - функція залежна тільки від t .

Нестаціонарне температурне поле – (див. Поле) поле, температура якого змінюється і в просторі і з часом. В цьому випадку кажуть, що температура є функція простору і часу: $T=f(x, y, z, t)$.

Оператор - дія (готовність впливати на той вираз, що стоїть праворуч від оператора). Символ $\frac{\partial}{\partial x}$ називається оператором часткової похідної по x .

Під дією цього оператора на функцію $\varphi = \varphi(x, y, z)$ розуміють часткову похідну $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, тобто $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Поле величин – (див. Векторне поле, Скалярне поле) сукупність миттєвих значень фізичної величини в усіх точках даної області простору.

Потенціал (векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ – така функція u для якої $\vec{A} = -\overline{\text{grad}} u$.

Потік поля - поверхневий інтеграл по поверхні S від скалярного добутку $\vec{A} \cdot \vec{n}$, де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до поверхні S .

Похідна (по напрямку) – швидкість зміни функції вздовж цього напрямку.

Реологічне рівняння (закон) - рівняння, що встановлює зв'язок між компонентами тензорів напружень, деформацій та швидкостей деформацій.

Ротор векторного поля – (від латин. «rotate» – обертати, «roto» – обертаюся) вектор, проекція якого на довільний напрям \vec{n} дорівнює границі відношення циркуляції поля по замкнутому контуру, який лежить в

площині, яка перпендикулярна до \vec{n} , до площі, яка обмежена цим контуром, якщо контур (і площа) стягується в точку:

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r})\right)_n = \lim_{\substack{L \rightarrow 0 \\ \Delta S_L \rightarrow 0}} \frac{\oint A_t dl}{\Delta S_L}.$$

Силова лінія – (див. Векторна лінія, Лінія струму) векторна лінія поля тяжіння, електричного та/або магнітного полів.

Символ Кронекера - скалярний добуток ортів за умов, що система координат

$$\text{ортогональна: } \vec{l}_i \cdot \vec{l}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

Скаляр – це величина, яка повністю визначається в будь-якій системі координат одним числом (або функцією), яке в свою чергу не змінюється при зміні просторової системи координат.

Скалярне поле – (див. Поле, Векторне поле) частина простору, кожній точці M якого ставиться у відповідність деяке число $\varphi(M)$.

Соленоїдність поля – представлення векторного поля $\vec{A}(M)$ у вигляді ротору деякого векторного поля $\vec{B}(M)$, тобто $\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$.

Стаціонарне температурне поле – (див. Поле) поле, температура якого в будь-якій його точці не змінюється з часом, тобто є функцією тільки координат: $T = f_l(x, y, z)$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Стрічковий електронний потік (СЕП) – спрямований потік електронів, сформований у вигляді стрічки електронно-оптичною системою електронно-променевої гармати. СЕП відхиляється магнітним та електричним полем, які використовуються для його керування.

Тензор – величина, яка перетворюється за законом $\hat{P}' = \hat{\alpha} \cdot \hat{P} \cdot \hat{\alpha}^T$,

$$P'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jn} \cdot P_{kn} = \sum_k \sum_n \alpha_{ik} \cdot P_{kn} \cdot \alpha_{nj}^T.$$

Тензорний аналіз - узагальнення векторного аналізу, розділ тензорного числення, що вивчає диференціальні оператори, які діють на алгебраїчні тензорні поля $D(M)$, що диференціюються.

Теплове випромінювання - процес розповсюдження теплоти електромагнітними хвилями.

Теплоперенесення – фізичний процес передачі теплової енергії від більш гарячого тіла до холодного або безпосередньо (при контакті), або через розділяючу (тіла або середовища) перегородку з якого-небудь матеріалу.

Теплопровідність - молекулярне перенесення теплоти в тілах (або в середовищі між ними), обумовлене неоднорідністю розподілу температури в просторі.

Тепловий потік - (див. Потік поля) кількість теплоти dQ_t , що проходить в одиницю часу dt через одиницю площі ізотермічної поверхні dS , за умов, що напрям у будь-якій точці ізотропного тіла протилежний напрямку градієнта температури: $q = |\vec{q}| = \frac{d^2 Q_t}{dt \cdot dS} = \frac{dQ}{dS}$.

Термічні напруження (термонапруження) - міра внутрішніх сил, які виникають в деформованому тілі під впливом зовнішніх термічних дій (високих температурних градієнтів, теплових ударів тощо).

Трек – сума скалярів, утворена операцією згортки або спрощення, коли повторюють пару індексів (вільні індекси стають німими).

Фізичні умови – умови однозначності, які задають теплофізичні параметри середовища: ρ - щільність, λ - теплопровідність, C_V - об'ємну теплоємність, q_V - об'ємну щільність теплового потоку.

Циркуляція (векторного поля по контуру) - потік ротору цього поля через довільну поверхню, яка спирається на даний контур:

$$\oint_L A_i dl = \iint_{\Sigma_L} (\text{rot } \vec{A})_n dS.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kovalenko V.* Laser 3D Objects prototyping using their flat images / V. Kovalenko, M. Anyakin , V. Anyakin // Proceeding of International Conference LTWMP-2003, PWI NASU, Kiev, 2003. – p. 183–187.
2. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика / Абрамович Г. Н. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
3. *Акивис М. А.* Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. – М.: Наука, 1969. – 236 с.
4. *Алексеев В. М.* Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 286 с.
5. *Алексеев В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи / В.М.Алексеев, В.М. Галлеев, В.М. Тихомиров. – М.:Наука, 1984. –288с.
6. *Асцатуров В. Н.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах методом переменных направлений / В.Н. Асатуров, А. А. Коновалов // Сборник трудов Всесоюзного НИИ “Теплопроект”. – 1975. – вып. 38. – с. 48–57.
7. *Багмутов В. П.* Исследование тепловых процессов при воздействии на материалы концентрированных источников энергии / В.П.Багмутов, И.Н. Захаров // Физика и химия обработки материалов, 2002. – № 3. – С. 9–17.
8. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс / Банди Б. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
9. *Батунер Л. М.* Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. – М.: Химия, 1971. – 824 с.
10. *Бахвалов Н.С.* Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобелько. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
11. *Беляев Н. М.* Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высшая школа, 1982. – 328 с.

12. *Берлин Н. С.* Моделирование нестационарных температурных полей с подвижными источниками энергии / Н. С. Берлин // В кн.: Проблемы управления в технике, экономике и биологии. – М.: Наука, 1976. – С.28–36.
13. *Берлин Н. С.* Расчет температурных полей при электронно-лучевом нагреве Н. С. Берлин, Э. М. Волин, И. А. Кононов // Технология легких сплавов, 1976. – № 11. – С. 49–54.
14. *Бицадзе А. В.* Сборник задач по уравнения математической физики / А.В.Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко – М.: Наука, 1985. – 312 с.
15. *Боли Б.* Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
16. *Борисов Н. А.* Полировка кремниевых пластин электронным лучом / Н. А. Борисов, Г. В. Дудко // Электронная обработка материалов. – 1969. – № 5. – с. 6–8.
17. *Бородин А. И.* Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой на затупленных телах, обтекаемых под углами атаки и скольжения / А. И. Бородин, С. В. Пейги // Теплофизика высоких температур, 1988. – т. 26. – № 4. – с. 51–54.
18. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
19. *Будак Б. М.* Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 683 с.
20. *Бункин Р. В.* Особенности воспламенения металлов в воздухе под действием непрерывного лазерного излучения / Р. В. Бункин, Н. А. Кириченко, В. С. Лукьянчук // Квантовая электроника. – 1986. – т. 13. – № 6. – с. 1227–1234.
21. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами / Бутковский А. Г. – К.: Наука, 1979. – 224 с.
22. *Ван дер Темпел Л.* Теплопроводность стекла. II. Эмпирическая модель / Л. Ван дер Темпел // Физика и химия стекла, 2002. – т. 28. – С.213–220.

23. *Ван дер Темпел, Л.* Конструктивная теплопроводность стекла. I. Измерение с помощью контакта стекло – металл / Л. Ван дер Темпел, Мелис Г. П., Брандсма Т. С. // Физика и химия стекла, 2000. – т. 26. – № 6. – с. 877–886.
24. *Ван-Драйст* Проблема аэродинамического нагрева / Ван-Драйст // Вопросы ракетной техники, 1957. – 5 (41). – с. 36–65.
25. *Ващенко В. А.* Математическое моделирование взаимодействия электронного луча с оптическими материалами / В. А. Ващенко, Д. М. Краснов, Н. И. Кривенко // Материалы Международной конференции “Новые компьютерные технологии в промышленности, энергетике, банковской сфере, образовании”. – Киев: НТУУ “КПИ”, 1998. – с. 17–18.
26. *Ващенко В. А.* Математическое моделирование и расчет оптимальных режимов эксплуатации изделий из оптических материалов в условиях сверхзвукового обдува потоком воздуха / Ващенко В. А. // Гидроаэромеханика в инженерной практике: Сборник трудов II Республиканской научно-технической конференции. – Киев, НТУУ “КПИ”, 1997. – с. 94–95.
27. *Ващенко В. А.* Математическое моделирование электронно-лучевой технологии / В. А. Ващенко, Н. И. Кривенко // Новые компьютерные технологии САПР и АСУ в промышленности, энергетике и строительстве: Материалы международной конференции, 16 – 18 сентября 1997 г., Алушта – Киев: НТУУ “КПИ”, 1997. – с. 37 – 38.
28. *Ващенко В. А.* Методика использования математических моделей для расчета теплового воздействия электронного луча на оптические материалы / В. А. Ващенко, Г. В. Канашевич, И. В. Дробот // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці НАН України. – Київ, 2001. – вип.. 11. – с. 99–108.
29. *Ващенко В. А.* Наукові основи керування якістю виробів із спеціальних оптичних матеріалів: автореферат дисер. на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук / Ващенко В.А., К.:НТУУ “КПИ”, 1996. – 32 с.

30. *Ващенко В. А.* Оптимизация влияния параметров электронно-лучевой установки на процессы обработки оптических материалов / В. А. Ващенко, Д. М. Краснов // *Материалы международной конференции “Высокоэффективные технологии в машиностроении”*. – Киев: НТУУ “КПИ”, 1998. – с. 11 – 12.
31. *Ващенко В. А.* Расчет нагрева металлической оболочки изделия при встречном обдуве потоком воздуха и вращении / В. А. Ващенко, Д. М. Краснов, П. И. Заика // *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: Праці II Української науково-технічної конференції*. – Київ: НТУУ “КПІ”, 1998. – с. 228 – 231.
32. *Ващенко В. А.* Теоретические основы теплотехники. Курс лекций / Ващенко В. А. – Черкассы: ЧДТУ, 2003. – 80 с.
33. *Ващенко В. А.* Управление качественными характеристиками электронно-лучевой обработки оптических материалов / В. А. Ващенко, Д. М. Краснов // *Высокоэффективные технологии в машиностроении: Материалы международной конференции, 28 – 30 октября 1998 г.* – Киев: НТУУ “КПИ”, 1998. – с. 12 – 13.
34. *Виленкин С. Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных величин / Виленкин С. Я. – М.: Энергия, 1979. – 320 с.
35. *Виленский В. Д.* Нестационарный конвективный теплообмен при внешнем обтекании тел / Виленский В. Д. // *Теплофизика высоких температур*, 1974. – № 5. – с. 1091 – 1101.
36. *Вичак В. С.* Управление температурными напряжениями и перемещениями / Вичак В. С. – К.: Наукова думка, 1988. – 312 с.
37. *Вольман В. И.* Многофункциональные элементы интегральной оптики / В. И. Вольман, Н. Д. Козырев // *Радиотехника*, 1984. – № 8. – с. 36 – 39.
38. *Воробьева Л. С.* Математическое моделирование нестационарного процесса теплопроводности / Л. С. Воробьева, Г. Н. Жевлахов // *Инженерно-физический журнал*. – 1980. – т. 39. – № 4. – с. 745–747.

39. *Галкин А. Г.* Гидродинамическая модель изменения формы поверхности при обработке вращающегося цилиндра электронным пучком / А. Г. Галкин, И. В. Зуев, В. В. Савватеев // Физика и химия обработки материалов, 1998. – № 1. – С. 15–21.
40. *Гинзбург И. П.* Аэрогазодинамика / Гинзбург И. П. – М.: Высшая школа, 1966. – 404 с.
41. *Головко Л. Ф.* Технологічні основи керування якістю поверхневого шару при лазерній зміцнюючій обробці матеріалів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук / Л. Ф. Головко; КПІ. – К., 1994. – 32 с.
42. *Григорьянц А. Г.* Методы поверхностной лазерной обработки / А. Г. Григорьянц, А. Н. Сафонов – М.: Высшая школа, 1987. – 191 с.
43. *Григорьянц А. Г.* Лазерная обработка неметаллических материалов / А. Г. Григорьянц, А. А. Соколов – М.: Высшая школа, 1988. – 191 с.
44. *Гришин А. М.* Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск: Наука, 1984. – 316 с.
45. *Гудьер Дж. Н.* Математическая теория упругости / Гудьер Дж. Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 190 с.
46. *Гусак А. М.* Основы векторного і тензорного аналізу / А. М. Гусак, Шірінян А. С. – Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2004. – 129 с.
47. *Дахия Р. С.* Двумерные преобразования Лапласа: теоремы и приложения / Р. С. Дахия, М. Эгвурубэ // Украинский математический журнал. – 1987. – т. 39. – № 3. – с. 374–379.
48. *Движение ракет* / [Дмитриевский А. А., Казаковцев В. П., Устинов В. Ф. и др.]. – М.: Военное издательство, 1968. – 464 с.
49. *Действие излучения большой мощности на металлы* / [С. И. Анисимов, Я. А. Исмас, Г. С. Романов, Ю. В. Ходыко]. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

50. *Зажигаев Л. С.* Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажигаев, А. А. Китьян, Ю. И. Романиков – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.
51. *Зарубин В. С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности / Зарубин В. С. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
52. *Зарубин В. С.* Прикладные задачи термостойкости элементов конструкций / Зарубин В. С. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
53. *Зельдович Я. Б.* Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 592 с.
54. *Иванова Т. П.* Вычислительная математика и программирование / Т. П. Иванова, Г. В. Пухова. – М.: Просвещение, 1978. – 319 с.
55. *Израилов Ю. Л.* Конечно-разностный метод решения трехмерной задачи нестационарной теплопроводности / Ю. Л. Израилов // В кн.: “Численные методы решения задач термостойкости в энергетике”. – М.: Наука, 1981. – с. 3–18.
56. *Израилов Ю. Л.* Метод и алгоритм решения трехмерной задачи нестационарной теплопроводности в телах произвольной формы / Ю. Л. Израилов, А. Л. Лубны-Герцик // Изв. АН СССР. Серия “Энергетика и транспорт”. – 1976. – № 5. – с. 118–121.
57. *Иницирование* воспламенения металлов в окислительной атмосфере лазерным нагревом / [Д. Т. Алимов, И. В. Едвабный, Б. С. Лукьянчук] // Физика и химия обработки материалов. – 1986. – № 4. – с. 8–12.
58. *Калиткин Н. Н.* Численные методы / Калиткин Н. Н. – М.: Физматгиз, 1978. – 512 с.
59. *Канашевич Г. В.* Электронно-променева обробка поверхні плат оптичних інтегральних схем: автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук / Канашевич Г.В.; К.:НТУУ “КПІ”, 1997. –19 с.
60. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел / Карташов Э. М. – М.: Высшая школа, 1985. – 324 с.

61. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости / Коваленко А. Д. – К.: Наукова думка, 1970. – 307 с.
62. *Коздоба Л. А.* Вычислительная теплофизика. АН Украины. Институт технической теплофизики / Коздоба Л. А. – К.: Наукова думка, серия “Наука и технический прогресс”, 1992. – 221 с.
63. *Коздоба Л. А.* Решения нелинейных задач теплопроводности / Коздоба Л. А. – Киев.: Наукова думка, 1976. – 305 с.
64. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
65. *Кошляков Н. С.* Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Издательство физико-математической литературы, 1962. – 767 с.
66. *Краскевич В. Е.* Численные методы в инженерных исследованиях / В. Е. Краскевич, К. Х. Зеленский, В.И.Гречко. – К.: Вища школа, 1986. – 263 с.
67. *Краснов М. Л.* Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. Н. Макаренко, А. И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 191 с.
68. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Краснов М. Л. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
69. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1 / Кудрявцев Л. Д. – М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.
70. *Лазарев Л. П.* Инфракрасные приборы самонаведения летательных аппаратов / Лазарев Л. П; . – М.: Машиностроение, 1970. – 232 с.
71. *Лазерное электроэрозионное упрочнение материалов* / [Коваленко В.С., Верхотуров А. Д., Головки Л. Ф.] – М.: Наука, 1986. – 242 с.
72. *Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
73. *Линейное и нелинейное программирование* / [Ляшенко И. Н., Карадогова Е. А., Чернякова Н. В. и др.] – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
74. *Литовский Е. Я.* Теплофизические свойства огнеупоров / Е. Я. Литовский, Н. А. Пучкелевич. – М.: Металлургия, 1982. – 162 с.

75. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
76. *Лох У.* Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет / Лох У. – М.: Мир, 1966. – 356 с.
77. *Лубны-Герцик А. Л.* Алгоритмы, программы решения задачи теплопроводности для тел сложной формы. Численные методы решения задач термпрочности в энергетике / Лубны-Герцик А. Л. – М.: Наука, 1981. – с. 18–33.
78. *Лыков А. В.* Сопряженные задачи конвективного теплообмена / Лыков А. В, Алексашенко А. А., Алексашенко В. А. – Минск: Издательство ИТМО, 1971. – 192 с.
79. *Лыков А. В.* Теория тепло- и массообмена / Лыков А. В. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
80. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности / Лыков А. В. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
81. *Лыков А. В.* Теплообмен. Справочник / Лыков А. В. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
82. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. Справочное пособие / Маделунг Э. – М.: Наука, 1968. – 618 с.
83. *Мажукин В. И.* Кинетика поверхностного испарения металла лазерным излучением / В. И. Мажукин // В кн.: “Воздействие концентрированных потоков энергии на металлы”. – М.: Наука. – 1985. – с. 182 – 184.
84. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление / Мартыненко В. С. – К.: Вища школа, 1990. – 359 с.
85. *Марченко В.М.* Температурные поля и напряжения в конструкции летательных аппаратов / Марченко В.М. – М.:Машиностроение, 1965. –256 с.
86. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / Марчук Г. И. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
87. *Махин В. В.* Аэрогазодинамика и нестационарный тепломассообмен / Махин В. В. – К.: Наукова думка, 1983. – 234 с.

88. *Мейманов А. М.* Задача Стефана / Мейманов А. М. – Новосибирск.: Наука, 1986. – 240 с.
89. *Мелесев Н. Н.* Методы оптимизации / Н. Н. Мелесев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
90. *Методы* решения сопряженных задач теплообмена / [Э. К. Калинин, Г. А. Дрейцер, В. В. Костюк и др.]. – М.: Машиностроение, 1983. – 232 с.
91. *Милленд Дж.* Основы оптоэлектроники и волоконной оптики / Дж. Милленд. – М.: Машиностроение. – 1989. – 264 с.
92. *Михлин С. Г.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин , Х.П. Смолицкий . – М.: Наука, 1965. – 383 с.
93. *Молчанов И. Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / Молчанов И. Н. – К.: Наукова думка, 1988. – 344 с.
94. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / На Ц. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
95. *Нестационарные* тепловые процессы в энергетических установках летательных аппаратов / [Коваленко Н. Д., Шмукин А. А., Гужва М. И. и др.]. – К.: Наукова думка, 1988. – 234 с.
96. *Обтекание* затупленных тел сверхзвуковым потоком газа / Под ред. О. М. Белоцерковского. – М.:ВЦ АН СССР, 1966. – 400 с.
97. *Оптические* приборы в машиностроении. Справочник / [М. И. Апенко, И. П. Араев, В.А.Афанасьев и др.]. – М.: Машиностроение, 1974. – 238 с.
98. *Остославский И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – М.: Машиностроение, 1969. – 499 с.
99. *Пасконов В. М.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. М. Полежаев, Л. А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 286 с.

100. *Прикладная оптика* / [Бибчук Л. Г., Богачев Ю. В., Заказнов Н. П. и др.] – М.: Машиностроение, 1988. – 312 с.
101. *Растрингин Л. А.* Случайный поиск. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
102. *Резников А. Н.* Тепловые процессы в технологических системах / А. Н. Резников, Л. А. Резников. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с.
103. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / Романовский П. И. – М.: Наука, 1973. – 336 с.
104. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана / Рубинштейн Л. И. – Рига: Звайгзне, 1967. – 457 с.
105. *Рыкалин Н. Н.* Основы электронно-лучевой обработки материалов / Рыкалин Н.Н., Зуев И.В., Углов А.А.; М.:Машиностроение, 1978. – 239 с.
106. *Самарский А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
107. *Саркисов П. Д.* Технический анализ и контроль производства стекла и изделий из него / П. Д. Саркисов, А.С. Агарков. – М.: Стройиздат, 1973. – 242 с.
108. *Сахаров Г. И.* Нагрев тел при движении с большими сверхзвуковыми скоростями / Г. И. Сахаров, В. В. Андреевский, В. З. Букреев. – М.: Оборонгиз, 1961. – 287 с.
109. *Свойства элементов. Часть I. Физические свойства. Справочник.* – М.: Металлургия, 1976. – 600 с.
110. *Скурихин В. Б.* Математическое моделирование / В. Б. Скурихин, В. В. Шифрин, В. В. Дубровский. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
111. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики / Соболев С. Л. – М.: Высшая школа, 1972. – 262 с.
112. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ / Сокольников И. С. – М.: Наука, 1971. – 193 с.
113. *Соркин Р. Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе / Соркин Р. Е. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

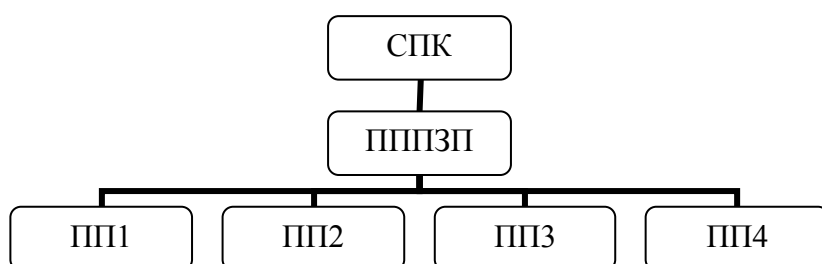
114. *Спеціальні методи обробки оптичного скла*. Навчальний посібник / [М. П. Бочок, Н. П. Будко, В. А. Ващенко та ін.] Чернігівський державний технологічний університет, 2001. – 215 с.
115. *Справочник конструктора оптико-механических приборов* / [Панов В. А., Кругер М. Я., Кулагин В. В. и др.]; Л.: Машиностроение, 1980. – 742 с.
116. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*; [под ред. М. Абрамовица и И. Стиган]. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
117. *Стекло*. Справочник / Под ред. Н. М. Павлушкина. – М.: Стройиздат, 1973. – 487 с.
118. *Температурные измерения*. Справочник. / [Геращенко О. А., Гордов А. Н., Еремина А. К. и др.]. – К.: Наукова думка, 1989. – 704 с.
119. *Теплопроводность твердых тел*. Справочник / [А. С. Охотин, Р. П. Боровикова, Т. В. Нечаева и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.
120. *Теплофизические измерения и приборы* / [Е. С. Платунов, С. Е. Буравой, В. В. Курепин и др.]. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
121. *Тимошенко В. И.* Сверхзвуковые течения вязкого газа / Тимошенко В. И. – К.: Наукова думка, 1987. – 184 с.
122. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1967. – 600 с.
123. *Тойберт П.* Оценка точности результатов измерений / Тойберт П. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 88 с.
124. *Углов А. А.* Математические модели процессов обработки материалов концентрированными потоками энергии / Углов А. А. – Киев.: Наукова думка, 1988. – 168 с.
125. *Углов А. А.* Расчет процессов нагрева при окислении поверхности металла под действием луча лазера / А. А. Углов, И. Ю. Смуров, А. А. Волков // В кн.: “Воздействие концентрированных потоков энергии на металлы”. – М.: Наука. – 1985. – с. 137–141.

126. *Физико-химические* процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии / Под. Ред. С. И. Анисимова, И. Ю. Смурова, С. В. Селищева. – М.: Наука, 1989. – 268 с.
127. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью / Черный Г. Г. – М.: Наука, 1959. – 220 с.
128. *Чубаров Е. П.* Управление системами с подвижными источниками воздействия / Чубаров Е. П. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288 с.
129. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории пограничного слоя / Шевелев Ю. Д. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
130. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Шлихтинг Г. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
131. *Шуп Т.* Решение инженерных задач / Шуп Т. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
132. *Юдин Г. И.* Алгоритм численного решения задачи теплопроводности для тел с включениями / Г. И. Юдин, А. Г. Нарижный, В. Н. Сапрыкин // В кн.: “Самолетостроение и техника воздушного флота”. – Харьков.: ХАИ. – 1984. – вып. 51. – с. 18–23.

ДОДАТКИ

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУНКУ НА ПЕРСОНАЛЬНОМУ КОМП'ЮТЕРІ ІНЖЕНЕРНО- ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЗАВДАНЬ ЕЛЕКТРОННОЇ ОБРОБКИ ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Для ефективного розв'язання розглянутих в навчальному посібнику задач електронної обробки оптичних матеріалів, які знаходять широке застосування в оптичному приладобудуванні на персональних комп'ютерах, був розроблений спеціалізований програмний комплекс, що містить пакети прикладних програм (ППП) загального призначення (ПППЗП "ПП1"- "ПП4") по основним чисельним методам розв'язання обчислювальних задач.



Склад спеціалізованого програмного комплексу

Програмний комплекс складається з чотирьох спеціалізованих ППП, що містять 160 програмних модулів по сучасним чисельним методам.

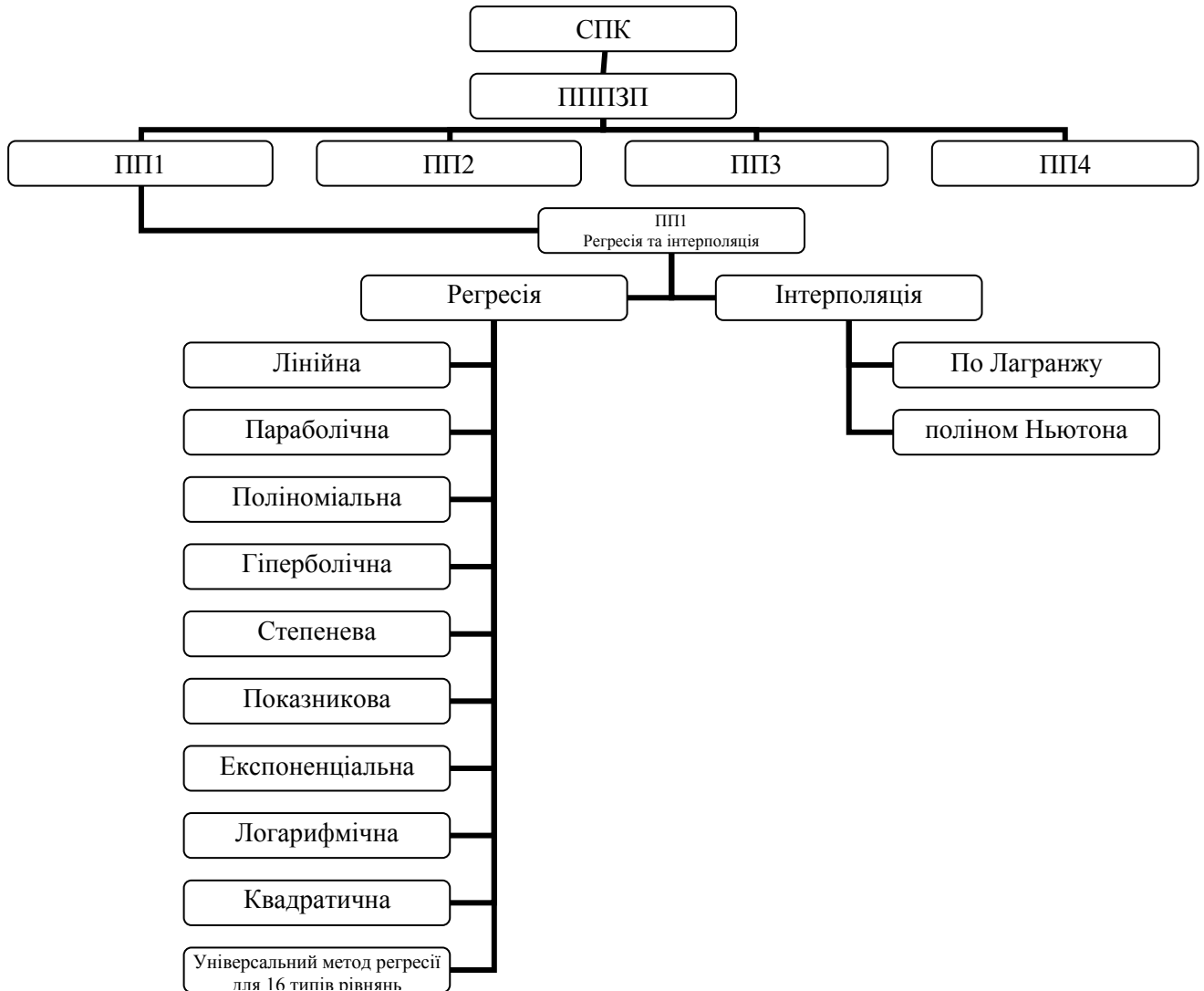
Ефективність вказаних ППП була встановлена в результаті проведення обширних чисельних експериментів, в діалоговому режимі було вирішено більше 400 інженерно-технологічних задач по електронній обробці оптичних матеріалів.

Пакети програм працюють як під операційною системою DOS, так і під операційними системами сімейства Windows. Вхід в пакет здійснюється запуском відповідного виконуваного файлу (Pp1.exe, Pp2.exe тощо). Вихід з пакету здійснюється натисненням клавіші F10 (у деяких при натисненні клавіші ESC або ВИХІД). У нижньому рядку екрану виводиться призначення клавіш, за допомогою яких можна управляти пакетами.

У ППП включені основні з сучасних чисельних методів розв'язання лінійних та нелінійних, одиночних та систем алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, одиничних та систем звичайних диференціальних рівнянь 1-го та 2-го порядку, диференціальних рівнянь в часткових похідних 2-го порядку, крайових задач для звичайних та диференціальних рівнянь в часткових похідних 2-го порядку, інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, а також методів чисельної інтеграції функцій, регресійного аналізу, інтерполяції. Усі чисельні методи пакету реалізовані на алгоритмічній мові Turbo Basic і апробовані на великій кількості тестових прикладів (5...10 прикладів для кожного методу). У число тестових прикладів включені типові вирази для інженерно-технологічних задач, що вимагають проведення розрахунків на ПК. Час розрахунків по тестовим прикладам (як показали обширні чисельні експерименти) знаходяться в межах від декількох секунд до декількох хвилин.

ДОДАТОК А.

Пакет прикладних програм по методам регресії та інтерполяції



Блок-схема пакету прикладних програм загального призначення ППП1

ППП “ППП1” - пакет прикладних програм по методам регресії та інтерполяції, виконаний у вигляді завантажувального програмного модуля. Використовуються наступні види регресії та інтерполяції: лінійна регресія; параболічна регресія; поліноміальна регресія; гіперболічна регресія; степенева регресія; показникова регресія; експоненціальна регресія; логарифмічна регресія; квадратична регресія; універсальний метод регресії для 16 типів рівнянь; інтерполяція по Лагранжу; інтерполяція поліномом Ньютона.

МЕТОДИ РЕГРЕСІЇ І ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Задача регресії полягає у відновленні функціональної залежності $Y(X)$ по результатам вимірювань (X_i, Y_i) , $i=1, 2, \dots, n$. Шукану залежність $Y(X)$ апроксимують функцією $Y(X)=Y(X, a_1, a_2, \dots, a_k)+E$, де a_j – невідомі параметри регресії, E_i - похибка експерименту.

Інтерполяція функції $Y(X)$, заданої $N+1$ вузлами $Y_i(X_i)$, полягає в знаходженні значень Y за значеннями X , які знаходяться в проміжках між вузлами X_i .

Методи регресії:

Метод лінійної регресії	a_0+a_1*X
Метод параболічної регресії	$a_0+a_1*X+a_2*X^2$
Метод поліноміальної регресії	$a_0+a_1*X+a_2*X^2+\dots+a_M*X^M$
Метод гіперболічної регресії	a_0+a_1/X
Метод степінної регресії	$a_0*X^{a_1}$
Метод показникової регресії	$a*v^X$
Метод експоненціальної регресії	$a_0*EXP(a_1*X)$
Метод логарифмічної регресії	$a_0+a_1*\lg(X)$
Метод квадратичної регресії	$a_0+\sum a_1(i)*X(i)+\sum a_2(i)*X(i)^2$

Універсальний метод регресії для 16 типів рівнянь

Методи інтерполяції:

- Інтерполяція по Лагранжу
- Інтерполяція поліномом Ньютона

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод лінійної регресії

У випадку лінійної регресії апроксимуюча функція має вигляд

$$Y(X)=a_0+a_1*X$$

коефіцієнти які обчислюються по формулам:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \cdot \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i}{(n \cdot \sum_{i=1}^n X_i - (\sum_{i=1}^n X_i)^2)}$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i}{(n \cdot \sum_{i=1}^n X_i - (\sum_{i=1}^n X_i)^2)}$$

$$E_1 = \sum_{i=1}^n (Y_i - 1/n \cdot \sum_{i=1}^n Y_i)^2$$

- міра розкиду результатів експерименту

$$E_2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - a_0 - a_1 \cdot X_i)^2$$

- відхилення результатів експерименту від лінійної регресії

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод параболічної регресії

Параболічна регресія забезпечує отримання трьох параметрів a_0, a_1, a_2 наближення параболічною функцією

$$Y(X) = a_0 + a_1 * X + a_2 * X^2$$

з розв'язку системи трьох рівнянь:

$$a_0 * n + a_1 * \sum_{i=1}^n X_i + a_2 * \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$a_0 * \sum_{i=1}^n X_i + a_1 * \sum_{i=1}^n X_i^2 + a_2 * \sum_{i=1}^n X_i^3 = \sum_{i=1}^n X_i * Y_i$$

$$a_0 * \sum_{i=1}^n X_i^2 + a_1 * \sum_{i=1}^n X_i^3 + a_2 * \sum_{i=1}^n X_i^4 = \sum_{i=1}^n X_i^2 * Y_i$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод поліноміальної регресії

Поліноміальна регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$Y(X) = a_0 + a_1 * X + a_2 * X^2 + \dots + a_M * X^M$$

із розв'язку системи рівнянь:

$$C_0 * a_0 + C_1 * a_1 + C_2 * a_2 + \dots + C_k * a_k = D_0$$

$$C_1 * a_0 + C_2 * a_1 + C_3 * a_2 + \dots + C_{k+1} * a_k = D_1$$

.....

$$C_k * a_0 + C_{k+1} * a_1 + C_{k+2} * a_2 + \dots + C_{2k} * a_k = D_k$$

де $C_j = \sum_{i=1}^n X_i^j$ $j=0,1,2,\dots,2*k$

$$D_j = \sum_{i=1}^n X_i^j * Y_i \quad k=0,1,2,\dots,k$$

Поліном степені $k < n$, де n -число пар X_i і Y_i , забезпечує апроксимацію таблично заданої функції $Y_i(X_i)$ з мінімальною середньоквадратичною похибкою

$$E = \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 / (n+1) \right)^{1/2}$$

Метод дозволяє автоматичний вибір степені полінома.

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод гіперболічної регресії

Гіперболічна регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$Y(X)=a_0+a_1/X$$

з розв'язку системи рівнянь:

$$a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n 1/X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n 1/X_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n 1/X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i/X_i$$

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод степеневі регресії

Степінна регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$Y(X)=a_0 \cdot X^{a_1}$$

по формулам:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(X_i) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) - n \cdot \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \cdot \ln(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n \ln(X_i))^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(X_i))^2}$$

$$a_0 = \text{EXP} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \ln(Y_i) - a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \ln(X_i)}{n} \right]$$

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод показникової регресії

Показникова регресія забезпечує отримання параметрів функції

$$Y(X)=A*B^X$$

з розв'язку системи рівнянь:

$$n*\lg A + \lg B * \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \lg Y_i$$

$$\lg A * \sum_{i=1}^n X_i + \lg B * \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i * \lg Y_i)$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод експоненціальної регресії

Експоненційна регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$Y(X)=a_0*EXP(a_1*X)$$

по формулам:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i * \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) - n * \sum_{i=1}^n X_i * \ln(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n X_i)^2 - n * \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$a_0 = EXP\left[\frac{\sum_{i=1}^n \ln(Y_i) - a_1 * \sum_{i=1}^n X_i}{n} \right]$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод логарифмічної регресії

Логарифмічна регресія забезпечує знаходження параметрів функції

$$Y(X)=a_0+a_1*\lg(X)$$

з розв'язку системи рівнянь:

$$a_0*n+a_1*\sum_{i=1}^n \lg(X_i) = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$a_0*\sum_{i=1}^n \lg(X_i) + a_1*\sum_{i=1}^n (\lg(X_i))^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i*\lg(X_i))$$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод квадратичної регресії

- 1 -

Задача апроксимації полягає у відновленні функціональної залежності $Y(X)$ по результатам вимірювань (X_i, Y_i) , $i=1, 2, \dots, N$.
Шукану залежність $Y(X)$ апроксимують функцією $f(X, a_1, a_2, \dots, a_k)$, відповідно, результати вимірювань можна представити у вигляді

$$Y_i=f(X_i, a_1, a_2, \dots, a_k)+E_i,$$

де a_i – невідомі параметри апроксимації,
 E_i - похибка експерименту.

У випадку квадратичної апроксимації апроксимуюча функція має вигляд:

$$Y(X)=A_0+\sum_{i=1}^N A_1(i)*X(i) + \sum_{i=1}^N A_2(i)*X(i)^2 \quad (1)$$

де A_0 - вільний член многочлена

$A_1(i)$ - коефіцієнти многочлена при невідомих першої степені

$A_2(i)$ - коефіцієнти многочлена при невідомих другої степені

N - число відомих

ПРОБЛ-вивід наступного листа опису метода

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Універсальний метод регресії для 16 типів рівнянь

Типи рівнянь:

- 1 $Y(X)=A+B*X$ (лінійна функція)
- 2 $Y(X)=1/(A+B*X)$
- 3 $Y(X)=A+B/X$ (гіперболічна функція)
- 4 $Y(X)=X/(A+B*X)$
- 5 $Y(X)=A*B^X$
- 6 $Y(X)=A*EXP(B*X)$ (експоненціальна функція)
- 7 $Y(X)=A*10^(B*X)$
- 8 $Y(X)=1/(A+B*EXP(-X))$
- 9 $Y(X)=A*X^B$ (ступінна функція)
- 10 $Y(X)=A+B*Ig(X)$ (логарифмічна функція)
- 11 $Y(X)=A+B*ln(X)$
- 12 $Y(X)=A/(B+X)$
- 13 $Y(X)=A*X/(B+X)$
- 14 $Y(X)=A*EXP(B/X)$
- 15 $Y(X)=A*10^(B/X)$
- 16 $Y(X)=A+B*(X^K)$

Введіть тип рівняння = 1

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Інтерполяція по Лагранжу

Інтерполяція функції $Y(X)$, яка задана $N+1$ вузлами $Y_i(X_i)$, полягає в знаходженні значень Y по значенням X , які знаходяться в проміжках між вузлами X_i . При інтерполяції функція $Y(X)$ замінюється інтерполяційним многочленом $P(X)$, значення якого $P(X_i)$ в вузлах точно співпадають з $Y(X_i)$. Значення N точно задає ступінь полінома $P(X)$.

Інтерполяція поліномом Лежандра при довільному розташуванні вузлів в загальному випадку зводиться до обчислення $Y(X)=Ln(X)$ за допомогою інтерполяційного полінома, який має вид:

$$Ln(X) = \frac{(X-X_1)(X-X_2)\dots(X-X_n)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)\dots(X_0-X_n)} * Y_0 + \frac{(X-X_0)(X-X_2)\dots(X-X_n)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)\dots(X_1-X_n)} * Y_1 + \dots + \frac{(X-X_0)(X-X_1)\dots(X-X_{n-1})}{(X_n-X_0)(X_n-X_1)\dots(X_n-X_{n-1})} * Y_n$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Інтерполяція поліномом Ньютона

Інтерполяція функції $Y(X)$, заданої $N+1$ вузлами $Y_i(X_i)$, полягає в знаходженні значень Y по значенням X , які знаходяться в проміжках між вузлами X_i . При інтерполяції функція $Y(X)$ замінюється інтерполяційним многочленом $P(X)$, значення якого $P(X_i)$ в вузлах точно співпадають з $Y(X_i)$. Значення N точно задає степінь полінома $P(X)$.

Інтерполяція з одночасним отриманням коефіцієнтів полінома

$$P(X) = A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_0$$

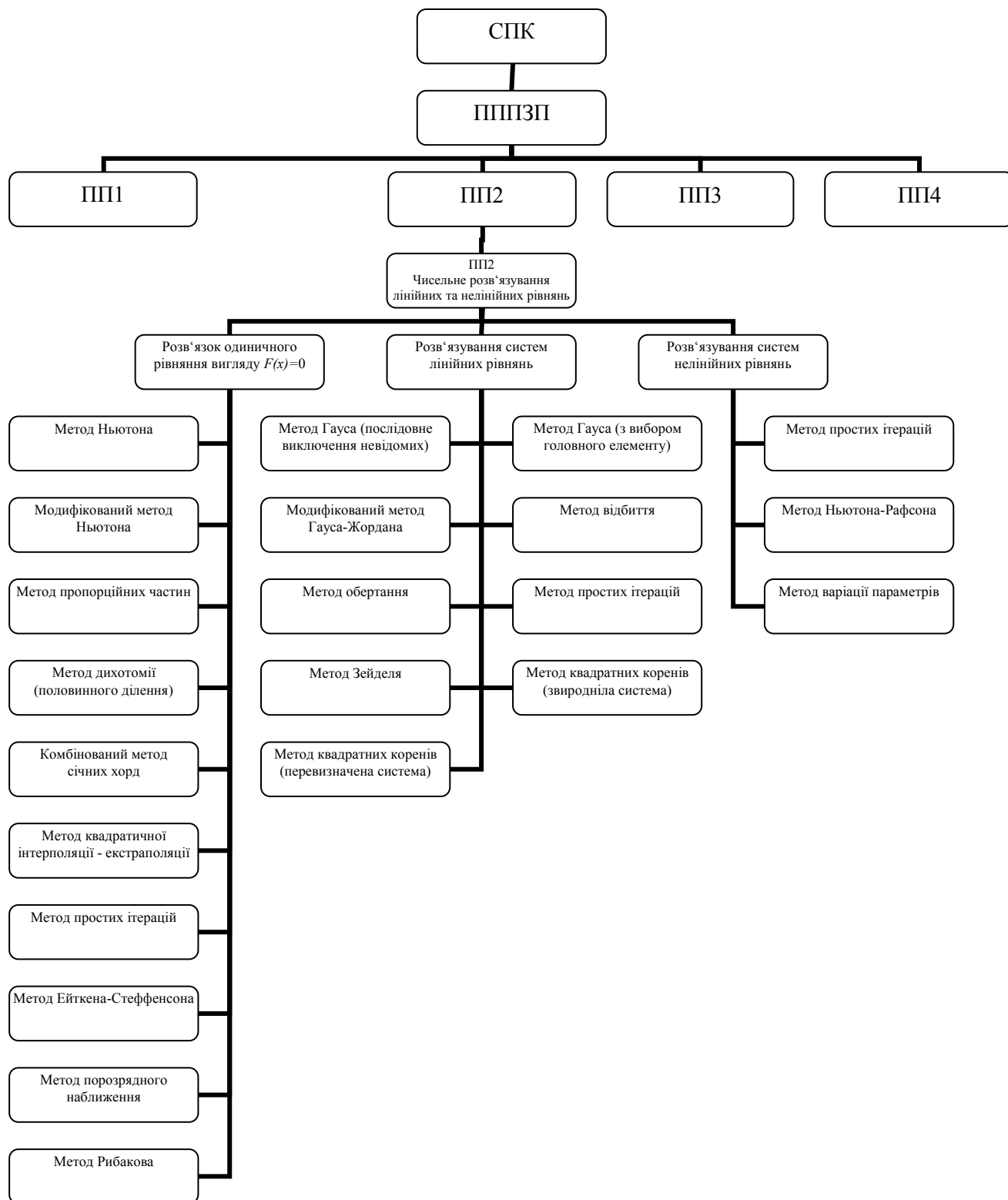
може виконуватися з застосуванням інтерполяційної формули Ньютона:

$$P_{n-1}(X) = Y_1 + (X-X_1) * f(X_1, X_2) + (X-X_1) * (X-X_2) * f(X_1, X_2, X_3) + \dots + (X-X_1) * (X-X_2) * \dots * (X-X_{n-1}) * f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

°-ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

ДОДАТОК Б.

Пакет прикладних програм по методам чисельного розв'язку нелінійних та трансцендентних рівнянь (I частина), а також систем лінійних та нелінійних рівнянь (II частина)



Блок-схема пакету прикладних програм загального призначення ПП2

ППП “ПП2” – пакет прикладних програм по методам чисельного розв’язування лінійних та нелінійних рівнянь, виконаний у вигляді завантажувального модуля. Використовуються наступні методи для знаходження усіх коренів одиначного нелінійного рівняння: метод порозрядного наближення; метод Рібакова. Використовуються наступні методи для знаходження речового коріння одиначного нелінійного рівняння: метод Ньютона; модифікований метод Ньютона; метод пропорційних частин; метод дихотомії (половинного ділення); комбінований метод січних хорд; метод квадратичної інтерполяції - екстраполяції.

Використовуються наступні методи для знаходження речового кореня одиначного нелінійного рівняння (спеціалізовані ітераційні методи): метод простих ітерацій; метод Ейткена-Стеффенсона. Використовуються наступні методи для знаходження речових розв’язків систем лінійних та нелінійних рівнянь: метод Гауса для лінійних систем; метод простих ітерацій для лінійних систем; метод варіації параметрів для нелінійних систем.

І частина

11-01-2010	ПАКЕТ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ	11:48:23
ПО МЕТОДАМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ’ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ		
<p>- знаходження усіх коренів $F(x)=0$:</p> <p style="padding-left: 40px;">Метод порозрядного наближення Метод Рібакова</p> <p>- розв’язок рівняння виду $F(x)=0$:</p> <p style="padding-left: 40px;">Метод Ньютона Модифікований метод Ньютона Метод пропорційних частин Метод дихотомії (половинного поділу) Комбінований метод сікучих-хорд Метод квадратичної інтерполяції-екстраполяції Метод простих ітерацій Метод Ейткена-Стеффенсона</p> <p style="padding-left: 40px;">Для виводу інших методів натисніть F2 !</p>		
°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету		

- знаходження усіх коренів $F(x)=0$:

точність обчислення коренів в усіх рівняннях даного розділу: $EPS = 10^{-5}$

Рівняння 1

$$A * X + B * X^{0.5} + C * X^{1/3} + D = 0$$

Задаємо параметри: $A = 1$ $B = 1$ $C = 1$ $D = -2,50$

Задаємо вихідні дані: кінці інтервалу: лівий $A = 0,40$ правий $B = 1$
 початкове наближення $X_0 = 0.737619$
 число кроків, за яке знайдено розв'язок: $N = 3$

11-01-2010	Метод порозрядного наближення	11:59:09
=====		
Рівняння 1		

$A * X + B * X^{0.5} + C * X^{1/3} + D = 0$		
Максимальне число видів = 25		
°ПРОБЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів		

11-01-2010	Метод Робакова	11:59:09
=====		
Рівняння 1		

$A * X + B * X^{0.5} + C * X^{1/3} + D = 0$		
Максимальне число видів = 25		
°ПРОБЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів		

Результат знаходження коренів рівняння:

- метод порозрядного наближення: $X_1 = 0,7378082275390625$
- метод Робакова: $X_1 = 0,7376875281333923$

11-01-2010

11:59:09

Метод Ньютона

Рівняння 1

$$A * X + B * X^{0.5} + C * X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Модифікований метод Ньютона

Рівняння 1

$$A * X + B * X^{0.5} + C * X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Результат знаходження коренів рівняння:

- метод Ньютона:

$X_1 = 0,7376202312110923$

- модифікований метод Ньютона:

$X_1 = 0,7376192212104797$

Метод пропорціональних частин

Розв'язок нелінійних алгебраїчного чи трансцендентного рівняння $F(X)=0$, здійснюється методом хорд (метод пропорціональних частин), та вважає уточнення кореня на заданому інтервалі $[A, B]$.

Обчислювальна схема метода реалізується наступним образом:

1) Вважають X_0 рівним значенню лівого кінця заданого інтервалу, X_1 - значенню правого кінця інтервалу.

2) На кожному кроці ітераційного процесу обчислюється наближення X до кореню по формулі:

$$X = \frac{X_0 * F(X_1) - X_1 * F(X_0)}{F(X_1) - F(X_0)}$$

3) Перевіряють виконання нерівності:

$$ABS(F(X)) \leq EPS$$

і якщо нерівність виконується, X - рішення рівняння $F(X)$, в супротивному випадку обчислення продовжуються.

4) Якщо X - не корінь і $F(X) < 0$, то вважають $X_0 = X$, в супротивному випадку, тобто при $F(X) > 0$ вважають X_1 рівним X і повторюють обчислення з п.2 .

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод дихотомії (половинного поділу)

Метод половинного поділу призначений для розв'язку алгебраїчних та трансцендентних рівнянь $F(X)=0$ на відрізку $[A, B]$, де знаходиться ізольований корінь.

В програмі реалізований такий алгоритм:

$$X = (X_0 + X_1) / 2$$

Початково $X_0 = A$, $X_1 = B$, де A і B - кінці відрізка, на якому обчислюється корінь рівняння.

Обчислюється $F((X_0 + X_1) / 2)$.

Якщо $ABS(F((X_0 + X_1) / 2)) < EPS$ (EPS - задана точність), то X вважаємо наближеним значенням кореня. Якщо ця умова не виконується, то за кінці інтервалу приймаються значення X, X_0, X_1 , де значення функції в цих точках мають протилежні знаки.

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Результат знаходження коренів рівняння:

- метод пропорційних частин:

$$X_1 = 0,7376288175582886$$

- метод дихотомії (половинного поділу):

$$X_1 = 0,7376464605331421$$

11-01-2010

11:59:09

Комбінований метод сікучих-хорд

Система 1

$$A \cdot X + B \cdot X^{0.5} + C \cdot X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод квадратичної інтерполяції-екстраполяції

Система 1

$$A \cdot X + B \cdot X^{0.5} + C \cdot X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Результат знаходження коренів рівняння:

- комбінований метод сікучих-хорд:

$$X_1 = 0,7376192212104797$$

- метод квадратичної інтерполяції-екстраполяції:

$$X_1 = 0,7376192808151245$$

11-01-2010

11:59:09

Метод простих ітерацій

Система 1

$$A \cdot X + B \cdot X^{0.5} + C \cdot X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБІЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Ейткена-Стеффенсона

Система 1

$$A \cdot X + B \cdot X^{0.5} + C \cdot X^{(1/3)} + D = 0$$

Максимальне число видів = 25

°ПРОБІЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Результат знаходження коренів рівняння:

- метод простих ітерацій:

$$X_1 = 0,7376192212104797$$

- метод Ейткена-Стеффенсона:

$$X_1 = 0,7376192808151245$$

Розв'язок систем лінійних рівнянь

Метод Гаусса (послідовне виключення невідомих)
Метод Гаусса (з вибором головного елемента)
Модифікований метод Гаусса-Жордана
Метод відбиття
Метод обертання
Метод простих ітерацій
Метод Зейделя
Метод квадратних коренів (вироджена система)
Метод квадратних коренів (перевизначена система)

Розв'язок систем нелінійних рівнянь

Метод простих ітерацій
Метод Ньютона-Рафсона
Метод варіації параметрів

Для виводу інших методів натисніть F2 !

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Задайте вихідні дані:

число невідомих N = 3

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод Гаусса (з вибором головного елемента)

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Модифікований метод Гаусса-Жордана

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод відбиття

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод обертання

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод простих ітерацій

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод Зейделя

Задайте вихідні дані:

число невідомих $N = 3$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод квадратних коренів (вироджена система)

**Наближене обчислення нормального розв'язку СЛАР
з виродженою матрицею методом квадратних коренів
(при $T=0$ розв'язується звичайна система рівнянь)**

вхідні параметри:

N - число рівнянь системи

A(N*N)- масив коефіцієнтів системи

B(N) - стовбець вільних членів

T - параметр наближення

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод квадратных корней (переопределенная система)

Задайте вихідні дані:

число невідомих **N = 3**

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:59:09

Метод простих ітерацій

Система 1

$$X(1)^2 + X(2)^2 - X(1) + 0.171875 = 0$$

$$X(1) * X(2) - X(2) + 0.09375 = 0$$

Максимальне число видів = 9

°ПРОБІЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Ньютона-Рафсона

Система 1

$$X(1)^2 + X(2)^2 - X(1) + 0.171875 = 0$$

$$X(1) * X(2) - X(2) + 0.09375 = 0$$

Максимальне число видів = 9

°ПРОБІЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Метод варіації параметрів

Система 1

$$X(1)^2 + X(2)^2 - X(1) + 0.171875 = 0$$

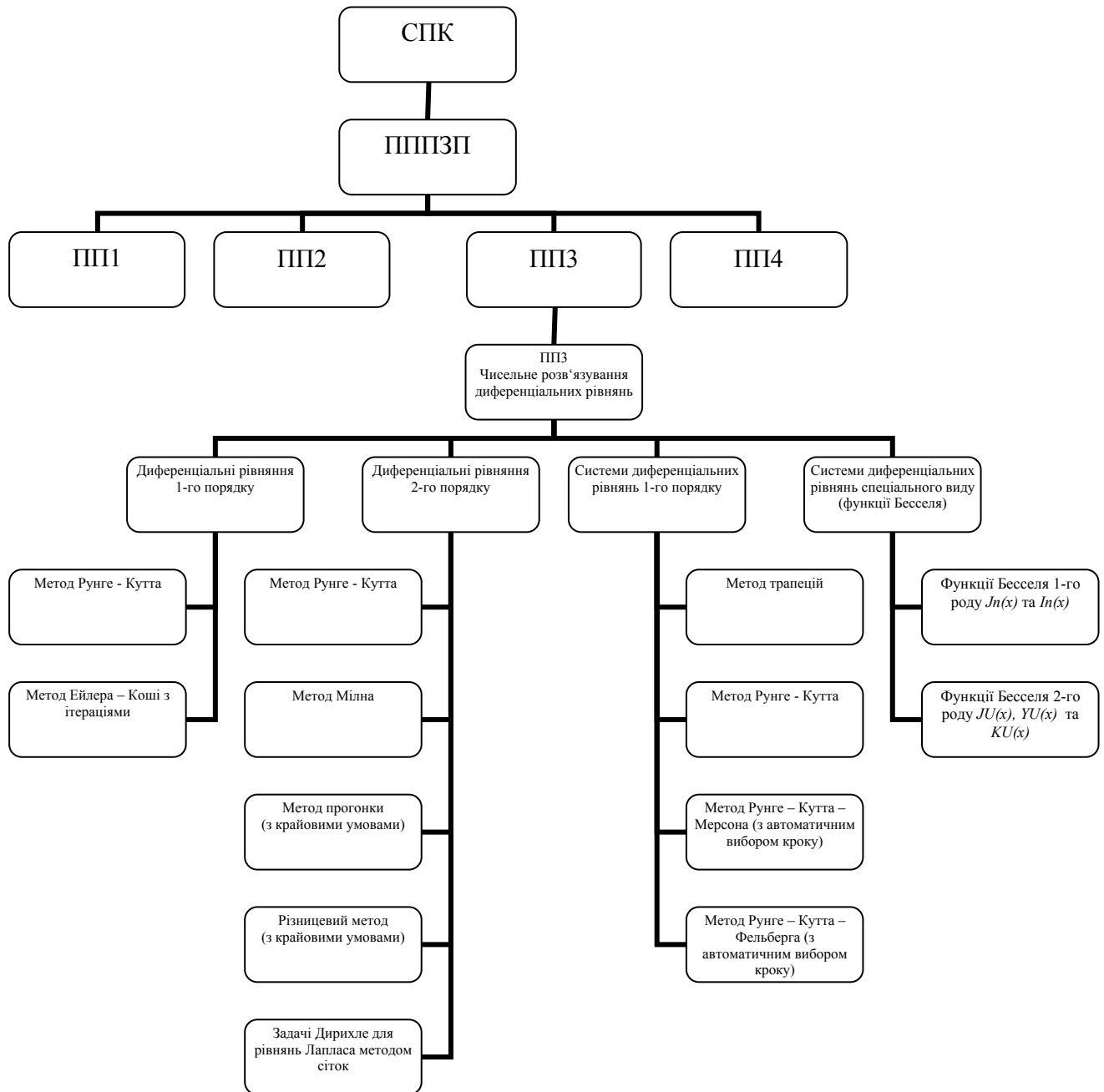
$$X(1) * X(2) - X(2) + 0.09375 = 0$$

Максимальне число видів = 9

°ПРОБІЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

ДОДАТОК В.

Пакет прикладних програм по методам чисельного розв'язку диференціальних рівнянь



Блок-схема пакету прикладних програм загального призначення ППЗ

ППП “ППЗ” – пакет прикладних програм по методах чисельного розв'язування диференціальних рівнянь. Файл виконаний у вигляді завантажувального програмного модуля. Використовуються наступні методи для розв'язування диференціальних рівнянь 1-го порядку: метод Рунге-

Кутта; метод Ейлера-Коші з ітераціями. Використовуються наступні методи для розв'язування диференціальних рівнянь 2-го порядку: метод Рунге-Кутта; метод Мілна; метод прогону (з крайовими умовами); різницевий метод (з крайовими умовами). Використовуються наступні методи для розв'язування систем диференціальних рівнянь 1-го порядку: метод трапецій, Рунге-Кутта.

11-01-2010	ПАКЕТ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ ПО МЕТОДАМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ	11:48:23
<p>Призначення пакета полягає в розв'язку диференціальних рівнянь чи систем.</p> <p>Розв'язок диференціальних рівнянь 1-го порядку</p> <ul style="list-style-type: none"> Метод Рунге-Кутта Метод Ейлера-Коші з ітераціями <p>Розв'язок диференціальних рівнянь 2-го порядку</p> <ul style="list-style-type: none"> Метод Рунге-Кутта Метод Мілна Метод прогонки (з крайовими умовами) Різничний метод (з крайовими умовами) Задача Дирихле для рівняння Лапласа методом сіток <p>Розв'язок систем диференціальних рівнянь 1-го порядку</p> <ul style="list-style-type: none"> Метод трапецій Метод Рунге-Кутта Метод Рунге-Кутта-Мерсона (автомат. вибір кроку) Метод Рунге-Кутта-Фельберга (автомат. вибір кроку) <p>Обчислення функцій Бесселя</p> <ul style="list-style-type: none"> Функції Бесселя 1-го роду $J_n(x)$ і $I_n(x)$ Функції Бесселя 2-го роду $JU(x)$, $YU(x)$ і $IU(x)$, $KU(x)$ <p>°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету</p>		

11-01-2010	Метод Рунге-Кутта	11:48:23
<p>Метод Рунге-Кутта призначений для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку виду:</p> $Y' = F(X, Y)$ <p>з початковою умовою $Y(X_0) = Y_0$ на інтервалі $[X_0, X_K]$.</p> <p>°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету</p>		

Метод Ейлера-Коші з ітераціями

Метод Ейлера-Коші з ітераціями призначений для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку виду:

$$Y' = F(X, Y)$$

з початковою умовою $Y(X_0) = Y_0$ на інтервалі $[X_0, X_K]$ з кроком H .

Початкове наближення до розв'язку визначається за формулою:

$$Y_i(0) = D_i + F(X(i-1), Y(i-1)) * H/2$$

де $D_i = B + F(X(i-1), Y(i-1)) * H/2$

i -номер точки, в якій шукається розв'язок

$B = Y_i$

$$Y_i(k) = D_i + F(X(i-1), Y_i(k-1)) * H/2, \quad k\text{-номер ітерації}$$

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Рунге-Кутта

Рівняння 1

$$Y'' = (d + f * Y^2) * Y' + (a * X^2 + b * X + c) * Y$$

Максимальне число видів = 14

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Метод Мілна

Метод Мілна призначений для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку виду:

$$Y'' = F(X, Y, Y')$$

з початковими умовами: $Y(X_0) = Y_0$, $Y'(X_0) = Y_1$ на інтервалі $[X_0, X_K]$.

В програмі реалізується наступний алгоритм:

Початкове наближення до $Y(i+1)$ визначається за прогнозуючою формулою Мілна:

$$P = D + 4 * H / 3 * (2 * U - S + 2 * R)$$

Для покращення початкового наближення використовується виправляюча формула Мілна:

$P_1(k) = B + (F(T, Y^{(k-1)}, P) + 4 * R + S) * H / 3$,
де $Y^{(k-1)} = W + (P + 4 * A + B) * H / 3$, k -номер ітерації.

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод прогонки (з крайовими умовами)

Метод прогонки призначений для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку виду:

$$U(X) * Y'' + V(X) * Y' + W(X) * Y = F(X)$$

на інтервалі $[X_0, X_K]$ з крайовими умовами:

$$A * Y(X_0) + B * Y'(X_0) = B$$

$$C * Y(X_K) + D * Y'(X_K) = E$$

Пряма прогонка здійснюється по формулам:

$$P(1) = 2 * B * U(1) / [2 * U(1) * (B - A * H) + H^2 * (A * V(1) - B * W(1))]$$

$$Q(1) = [-B * H^2 * F(1) + B * H * (V(1) * H - B * W(1))] / [2 * U(1) * (B - A * H) + H^2 * (A * V(1) - B * W(1))]$$

$$P(k) = -(2 * U(k) + V(k) * H) / [2 * H^2 * W(k) + (2 * U(k) - V(k) * H) * P(k-1) - 4 * U(k)]$$

$$2 * H^2 * F(k) - (2 * U(k) - V(k) * H) * Q(k-1)$$

$$Q(k) = -P(k) * \frac{2 * H^2 * F(k) - (2 * U(k) - V(k) * H) * Q(k-1)}{2 * U(k) + V(k) * H} \quad \text{при } k=2, 3, \dots, N$$

Зворотню прогонку здійснюємо по формулам:

$$E * H * (2 * U(N+1) + V(N+1) * H) - D * (H^2 * F(N+1) - 2 * U(N+1) * Q(N))$$

$$Y(N+1) = \frac{E * H * (2 * U(N+1) + V(N+1) * H) - D * (H^2 * F(N+1) - 2 * U(N+1) * Q(N))}{C * H * (2 * U(N+1) + V(N+1) * H) - D * (2 * U(N+1) * (P(N) - 1) + W(N+1) * H^2)}$$

$$Y(k) = P(k) * Y(k+1) + Q(k) \quad k=N, N-1, \dots, 1$$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Різницевий метод (з крайовими умовами)

Різницевий метод призначений для розв'язку диференційних рівнянь в часткових похідних

$$\frac{D^2 U}{DT^2} = \frac{D^2 U}{DX^2}$$

де X з $[X_0, X_K]$ з кроком H , T з $[T_0, T_K]$ з кроком HT

$U = F(X)$ і крайові умови: $U(X_0, T)$ і $U(X_K, T)$

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Задача Дирихле для рівняння Лапласа методом сіток

Рівняння 1

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad X_0 < x < X_K, \quad Y_0 < y < Y_K = 0$$

Крайові умови:

$$U(0, Y) = 0, \quad U(1, Y) = Y \quad \text{для } Y \in [0; 1]$$

$$U(X, 0) = 0, \quad U(X, 1) = X \quad \text{для } X \in [0; 1]$$

Максимальне число видів = 5

°ПРОБЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод трапецій

Система 1

$$Y1\ddot{I}=Y(2)$$
$$Y2\ddot{I}=(Y(1)/X-Y(2))/X-Y(1)$$

Максимальне число видів = 4

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Рунге-Кутта

Система 1

$$Y1\ddot{I}=Y(2)$$
$$Y2\ddot{I}=(Y(1)/X-Y(2))/X-Y(1)$$

Максимальне число видів = 4

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Рунге-Кутта-Мерсона (автоматичний вибір кроку)

Система 1

$$Y1\ddot{I}=Y(2)$$
$$Y2\ddot{I}=(Y(1)/X-Y(2))/X-Y(1)$$

Максимальне число видів = 4

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Рунге-Кутта-Фельберга (автоматичний вибір кроку)

Система 1

$$Y1\ddot{I}=Y(2)$$
$$Y2\ddot{I}=(Y(1)/X-Y(2))/X-Y(1)$$

Максимальне число видів = 4

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:48:23

Функції Бесселя 1-го роду $J_n(X)$ и $I_n(x)$

Обчислення функцій Бесселя 0 -го порядку:

Задайте вихідні дані:

Введіть -1 для $JN(X)$ чи 1 для $IN(X)$: =-1

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

11-01-2010

11:48:23

Функції Бесселя 2-го роду $JU(X)$, $YU(X)$ и $IU(x), KU(X)$

Обчислення функцій Бесселя 1 -го порядку:

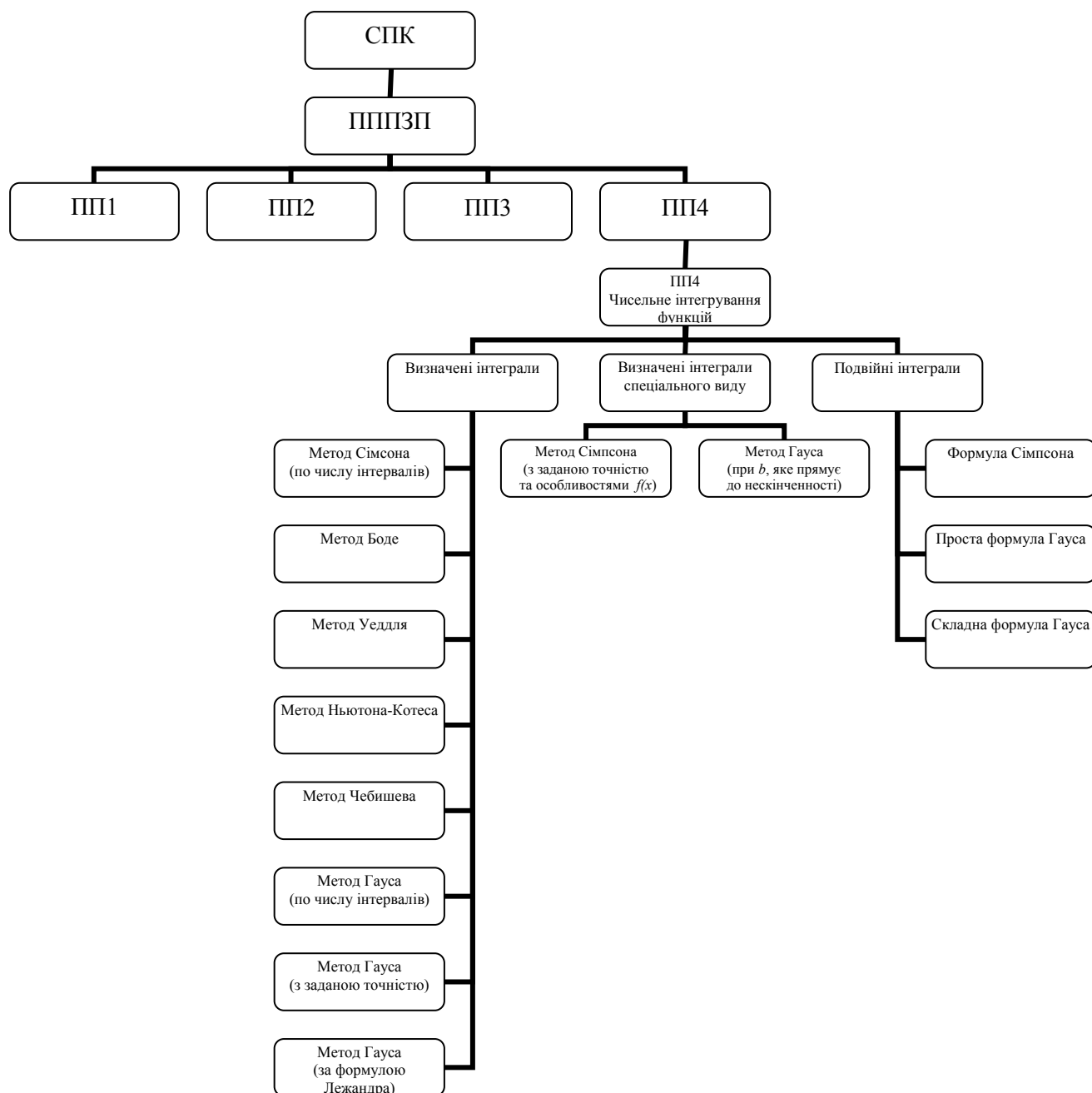
Задайте вихідні дані:

Введіть 0 для $JU(X), YU(X)$ чи 1 для $IU(X), KU(X)$: =-1

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

ДОДАТОК Г.

Пакет прикладних програм по методам чисельного інтегрування функцій



Блок-схема пакету прикладних програм загального призначення ПП4

ППП “ПП4” - пакет прикладних програм по методам чисельного інтегрування функцій. Файл виконаний у вигляді завантажувального програмного модуля. Використовуються наступні методи обчислення певних інтегралів: метод Сімсона (по числу інтервалів інтеграції); метод Боде; метод Уеддлія; метод Ньютона-Котеса; метод Чебишева; метод Гауса (по числу інтервалів інтеграції); метод Гауса (із заданою точністю); метод Гауса (за

формулою Лежандра). Використовуються наступні методи обчислення певних інтегралів спеціального вигляду: метод Сімпсона (із заданою точністю і особливостями підінтегральної функції); метод Гауса (при одній з меж інтеграції, яка прагне до нескінченності). Використовуються наступні методи обчислення подвійних інтегралів: по формулі Сімпсона; по простій формулі Гауса; по складній формулі Гауса.

11-01-2010	ПАКЕТ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ ПО МЕТОДАМ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ	11:48:23
<p>Призначення пакету полягає в обчисленні інтегралів.</p> <p>Визначені інтеграли Метод Сімпсона (по числу інтервалів інтегрування) Метод Боде Метод Уеддля Метод Ньютона-Котеса Метод Чебишева Метод Гауса (по числу інтервалів інтегрування) Метод Гауса (з заданою точністю) Метод Гауса (по формулі Лежандра)</p> <p>Визначені інтеграли спеціального виду Метод Сімпсона (з заданою точністю і особливістю f(X)) Метод Гауса (при В -> до нескінченності)</p> <p>Подвійні інтеграли Формула Сімпсона Проста формула Гауса Складна формула Гауса</p> <p>°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету</p>		

11-01-2010	Метод Сімпсона (по числу інтервалів інтегрування)	11:48:23
<p>В основі метода Сімпсона обчислення інтеграла покладена складена формула Сімпсона :</p> $\int_a^b f(x) dx = \frac{H}{6} * [y_0 + 2 * [y_2 + y_4 + \dots + y_{(2m-2)}] + 4 * [y_1 + y_3 + \dots + y_{(2m-1)}] + y_{(2m)} + R_1]$ <p>де [a,b] - відрізок інтегрування $x(i) = a + i * H$ $H = (b - a) / n$ $n = 2 * m$ - парне число розбиття відрізка [a,b]</p> <p>За наближене значення інтегралу, обчислене по формулі Сімпсона з поправкою по Рунге, приймають $INTEGRAL = I(2n) + [I(2n) - I(n)] / 15$</p> <p>Похибка оцінюється величиною $ER = [I(2n) - I(n)] / 15$</p> <p>°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету</p>		

Метод Бодє

Чисельне інтегрування полягає в інтерполяції підінтегральної функції $f(X)$ на відрізку $[A,B]$ поліномом, що підходить для якого інтеграл обчислюється по формулам чисельного інтегрування.

Зазвичай відрізок $[A,B]$ розбивається на N частин, до кожної з яких застосовується відповідна проста формула. Таким чином отримують складові формули чисельного інтегрування.

Метод Бодє оснований на застосування до кожного з N відрізків розбиття $[A,B]$ формули:

$$I = \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2 \cdot N}{45} * (7 \cdot y_0 + 32 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 32 \cdot y_3 + 7 \cdot y_4) - \frac{8 \cdot N^7}{945} * f_4(e),$$

де $N = (B-A)/N$

$f_4(e)$ - значення четвертої похідної $f(x)$ в точці $x=e$, де вона максимальна.

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Уеддлє

Чисельне інтегрування полягає в інтерполяції підінтегральної функції $f(X)$ на відрізку $[A,B]$ поліномом, який підходить для якого інтеграл обчислюється по формулам численого інтегрування.

Зазвичай відрізок $[A,B]$ розбивається на N частин, до кожної з яких застосовується відповідна проста формула. Таким чином отримують складові формули чисельного інтегрування.

Метод Уеддлє оснований на застосування до кожного з N відрізків розбиття $[A,B]$ формули:

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{3 \cdot N}{10} * (y_0 + 5 \cdot y_1 + y_2 + 6 \cdot y_3 + y_4 + 5 \cdot y_5 + y_6) + \frac{47 \cdot N^7}{12700} * f_4(e),$$

де $N = (B-A)/N$

$f_4(e)$ – значення четвертої похідної $f(x)$ в точці $x=e$, де вона максимальна.

°ПРОБЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Ньютона-Котеса

Чисельне інтегрування полягає в інтерполяції підінтегральної функції $f(X)$ на відрізку $[A,B]$ поліномом, який підходить для якого інтеграл обчислюється по формулам численного інтегрування.

Зазвичай відрізок $[A,B]$ розбивається на N частин, до кожної з яких застосовується відповідна проста формула. Таким чином отримують складові формули чисельного інтегрування.

Метод Ньютона-Котеса оснований на застосування до кожного з N відрізків розбиття $[A,B]$ формули:

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \frac{H}{140} * (41*y_0 + 216*y_1 + 27*y_2 + 272*y_3 + 27*y_4 + 216*y_5 + 41*y_6) - \frac{9*H^9}{1400} * f_8(e),$$

де $H = (B-A)/N$

$f_8(e)$ – значення восьмої похідної $f(x)$ в точці $x=e$, де вона максимальна.

°ПРОБЛЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Чебишева

Формула для інтегрування 1

$$f(X) = (A * X^2 + B * X + C) * \text{EXP}(-(z-X)^2 / (4 * a^2 * t))$$

Максимальне число видів = 19

°ПРОБЛЛ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Гаусса (по числу інтервалів інтегрування)

Формула для інтегрування 1

$$f(X)=(A * X^2+B * X+C) * \text{EXP}(-(z-X)^2/(4 * a^2 * t))$$

Максимальне число видів = 19

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

11-01-2010

11:59:09

Метод Гаусса (з заданою точністю)

Формула для інтегрування 1

$$f(X)=(A * X^2+B * X+C) * \text{EXP}(-(z-X)^2/(4 * a^2 * t))$$

Максимальне число видів = 19

°ПРОБЛІ-огляд формул ВВЕДЕННЯ-вибір формули F2-огляд методів

Метод Гаусса (по формулі Лежандра)

Обчислення інтегралів по методу Гаусса реалізується по такому алгоритму:

$$\text{ИНТЕГРАЛ} = C/2 + \sum_{i=1}^8 f((A+B+C*T(i)/2)*D(i)),$$

де [A,B] - відрізок інтегрування,

$$C = B - A$$

T(i) - нулі полінома Лежандра:

$$T(1) = -0.96028986 \quad T(2) = -0.79666648 \quad T(3) = -0.52553242 \quad T(4) = -0.18343464 \\ T(5) = 0.18343464 \quad T(6) = 0.52553242 \quad T(7) = 0.79666648 \quad T(8) = 0.96028986$$

D(i) - коефіцієнти формули:

$$D(1) = 0.10122854 \quad D(2) = 0.22238104 \quad D(3) = 0.31370664 \quad D(4) = 0.36268378 \\ D(5) = 0.36268378 \quad D(6) = 0.31370664 \quad D(7) = 0.22238104 \quad D(8) = 0.10122854$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Сімпсона (з заданою точністю та особливостями f(X))

Невласними інтегралами називаються інтеграли, в яких f(x) прямує до нескінченності на відріжку [A,B], або f(A) або f(B) прямує до нескінченності.

Якщо f(x) має на кінцях границі інтегрування видаткову особливість, наприклад невизначеність виду 0/0 чи неск/неск, застосовують метод Сімпсона з окремим введенням значень f(A) або f(B).

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Метод Гаусса (при $B \rightarrow$ до нескінченності)

Невласний інтеграл виду
неск B

$$I = \int_A^{\infty} f(x) dx = \int_A^B f(x) dx + I$$

обчислюється як звичайний при виборі додаткової проміжної
границі інтегрування

неск

$$I = \int_B^{\infty} f(x) dx < E, \quad \text{де } E - \text{ задана похибка інтегрування.}$$

Відбувається автоматичне змінення B ,
як $B_0, 2B_0, 4B_0$ тощо, де B_0 -початкове
значення B з контролем на кожній i -ой стадії
умови $I(i) - I(i-1) < E$.
При виконанні цієї умови розрахунок припиняється.

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Формула Сімпсона

Подвійні (кратні) інтеграли обчислюються по кубатурній формулі Сімпсона.
При цьому область інтегрування в площині X, Y розбивається на чотири квадрати
і значення інтегралу обчислюється по формулі:

$$I = \int_A^B \int_C^D f(x,y) dx dy = \frac{H_X * H_Y}{9} * \{ [f(x_0,y_0) + f(x_2,y_0) + f(x_0,y_2) + f(x_2,y_2)] + \\ + 4 * [f(x_1,y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_2,y_1) + f(x_1,y_2)] + 16 * f(x_1,y_1) \}$$

де $[A, B]$ - відрізок інтегрування по X
 $[C, D]$ - відрізок інтегрування по Y
 $H_X = (B - A) / 2$ $H_Y = (D - C) / 2$

°ПРОБЛІ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Проста формула Гаусса

Подвійні (кратні) інтеграли обчислюються по кубатурній формулі Гаусса. При цьому область інтегрування в площині X,Y розбивається на два квадрати і значення інтегралу обчислюється по формулі:

$$I = \int_A^B \int_C^D f(x,y) dx dy = HX * HY * [f(x1,y1) + f(x2,y2) + f(x3,y3) + f(x4,y4)]$$

де [A,B] - відрізок інтегрування по X

[C,D] - відрізок інтегрування по Y

$$HX = (B-A)/2 \quad HY = (D-C)/2$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Складна формула Гаусса

Подвійні (кратні) інтеграли виду $I = \int_A^B \int_C^D f(x,y) dx dy$

обчислюються по складній кубатурній формулі Гаусса, яка реалізується розбиттям відрізка [A,B] на N і відрізка [C,D] на M частин з застосуванням для кожного елементарного прямокутника формули :

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = HX * HY * [f(x1,y1) + f(x2,y2) + f(x3,y3) + f(x4,y4)]$$

де [A,B] ([a,b]) - відрізок інтегрування по X

[C,D] ([c,d]) - відрізок інтегрування по Y

$$HX = (b-a)/2 \quad HY = (d-c)/2$$

°ПРОБІЛ-наст. метод ВВЕДЕННЯ-вибір методу для розрахунку F10-вихід із пакету

Навчальне видання

Ващенко В'ячеслав Андрійович
Антонюк Віктор Степанович
Тимчик Григорій Семенович
Яценко Ірина В'ячеславівна
Бондаренко Максим Олексійович
Кириченко Оксана В'ячеславівна
Рудь Максим Петрович

**Основи теплоперенесення
в елементах
оптичного приладобудування**

Навчальний посібник

В авторській редакції

Надруковано з оригінал-макета замовника

Темплан 2012 р., поз. 1-2-003

Підп. до друку 10.01.2012. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк. арк. 23, 95. Обл.-вид. арк. 39,82. Наклад 100 пр. Зам. № 12-2.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
тел. (44) 406-81-78



ВПІ ВПК «Політехніка»