

УДК 621.372.542

О.І. Коваль, Б.П. Русин

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

## АЛГОРИТМ КОНТЕКСТНОГО СТИСКУ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВЕЙВЛІТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОБУДОВАНОГО З ВИКОРИСТАННЯМ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ПОЛЮСІВ

© Коваль О.І., Русин Б.П., 2001

Запропоновано алгоритм контекстно залежного стиску зображень на основі біортогональних вейвлітів, побудованих з використанням елементів теорії полюсів. Розглянуто вплив ступеня регулярності фільтру відновлення на якість відтвореного зображення. Наведено результати застосування алгоритму.

**The algorithm of context image compressing based-on wavelet transformation, using elements of pole theory. The new algorithm of context image compressing based-on wavelet transformation is suggested. The elements of pole theory are used for algorithm creating. The recovery image filter irregularity influence on image quality is studied. The algorithm applications are given in the work.**

### 1. ВСТУП

Вейвлітне перетворення в останні 20 років стало надзвичайно популярним як декорелятор при побудові алгоритмів стиску зображень із втратами завдяки високим властивостям запаковування енергії та декореляції [5]. На сьогоднішній день існує величезна кількість вейвлітних фільтрів, які можуть претендувати на застосування в такого роду алгоритмах. У ряді робіт розробляється критерій вибору фільтрів для декореляції візуальних даних.

У [19], на основі аналізу бажаних властивостей, якими мав би характеризуватися декорелятор (ортогональність, наявність осі симетрії базисної функції, обмежена область визначення вейвліта, наявність в імпульсній характеристиці фільтрів, що генерує вейвліт, цілочисельних коефіцієнтів), область пошуку звужено до класу біортогональних фільтрів.

У рамках цього класу, який нараховує тисячі пар фільтрів [22], вейвліти вибиралися на основі аналізу перехідної та імпульсної характеристик системи, що відповідає піраміді вейвлітного аналізу-синтезу. У результаті вибрано шість найкращих з точки зору авторів пар фільтрів. Однак методика перевірки запропонованого підходу дещо неоптимальна, оскільки використаний алгоритм розподілу ресурсів не враховує властивість біортогональності.

Також відомі спроби характеристики якості фільтрів для задач компресії на основі ступеня їх регулярності [14, 15]. Однак існує думка [21], що однозначного зв'язку між ступенем регулярності та якістю відновленого зображення на сьогодні ще не встановлено.

Нарешті, в [27] запропоновано аналізувати поставлене завдання на основі трирівневого вейвлітного перетворення зображення із подальшим його відновленням за умови рівності нулю всіх детальних коефіцієнтів. Отримані в цій роботі результати показали, що за вибраним критерієм існують фільтри, які функціонують не гірше, ніж вибрані в [22]. Також робиться спроба проаналізувати вплив ступеня регулярності фільтру відновлення на результати оцінки як з кількісного боку (співвідношення сигнал/шум), так і з якісного (наявність/відсутність в отриманих результатах артефактів, різко помітних для людського ока).

Головним недоліком наведених в [27] результатів є низький рівень об'єктивності, адже не було запропоновано реального алгоритму стиску для перевірки отриманих результатів.

Тому дана робота присвячена побудові алгоритму компресії для перевірки справедливості оцінок [27].

## 2. ВИБІР СТРУКТУРИ АЛГОРИТМУ СТИСКУ

Оскільки втратні алгоритми стиску на основі вейвлітного перетворення належать до трансформаційних алгоритмів стиску, то їх побудова відбувається за таким принципом: декореляція – квантування – кодування.

На першому етапі за допомогою вейвлітного перетворення усуваються статистичні зв'язки між елементами вхідних даних. На другому етапі, – єдиному, де вносяться спотворення, відображається множина символів, які в граничному випадку можуть набувати нескінченної кількості значень, на множину, що описується скінченною кількістю значень. Такий перехід реалізується за допомогою скалярного (поелементного) [3, 4, 11, 17, 25, 26] або векторного квантування [1]. На третьому етапі результати квантування кодуються з використанням методів RLC [29], Хафмана [8], арифметичного підходу [23].

Починаючи від роботи Вудса та О'Ніла [24], які першими використали квадратурні дзеркальні фільтри для стиску зображень, алгоритми цього класу зазнали значної еволюції.

Перші з них використовували традиційні на основі вищенаведених трьох етапів техніки трансформаційного кодування і характеризувалися відсутністю притаманних алгоритмам, побудованих на основі дискретного косинусного перетворення, блочних артефактів [1] при незначному виграші в ефективності.

Запропоновані Льюїсом та Ноулесом так звані нульові дерева [10] та побудовані на їх основі Шапіро алгоритми стиску EZW [18] показали можливі напрямки пошуку шляхів збільшення ефективності таких підходів.

А саме, по-перше, застосування ефективних форматів даних (нульових дерев) [15, 18, 26], які використовують кореляційні зв'язки всередині та між напівсмугами. По-друге, використання адаптивного підходу, коли кожен з трьох вищезгаданих основних етапів функціонування алгоритму (декореляція, квантування, кодування) може змінюватись як залежно від зображення, так і від його локальних особливостей.

В останні сім років дістали розвитку адаптивні алгоритми вейвлітного стиску на основі класифікації коефіцієнтів розкладу на певну кількість класів залежно від значення локальної дисперсії. Причому класифікація може відбуватись як за прямою стратегією, коли кожному з коефіцієнтів вибирається квантувач з доступної множини (на основі неквантованих даних), так і за оберненою, коли класифікація базується на попередньо проквантованих даних.

Перший підхід вимагає передачі декодеру карти класифікацій при порівняно простій конструкції декодера, тоді як другий не потребує цієї інформації, але характеризується підвищеною складністю декодера.

У даній роботі побудовано адаптивний алгоритм оберненої класифікації, який порівняно із відомими аналогами [3,4] відрізняється а) типом використаних вейвлітних фільтрів; б) моделлю опису даних напівсмуг та класів; в) типом квантувача. Порівняно із алгоритмом [11] використано обмежену кількість класів (моделей), а на відміну від [25] не проводиться адаптивного визначення порогів класифікації.

### 3. СТАТИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КОЕФІЦІЕНТІВ ВЕЙВЛІТНИХ НАПІВСМУГ

У даній роботі для декореляції даних зображень використовується 4-рівневе вейвлітне перетворення (рис. 1).

Відомо декілька підходів до опису статистичних властивостей даних цих напівсмуг. Найбільш поширеним є застосування припущення про узагальнений гауссівський розподіл (УГР) вейвлітних коефіцієнтів [12]:

$$p_{GGD}(x) = \frac{v}{2\Gamma(1/v)} b(\sigma, v) \exp[-(b(\sigma, v)|x|)^\sigma],$$

де  $v$  – параметр форми розподілу, визначає його гостровершинність;  $\sigma$  – стандартне середньоквадратичне відхилення;  $\Gamma(x)$  – гама-функція,  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} \exp(-u) du$ ;

$$b(v, \sigma) = \sigma^{-1} \sqrt{\frac{\Gamma(3/v)}{\Gamma(1/v)}}.$$

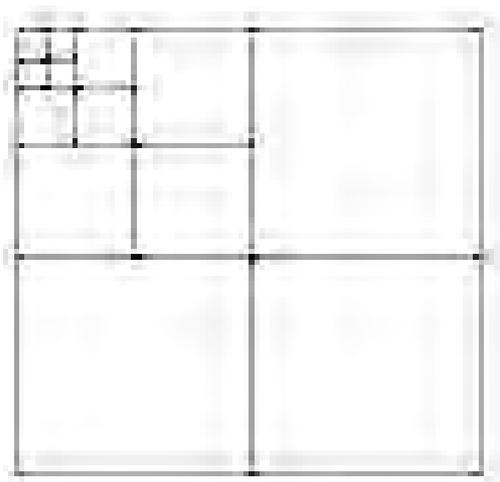


Рис. 1. Схема 4-рівневого вейвлітного перетворення

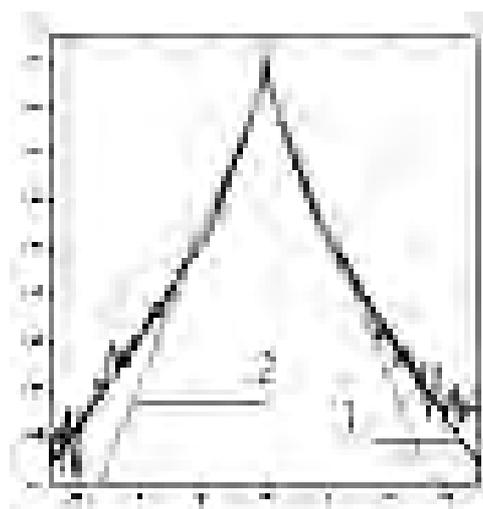


Рис. 2. Приклад опису даних напівсмуги з допомогою УГР (1) ( $v = 0.693$ ,  $\sigma = 1$ ) та лапласівського закону розподілу ( $\lambda = 1.582$ ), подано в логарифмічному масштабі

Такий підхід дає високий рівень точності опису даних напівсмуг.

Також використовують лапласівське припущення [3, 4, 25] ( $p_L(x) = 0.5\lambda \exp(-\lambda|x|)$ ,  $\lambda$  – параметр розподілу), який характеризується простотою порівняно з попереднім підходом, але поступається йому в точності (рис. 2).

Тому в даній роботі статистичні властивості коефіцієнтів напівсмуг описуються з допомогою УГР.

#### 4. КОНТЕКСТНО-ЗАЛЕЖНА КЛАСИФІКАЦІЯ

Класифікація відліків вейвлітних напівсмуг довела свою ефективність і перспективність в алгоритмах компресії зображень [3, 4, 9, 11, 25]. Оскільки відомо [17], що елементи, які містять переважний відсоток енергії, зосереджуються в області границь на зображенні, а ті, що мають значно меншу амплітуду, спричинені гладкими ділянками, то можна описати перші з допомогою закону розподілу з великою, а другі – з малою дисперсією.

У даній роботі класифікація буде проводитись за оберненою стратегією на основі каузального вікна, що, як вже згадувалось раніше, дозволить зменшити об'єм сторонньої інформації, яку необхідно передавати декодеру. Використано вікна розміром  $5 \times 5$  на двох найнижчих рівнях перетворення та  $3 \times 3$  на двох найвищих. Відомо [18], що елемент вищої напівсмуги, який розташований за тими самими просторовими координатами як і відлік, що класифікується, несе про нього певну інформацію. Тому він також додається до контексту, який використовується (рис. 3).

Як класифікатор використане зважене середнє у вікні у вигляді:

$$m_i = \sum_{i \in N} \alpha_i |w_i|,$$

де  $N$  – множина коефіцієнтів у вікні;  $\alpha_i$  – вагові коефіцієнти, величина яких обернено пропорційна віддалі до відліка, що класифікується;  $\sum_i \alpha_i = 1$ ;  $w_i$  – вейвлітний коефіцієнт з координатою  $i$  (для простоти використані одновимірні позначення).

Після знаходження значень елементів множини  $M$  відбувається порівняння кожного з них із набором порогів, на основі чого робиться висновок про належність вейвлітного коефіцієнта до одного з обмеженої кількості класів.

#### 5. ВИЗНАЧЕННЯ ПОРОГІВ

Очевидно, що результати класифікації великою мірою залежать від значень порогів, що використовуються.

Для їх знаходження використовувались такі підходи.

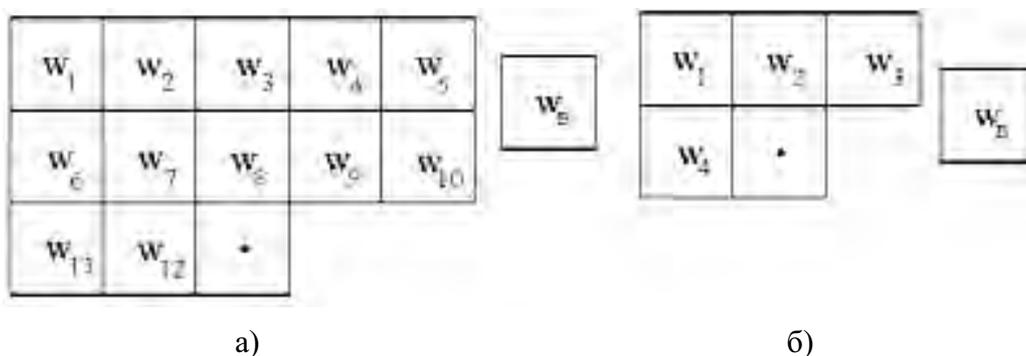


Рис. 3. Використана контекстна інформація (каузальні вікна розміром  $5 \times 5$  (а) та  $3 \times 3$  (б) разом із коефіцієнтом з вищої напівсмуги). Краткою позначено коефіцієнт, що класифікується

У роботі [25] відбувається розбиття динамічного діапазону значень елементів  $M$  окремої напівсмуги на  $S$  попередніх класів так, щоби вони містили приблизно однакову кількість коефіцієнтів перетворення (це необхідно для забезпечення однакових умов для оцінювання параметрів розподілу, яким описуються дані всередині класу). Остаточні значення порогів визначаються на основі максимізації кодового підсилення для пар сусідніх класів. Недоліком такого підходу є необхідність передачі значень порогів як сторонньої інформації декодеру, що викликає зменшення кількості бітів для кодування даних.

У роботі [4] для визначення порогів використовується підхід, аналогічний побудові квантувача. Адже цю проблему можна розглядати як проблему пошуку оптимального розбиття додатної частини дійсної осі на обмежену кількість інтервалів. Спираючись на результати роботи [20], таке розбиття будується для лапласівського припущення та квантувача з обмеженою ентропією. Як недолік такого підходу можна вказати обчислювальну складність знаходження множини порогів. Незаперечною його перевагою є відсутність необхідності передачі значень порогів декодеру (передаються лише значення параметрів лапласівського розподілу напівсмуги).

У нашому випадку пороги визначатимуться так.

Оскільки в [4] зазначається, що статистичні властивості елементів множини  $M$  напівсмуги достатньо точно описуються лапласівським законом розподілу, будемо застосовувати лапласівське припущення.

Значення першого порогу  $T_{\min}$  дорівнює значенню найменшого ненульового елемента  $M$ , квантується до 8 бітів і передається декодеру як стороння інформація.

Для знаходження інших значень порогів проводяться такі операції:

а) на основі оцінки максимальної правдоподібності знаходять значення параметра закону розподілу Лапласа:

$$\bar{\lambda} = N \left( \sum_{i=1}^N m_i \right)^{-1},$$

де  $N$  – кількість елементів напівсмуги;  $m_i$  – елементи множини  $M$ ;

б) обчислюється імовірність попадання елемента даних, що описуються законом розподілу Лапласа, в  $[T_{\min}, +\infty)$ :

$$p = 2 \int_{T_{\min}}^{+\infty} p_L(x) dx = \exp(-\bar{\lambda} T_{\min});$$

в) значення  $p$  ділиться на потрібну кількість класів,  $N_0$ , а значення порогів знаходяться з розв'язку рівняння:

$$\frac{p}{N_0} = 2 \left( \int_0^{T_{curr}} p_{GGD}(x) dx - \int_0^{T_{prel}} p_{GGD}(x) dx \right) = \exp(-\bar{\lambda} T_{prel}) - \exp(-\bar{\lambda} T_{curr});$$

$$T_{curr} = -\frac{1}{\bar{\lambda}} \ln \left( \exp(-\bar{\lambda} T_{prel}) - \frac{p}{N_0} \right),$$

де  $T_{curr}$  – шукана невідома, значення порогу на кінці інтервалу;  $T_{prel}$  – значення порогу на початку інтервалу, що може бути здійснено, наприклад, методом бісекцій [13].

## 6. КЛАС, ЩО ВІДПОВІДАЄ НУЛЬОВОМУ КОНТЕКСТУ

Оскільки класифікація в нашому випадку має зворотний характер, то існує небезпека, особливо у випадках великих коефіцієнтів стиску, що всі відліки, які утворюють контекст (рис. 3), дорівнюватимуть нулю. Тоді елемент напівсмуги буде відноситись до класу з найменшою дисперсією і зросте імовірність того, що він також буде проквантований до нуля. Для уникнення цього ефекту адаптовано техніку передквантування, запропоновану в [11]. Вона полягає в обнуленні коефіцієнтів напівсмуги, які є меншими за величину порогу, що визначається, виходячи із співвідношення між об'ємом інформації та рівнем спотворень, що вносяться.

У результаті з'являється додатковий клас нульового контексту, що містить коефіцієнти напівсмуги, для яких  $m_i = 0$ .

## 7. КВАНТУВАННЯ

Як вже згадувалось раніше, для квантування вейвлітних коефіцієнтів використовують переважно скалярні квантувачі (К), серед яких найкращими з точки зору поєднання затрат на розробку та операційних властивостей є так звані рівномірні К із порогом [6, 20].

Такий К описується двома параметрами – шириною центрального інтервалу квантування або мертвої зони  $2T$  та кроком квантування  $\Delta$  (за винятком центрального, всі інтервали квантування мають однакову ширину).

Значення рівнів відновлення знаходяться як центроїди відповідних інтервалів.

Для УГР формально процедура побудови квантувача має такий вигляд:

$$p_0 = 2 \int_0^T p_{GGD}(x) dx; \quad q_0 = 0; \quad p_j = 2 \int_{b_j}^{b_{j+1}} p_{GGD}(x) dx; \quad q_j = \frac{1}{p_j} \int_{b_j}^{b_{j+1}} x p_{GGD}(x) dx;$$

де  $p_j$  – імовірність попадання в  $j$  – й інтервал ( $j = 0$  для центрального інтервалу);  $q_j$  – відповідний їй рівень відновлення.

Результати квантування залежать від співвідношення між  $2T$  та  $\Delta$ . Його знаходженню були присвячені дослідження [2, 11], які показали оптимальність відношення  $2T/\Delta = 1.4 \div 1.5$ .

У даній роботі прийнято  $2T/\Delta = 1.5$ .

Варто також відзначити, що побудова квантувачів в процесі виконання алгоритму стиску може впливати на його складність загалом. Тому квантувачі для УГР із значеннями  $\nu = 0.5, 0.6, \dots, 1.0, 2.0$  та одиничною дисперсією розроблено наперед для значень кроків квантування  $\Delta = 0,02 + 0,01i, i = 1, 2, \dots, 798$  і розміщено у впорядкованій таблиці.

## 8. ВИЗНАЧЕННЯ ДИСПЕРСІЇ ЕЛЕМЕНТІВ КЛАСІВ

У результаті класифікації отримується фіксована кількість класів, які характеризуються значеннями параметра форми УГР та дисперсії. Виникає потреба в передачі цих величин декодеру. Якщо у випадку коефіцієнтів форми це можна зробити ефективно (наприклад, кодуєчи  $\nu$ ), то передача дисперсії супроводжується великими інформаційними затратами.

Тому з метою зменшення інформації, яка пересилається декодеру, замість дисперсії класів використовується дисперсія індивідуальних коефіцієнтів, що визначається на основі такої процедури [11]:

а) на основі каузального контексту визначається вибіркова дисперсія ( $L$  – довжина вибірки):

$$\sigma_{s\text{amp}}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (w_i)^2$$

б) якщо  $\sigma_{s\text{amp}}^2 = 0$ , то як оцінку використовують дисперсію класу із нульовим контекстом;

в) якщо в околі є нульові коефіцієнти,  $\sigma_{s\text{amp}}^2 > 0$ , то проводиться уточнення оцінки:

$$\sigma_s^2 = \sigma_{s\text{amp}}^2 + \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L \alpha(w_z),$$

де  $\alpha(w_z) = \begin{cases} E(w_z^2), & w_z = 0 \\ 0, & w_z \neq 0 \end{cases}$  – значення дисперсії елементів, які квантуються нулем.

Параметри  $\alpha$  обчислюються на основі законів розподілу, що використовуються, зберігаються в таблиці і не впливають на складність алгоритму.

## 9. ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ РЕСУРСІВ

Оскільки різні класи по-різному впливають на якість відновленого зображення, то необхідно відповісти на запитання: як розподілити бітовий бюджет для досягнення мінімального рівня спотворень?

Для цього ресурси оптимально розподіляють за алгоритмом, аналогічним використаному в [11]. Процедура проводиться для даних усіх класів усіх напівсмуг одночасно. Визначений множник Лагранжа квантується до 8 бітів і передається декодеру.

## 10. КОДУВАННЯ

Результати квантування кодуються з використанням адаптивного арифметичного кодера [23], як і значення коефіцієнтів форми законів розподілів, якими описуються дані класів.

Інша допоміжна інформація (дисперсії нульових класів, значення перших ненульових порогів, параметри лапласівського закону розподілу множин  $M$ , множник Лагранжа) квантується до 8 бітів і передається декодеру.

## 11. ВПЛИВ КІЛЬКОСТІ КЛАСІВ

Оскільки коефіцієнти напівсмуг квантуються на основі значень  $m_i$ , то з метою підвищення ефективності роботи алгоритму бажано було би мати таку кількість класів, скільки є різних значень  $m_i$ .

Однак це привело би до зміщених оцінок параметрів розподілів, якими описуються дані всередині класів через недостатній розмір вибірки та до суттєвого зростання сторонньої інформації, що зменшувало б кількість бітів, яка виділяється на кодування власне потоку даних.

Тому кількість класів повинна бути обмеженою. Дослідження оптимального співвідношення між кількістю класів та якістю відновленого зображення показали, що в нашому випадку варто зупинитись на 32 класах. Це більше, ніж використовується в [3, 4, 25], але менше ніж в [11].

## 12. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нами був реалізований алгоритм стиску на основі описаної вище адаптивної контекстної стратегії квантування і перевірена його ефективність на популярних тестових зображеннях (рис. 4).

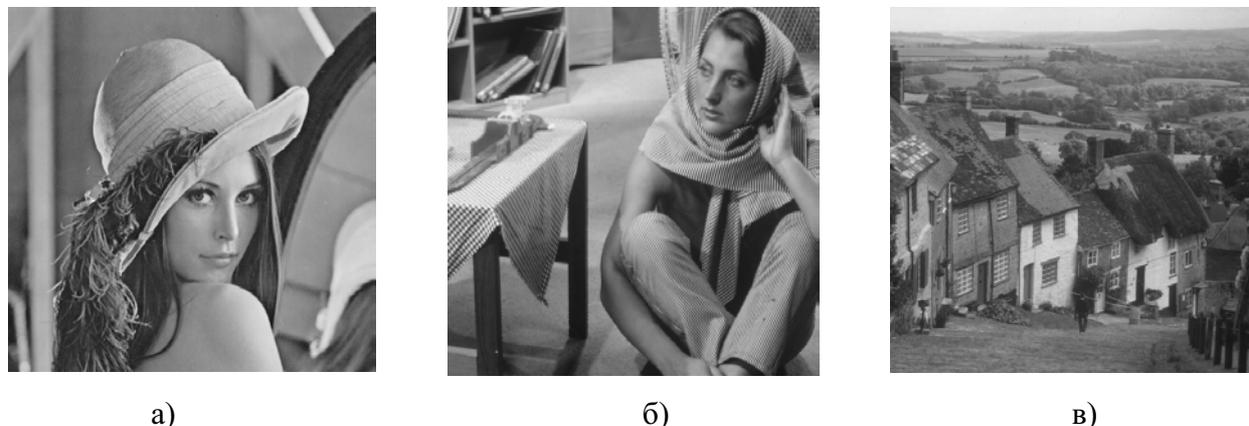


Рис. 4. Використані тестові зображення “Лена” (а), “Барбара” (б) та “Голдхіл” (с)

Було застосовано чотирирівневе вейвлітне перетворення, побудоване на основі пар біортогональних фільтрів, отриманих з використанням теорії полюсів [30], відповідно із довжинами імпульсних характеристик 10/18, 10/22, 10/26, 10/30 [28].

Дані найвищої напівсмуги кодувалися із застосуванням ДІКМ 4-го порядку. Як предіктор використане зважене середнє значення у каузальному вікні розміром 3×3 елементи із такими ваговими коефіцієнтами: 0.1, 0.4, 0.4, 0.1 [3]. Різницеві дані описувались за допомогою УГР і до них також застосовувалась вищенаведена техніка квантування.

Таблиця 1

### Порівняння результатів роботи запропонованого алгоритму із відомими підходами

Біт/елемент (коефіцієнт стиску, разів)	EZW [18]	SPIHT [16]	SFQ [26]	[4]	[3]	EQ [11]	СВСАQ [25]	Запропо- нований алгоритм
Зображення “Лена”								
0.25 (32)	33.17	34.13	34.33	34.20	33.80	34.45	34.46	34.28
0.5 (16)	36.28	37.24	37.36	37.35	37.00	37.58	37.56	37.54
1.0 (8)	39.55	40.45	40.52	40.47	40.40	40.85	40.75	40.82
Зображення “Барбара”								
0.25 (32)	26.77	27.58	28.29	28.18	-	-	28.00	28.08
0.5 (16)	30.53	31.40	32.15	31.87	-	-	32.00	32.37
1.0 (8)	35.14	36.41	37.03	36.68	-	-	37.15	37.42
Зображення “Голдхіл”								
0.25 (32)	-	30.55	30.71	30.64	30.60	30.77	30.78	30.63
0.5 (16)	-	33.12	33.37	33.27	33.00	33.42	33.46	33.37
1.0 (8)	-	36.54	36.70	36.66	36.60	36.89	36.99	36.86

Результати роботи запропонованого алгоритму наведені в табл. 1. Вони показали, що його ефективність не поступається найкращим аналогам. Деякий завал при збільшенні величини коефіцієнту стиску викликаний тим, що при невеликих коефіцієнтах стиску класифікація є більш точною, а клас нульового контексту вужчим.

### 13. ВПЛИВ ВИБОРУ ВЕЙВЛІТА

У роботі [28] було запропоновано як критерій вибору біортогональної пари фільтрів для задач стиску зображень застосовувати рівень якості відновленого після 3-рівневого вейвлітного перетворення без врахування детальної інформації зображення.

Критерій було перевірено на ряді стандартних тестових зображень. Результати тестів засвідчили, що фільтри, які побудовано на основі теорії полюсів, є конкурентоспроможними, зокрема з однією із найбільш популярних пар 9/7 [1, 22].

Також було показано, що із збільшенням ступеня регулярності фільтра відновлення покращуються як об'єктивні (співвідношення сигнал/шум), так і суб'єктивні (візуальна оцінка) результати застосування критерію.

Як продовження досліджень в даній роботі зроблено спробу оцінити правильність визначення критерію з використанням розробленого алгоритму.

Дослідження проводились із побудованими за методикою [28] парами фільтрів 10/18, 10/22, 10/26, 10/30 на вибраних раніше тестових зображеннях (рис. 4).

Результати проведених експериментів, наведені в табл. 2, засвідчили, що оптимальним є вибір пари 10/26, після чого збільшення ступеня регулярності практично не дає вигоди (або навіть приводить до деякого погіршення якості відновленого зображення).

Тобто оптимальне значення показника регулярності вейвлітних фільтрів відновлення, побудованих на основі теорії полюсів, має знаходитись в рамках  $\alpha = 2 \div 3$ .

### ВИСНОВКИ

У даній роботі запропоновано адаптивний контекстний алгоритм стиску зображень на основі вейвлітного перетворення, побудованого з використанням інтерполяторів теорії полюсів, ефективність використання якого є на рівні кращих аналогічних конструкцій.

Таблиця 2

#### Аналіз залежності якості відновленого зображення (співвідношення сигнал/шум) від ступеня регулярності фільтра відновлення (характеризується показником $\alpha$ [14])

Біт/елемент (коефіцієнт стиску, разів)	Пара 10/18 ( $\alpha = 1.586$ )	Пара 10/22 ( $\alpha = 2.259$ )	Пара 10/26 ( $\alpha = 2.836$ )	Пара 10/30 ( $\alpha = 3.375$ )
Зображення "Лена"				
0.25 (32)	34.04	34.21	34.28	34.24
0.5 (16)	37.38	37.51	37.54	37.53
1.0 (8)	40.76	40.82	40.82	40.82
Зображення "Барбара"				
0.25 (32)	28.03	28.01	28.08	28.08
0.5 (16)	31.98	32.25	32.37	32.40
1.0 (8)	37.06	37.32	37.42	37.49
Зображення "Голдхіл"				
0.25 (32)	30.63	30.63	30.63	30.62
0.5 (16)	33.36	33.37	33.37	33.34
1.0 (8)	36.84	36.86	36.86	36.84

Окрему увагу було приділено аналізу впливу ступеня регулярності фільтра відновлення на якість декомпресованого зображення. У результаті проведених експериментів визначено інтервал оптимальних значень показника ступеня регулярності вейвлітних фільтрів в рамках розробленого класу.

1. Antonini M., Barlaud M., Mathieu P., and Daubechies I. Image Coding Using Wavelet Transform. *IEEE Trans. Im. Proc.*, V. 1(2), Apl 1992 P 205-220.
2. Balasingham I., Ramstad T.A., On the relevance of the regularity constraint in subband image coding, in *Proc. Asilomar Conference on Signals Systems, and Computers, (Pacific Grove)*, 1997.
3. Chrysafis C., Ortega A.. Context-based Adaptive Image Coding. In *Proc. of 30<sup>th</sup> Asilomar Conf. On Signals, Systems and Computers*. Nov. 3-Nov. 6, 1996, Pacific Grove, CA.
4. Chrysafis C., Ortega A.. Line Based Reduced Memory Wavelet Image Compression. In *Proc. IEEE Data Compression Conference, Snowbird, Utah*, – 1998. P. 398-407.
5. Davis G., Nosratinia A., Wave-let-Based Image Coding: An Overview, *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*, Vol. 1, № 1, 1998.
6. Farvardin N., W. Modestino J. Optimum Quantizer Performance for a class of Non-Gaussian Memoryless Sources. *IEEE Trans. on Inf.Theory*, IT-30(3), May 1984. – P. 485-497.
7. Gish H., Pierce J. N., Asymptotically efficient quantizing" *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. IT-14, Sept. 1968. – P. 676-683.
8. Huffman D. A. A method for the construction of minimum redundancy codes. *Proc. IRE* 40:, 1952, P. 1098-1101.
9. Joshi R.L., Jafarkhani H., Kasner J.H, Fischer T.R., Farvardin N.W., Marcellin M., Bamberger R.H. Comparison of different methods of classification in subband coding of images. *IEEE Trans. on Im. Proc.*, Nov. 1997. V. 6. P. 1473 – 1486.
10. Lewis A.S., Knowles G., Image compression using the 2-d wavelet transform, *IEEE Trans. on Im. Proc.*, Apr. 1992. Vol. 1. P. 244-250.
11. LoPresto S.M., Ramchandran K., Orchard M. T. Image Coding based on Mixture Modelling of Wavelet Coefficients and a Fast Estimation-Quantization Framework. In *Proc. IEEE Data Compression Conference, Snowbird, Utah*. – 1997. – P. 221-230.
12. Mallat S.G. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition. *The Wavelet Representation*. *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 1(7), Oct 1989, P. 674-693.
13. Press W. H. et al., *Numerical recipes in C: the art of scientific computing, Sec Ed.* Cambridge University Press, 1992.
14. Rioul O. Simple regularity criteria for subdi-vision schemes, *SIAM J. Math. Analysis*, Nov.1992. Vol. 23. – P. 1544-1576.
15. Rioul O., Regular wavelets: a discrete time approach, *IEEE Trans. on Signal Proc.*, V. 41, № 12, Dec. 1993, P. 3572-3579.
16. Said A. Pearlman W.A New Fast and Efficient Image Coder Based on Set Partitioning on Hierarchical Trees. *IEEE Trans. Circ. and Syst. for Video Tech.*, 6(3), June 1996, P. 243-250.
17. Servetto S.D., Ramchandran K., Orchard M. T. Image Coding based on Morphological Representation of Wavelet Data, *IEEE Trans. on Im. Proc.*, 1999. Vol. 8(9). P. 1161-1174.
18. Shapiro J. M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(12). – Dec. 1993, P. 3445-3462.
19. Streomme O., On the applicability of wavelet transforms to image and video compression, Ph.D. dissertation, Dep. of Computer Sc., University of Strathclyde, Glasgow, Scotland, Febr. 1999.
20. Sullivan G. J. Efficient Scalar Quantization of Exponential and Laplacian Random Variables. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 42(5). Sept. 1996. – P. 1365–1374
21. Vetterli M. Herley C., Wavelets and filter banks: Theory and design, *IEEE Trans. on Signal Proc.* № 9, Sept. 1992. Vol. 40. – P. 2207-2232.
22. Villasenor J., Belzer B., Liao J.. Wavelet Filter Evaluation for Image Compression. *IEEE Trans. Im. Proc.*, 2. – Aug. 1995. – P. 1053-1060.
23. Witten R.M., Neal I.H., Cleary J. G. Arithmetic Coding for Data Compression. *Communications of the ACM*, 30(6), June 1987. – P. 520-540.
24. Woods J. W. O'Neil S. D. Subband Coding of Images. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 34(5):, Oct 1986, 1278-1288.
25. Yoo Y., Ortega A., Yu B. Image Subband Coding Using Progressive classification and Adaptive Quantization. *IEEE Trans. Im. Proc.*, 8(12). – Dec 1999. – P. 1702-1715.
26. Xiong Z., Ramchandran K., Orchard M. T. Space-frequency Quantization for Wavelet Image Coding. *IEEE Trans. Im. Proc.*, 6(5), May 1997. – P.677-693.
27. Коваль О., Русин Б. Вибір вейвлету та аналіз степені регулярності біортогональних фільтрів, побудованих на основі теорії полюсів, для стиску зображень / Праці 5-ої Всеукр. Міжнар. конф. "УкрОБРАЗ – 2000". 27 лист. – 1 гр. 2000. – С. 205-208.
28. Коваль А.И., Русин Б.П., Метод построения биортогональных вейвлетов на основании теории полюсов, *Проблемы управления и информации*, № 5, 2001.
29. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М., 1982. – Кн.2. – 480 с., Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др. *Математика и САПР: в 2-х кн. Кн. 1. Пер. с франц.* – М., 1988. – 204 с.