УДК 681.317

Т.А. Лисак
Національний університет"Львівська політехніка",
кафедра ЕОМ

ПРО ОДИН КЛАС ІТЕРАЦІЙНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЖОРСТКИХ ЗАДАЧ

Пропонуються нові неявні однокрокові методи дробово-раціонального вигляду розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь, які мають необхідні властивості за точністю та стійкістю і не вимагають обернення матриці Якобі, яка для жорстких систем, як правило, є погано обумовленою і її обернення стає досить проблематичним. Розглядаються реалізації методів 1-4 порядків точності і різних типів стійкості.

A new non-obvious one-step fractional-rational type methods for solving stiff system's of differential equations are proposed here. These do not reqiure the Jakobi matrix conversion, which as usually, is not suitable for stiff systems and is very problematical. Realization of methods of 1st-4th orders of exactness and different types of stability is investigated.

Розв'язання конкретних прикладних задач передбачає створення математичної моделі об'єкта. Необгрунтоване нехтування різного роду "малими величинами" при математичному моделюванні реальних процесів може суттєво спотворити істинну картину явищ. Тому в системах рівнянь, які описують ще не досліджений процес, розробник мусить враховувати велику кількість на перший погляд другорядних факторів. Наслідком цього, як правило, є з одного боку відносно високий порядок системи, з іншого – її жорсткість. Суть явища жорсткості полягає в необхідності застосування для опису процесу в будь-якій точці відрізку спостереження швидкоспадаючих функцій і одночасно повільнозмінних функцій. При числовому інтегруванні жорстких систем диференціальних рівнянь класичними методами доводиться використовувати дуже малий крок інтегрування порівняно із заданим інтервалом інтегрування, навіть якщо шукані функції в стаціонарному режимі змінюються досить повільно. Спроба збільшення кроку інтегрування може призвести до значного зростання похибок.

Особливо часто жорсткі системи з'являються при моделюванні явищ, де розкид часових характеристик закладений в самій їх фізичній природі. Прикладами цього можуть бути задачі з електротехніки, хімічної кінетики, гідравліки, пневматики, опис складних систем шляхом формального об'єднання різнотипних підсистем, вивчення динаміки роботи ядерного реактора, дослідження в галузі оптимізації управління тощо. У подібних випадках зазвичай виділяється малий множник при похідній, а компоненти вектора розв'язання поділяються на "швидкі" та "повільні".

У роботі наводяться неявні дробово-раціонального вигляду однокрокові наближення розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, які мають необхідні властивості за точністю та стійкістю. За допомогою ітераційного процесу вони реалізовані на системах, не вимагаючи обернення матриці Якобі, яка у більшості випадків для жорстких систем є погано обумовленою і її обернення стає практично нереальним. Пропонуються однокрокові реалізації методів 1–4 порядків точності і різних типів стійкості.

Для розв'язання задачі Коші

$$Y' = F(x, y), \qquad Y(x_0) = Y_0$$

застосовується такий інтераційний процес:

$$Y_{n+1,m+1}^{[p]} = Y_{n-1,m}^{[p]} + \frac{U_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right) + \left(Y_n - Y_{n+1,m}^{[p]}\right)}{1 + \dfrac{U_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right) - V_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right)}{U_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right) + \left(Y_n - Y_{n+1,m}\right)}},$$

де p – порядок методу, m – номер ітерації, $Y_{n+1,m}^{[p]}$ – наближення m-ої ітерації розв'язання задачі Коші у вузлі x_n методом p-го порядку, $Y_{n+1,0}^{[p]} = y_n$ – початкове наближення на кроці, $U_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right)$ – величини, які визначаються неявними однокроковими наближеннями відповідного порядку.

$$U_p\left(Y_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{p_1} C_{i1} K_i\left(Y_n\right) + \sum_{i=1}^{p_2} C_{i2} K_i\left(Y_{n+1}\right), \qquad \text{при p>2 маємо: } \begin{cases} p_1 = p - 2, \\ p_2 = p - 1; \end{cases},$$

де $$K_i(Y) = hf\left[Y_n + a_i\left(Y - Y_n\right) + \sum_{m=1}^{i-1}\left(b_{m1} K_m\left(Y_n\right) + b_{m2} K_m(Y)\right)\right];$$

$$V_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right) = U_p\left(Y_n + U_p\left(Y_{n+1,m}^{[p]}\right)\right).$$

Побудовані ітераційні чисельні методи до четвертого порядку включно, для яких

а) $$U_1\left(Y_{n+1}\right) = -\frac{1}{3} K_1\left(Y_n\right) + \frac{4}{3} K_1\left(Y_{n+1}\right),$$

$$U_2\left(Y_{n+1}\right) = K_1\left(Y_{n+1}\right),$$

$$U_3\left(Y_{n+1}\right) = \frac{1}{6} K_1\left(Y_n\right) + \frac{2}{3} K_1\left(Y_{n+1}\right) + \frac{1}{6} K_2\left(Y_{n+1}\right);$$

б) $$U_1\left(Y_{n+1}\right) = -K_1\left(Y_n\right) + 2K_1\left(Y_{n+1}\right),$$

$$U_3\left(Y_{n+1}\right) = \frac{1}{6} K_1\left(Y_n\right) + \frac{2}{3} K_1\left(Y_{n+1}\right) + \frac{1}{6} K_2\left(Y_{n+1}\right),$$

$$U_4\left(Y_{n+1}\right) = -\frac{1}{3} K_1\left(Y_n\right) + K_1\left(Y_{n+1}\right) - \frac{1}{12} K_2\left(Y_n\right) + \frac{1}{12} K_2\left(Y_{n+1}\right) + \frac{1}{3} K_3\left(Y_{n+1}\right);$$

$$K_1\left(Y_n\right) = hf\left(Y_n\right),$$

$$K_1\left(Y_{n+1}\right) = hf\left(\frac{1}{2} Y_{n+1} + \frac{1}{2} Y_n\right),$$

для випадку a: $K_2\left(Y_{n+1}\right) = hf\left[Y_{n+1} + K_1\left(Y_n\right) - K_1\left(Y_{n+1}\right)\right],$

для випадку b: $K_2\left(Y_{n+1}\right) = hf\left[2Y_{n+1} - Y_n + K_1\left(Y_n\right) - 2K_1\left(Y_{n+1}\right)\right],$

$$K_2\left(Y_n\right) = hf\left[Y_n - K_1\left(Y_n\right)\right],$$

$$K_3\left(Y_{n+1}\right) = hf\left[Y_{n+1} + \frac{1}{8} K_1\left(Y_n\right) - K_1\left(Y_{n+1}\right) - \frac{3}{16} K_2\left(Y_n\right) - \frac{7}{16} K_2\left(Y_{n+1}\right)\right].$$

Доведено, що наведені вище методи мають такі властивості:

- узгодженість методу з p-м порядком точності формули Тейлора на кожній ітерації m (m=0,1, 2, …);
- A-стійкість (для випадку a) або L-стійкість (для випадку b) при розв'язанні модельного рівняння

$$Y' = -\lambda Y \quad , \quad \mathrm{Re}(\lambda)>0 ;$$

- збіжність до роз'язку $\overline{Y}_{n+1}^{[p]}$;
- не вимагають обернення матриць Якобі або розв'язання систем алгебраїчних рівнянь;
- можуть бути застосовані для розв'язання і нежорстких задач;
- можуть бути реалізовані на багатопроцесорних комплексах, оскільки допускають розпаралелювання алгоритмів.

Розглянуті методи реалізовані в підпрограмі, яка пройшла успішні випробування на тестових прикладах , які при відповідних вхідних даних описують рівняння з певним типом властивостей. Аналіз результатів тестування показав, що запропоновані методи є достатньо ефективними з точки зору обчислювальних затрат і точності розв'язку.

УДК 621.3

А.О. Мельник, М.В. Черкаський
Національний університет"Львівська політехніка",
кафедра ЕОМ

ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ І МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ: НОВИЙ КУРС

Порівнюються дві програми з теорії алгоритмів і методів обчислень для базового напрямку "Комп'ютерна інженерія". Перша – один з початкових варіантів програми-рекомендації для університетів США, друга – апробована протягом трьох років програма Національного університету "Львівська політехніка". Показані переваги і недоліки обох програм та запропоновано новий варіант програми. Обгрунтовано використання програмно-апаратної моделі алгоритму, наближеної до реальних комп'ютерних засобів.

The algorithm theory and computational methods programs for base direction "Computer engineering" are compared. The original, recommended for the Universities in USA and the one proposed for National University "Lviv Polytechnic" and approbated three years. Advantages and disadvantages of both are discussed and new variant of the program is proposed. The benefit of the software/hardware model algorithm approach, approximate to real computing systems, is substantiated.

Вступ. У березні 2001 року у Львові відбулось засідання НМК Міністерства освіти і науки України з базового напрямку "Комп'ютерна інженерія" , на якій обговорювались зміни в навчальних планах бакалаврату. На засіданні з доповіддю про сучасний стан фаху виступив завідувач кафедри СКС НТУУ КПІ професор Тарасенко В.П., який ознайомив із сучасним змістом програм навчання фаху в університетах за кордоном. У результаті обговорення були скоректовані навчальні плани базового напрямку "Комп'ютерна інженерія". На основі цих планів зараз формуються нові навчальні програми дисциплін.