УДК 681.513: 519. 713

Р.В. Дунець
Українська академія друкарства

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСУ КРИТИЧНИХ ШЛЯХІВ У ДЕРЕВОПОДІБНИХ ТОПОЛОГІЯХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЛІНІЙ

Запропоновано метод визначення часу критичних шляхів у деревоподібних топологіях технологічних ліній оперативної поліграфії, заданих матрицями суміжностей.

This paper deals with the method of determination the task time of operative polygraphy technological lines which have tree-view topology by used the adjacency matrixes.

У процесі аналізу та синтезу технологічних ліній, а особливо ліній оперативної поліграфії, виникає потреба визначення часу критичного шляху – максимального сумарного часу роботи множини взаємозв'язаних блоків технологічних операцій, що утворюють послідовне з'єднання [1]. Знаючи час критичного шляху, можна визначити, чи придатна ця технологічна лінія для випуску продукції за заданий термін. У роботі запропоновано метод визначення часу критичних шляхів у деревоподібних топологіях технологічних ліній, в основу якого покладено подання топологій у вигляді матриць суміжностей [2]. Такі подання відносно топологій у вигляді графів мають суттєві переваги, а саме: матриці суміжності в пам'яті комп'ютера подаються як масиви даних, тобто як природні машинні подання, які легко перетворювати, зберігати; практично немає обмежень на кількість елементів графа.

Запропонований метод передбачає такі етапи:

1. Перетворення початкового графа топології технологічної лінії, що складається із n блоків і описується матрицею суміжності $A = [a_{ij}]_{nxn}$ **в ярусно-паралельну форму (ЯПФ).** Таке перетворення найбільш доцільно проводити методом, запропонованим у роботі [3], оскільки цей метод забезпечує перетворення графів в ЯПФ, поданих безпосередньо матрицями суміжностей.

2. Утворення з матриці суміжності *A* множини матриць $C_1,...,C_k$. Кількість таких матриць дорівнює кількості k ярусів утвореної ЯПФ технологічної лінії. Матриця-рядок $C_k = [c_i]_n$, описує приналежність блоків доданого ярусу. Якщо i-й елемент матриці C_k набуває значення “1”, то блок з номером i входить до k-го ярусу, а якщо “0”, то цей блок не входить до даного ярусу.

3. Визначення часу роботи блоків останнього (*k*-го) ярусу. Якщо прийняти, що час роботи кожного блоку задається відповідним елементом матриці-рядка $T = [t_i]_n$, то час роботи блоків останнього ярусу ЯПФ буде визначитися матрицею-рядком $T_k = \left\lfloor t_i^k \right\rfloor_n$, що утворюється як

$$T_k = T \otimes C_k = \left\lfloor t_i^k = t_i \otimes c_i \right\rfloor,$$

де $\otimes$ – пряме множення матриць.

4. Визначення часу роботи блоків решти ярусів. Матриця часу $T_{k\text{-}1}$ роботи блоків наступного (k-1)-го ярусу ЯПФ буде визначатися так. Спочатку утворюється матриця часткових сум $T_{k-1}^{ч}$ як

$$T_{k-1}^{ч} = \left(F^{K(T)}\right)^T + F^{K(T_k)},$$

де $(\ )^T$ – операція транспонування матриці; $F^{K(T)}$ – клон-матриця [4] матриці T, кожен рядок якої повторює матрицю-рядок $T = [t_i]_{1xn}$.

Далі утворюється деяка матриця B

$$B = T_{k-1}^{ч} \otimes A .$$

Перед тим, як визначити матрицю T_{k-1}, дамо означення.

Означення. Матриця-стовпець $M = [m_j]_{nx1}$, яка утворюється з довільної квадратної матриці $B = [b_{ij}]_{nxn}$ так, що кожен j-й елемент матриці M визначається як найбільший за значенням елемент серед елементів j-го рядка матриці B, називається *максимум-матрицею* $M = \sup\{B\}$.

Нехай, наприклад, задана матриця $B = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, то її максимум-матрицею

буде $M = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Із врахуванням цього матриця T_{k-1} визначається як

$$T_{k-1} = \left(sup\{B\}\right)^T \otimes C_{k-1}.$$

Аналогічно визначаються матриці часу для всіх інших ярусів схеми.

5. Визначення часу критичних шляхів. Спочатку визначається сумарна матриця часів T_Σ як

$$T_\Sigma = \sum_{k=1}^{k_{max}} T_k .$$

Наприкінці час критичного шляху T_L визначиться як $T_L = sup\{T_\Sigma\}$.

Проілюструємо запропонований метод конкретним прикладом. Нехай задана схема технологічної лінії, граф якої наведено на рис. 1.

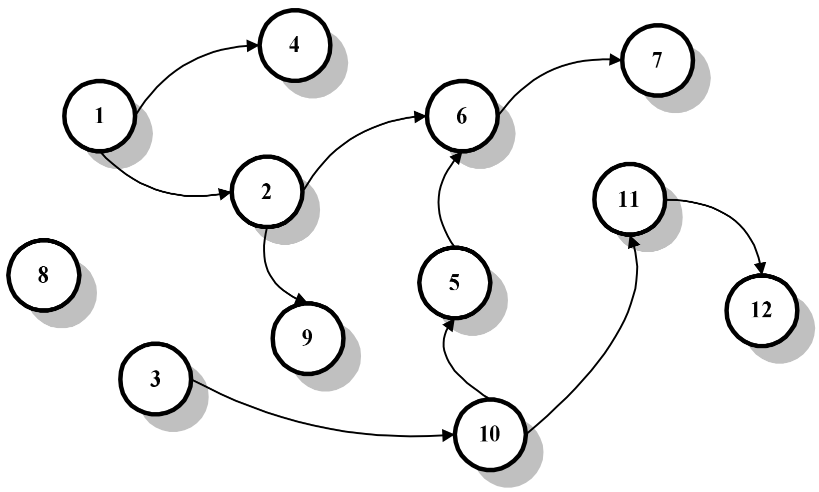

Рис. 1. Приклад графа технологічної лінії

Для цієї схеми матриця суміжності, що описує зв'язки між блоками технологічної лінії, буде такою:

$$A = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{vmatrix}.$$

Нехай час роботи блоків схеми технологічної лінії буде задано наступною матрицею

$$T = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Після перетворення схеми в ЯПФ (рис. 2) отримаємо такі матриці C для кожного з 5-и ярусів:

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$C_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$C_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$C_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

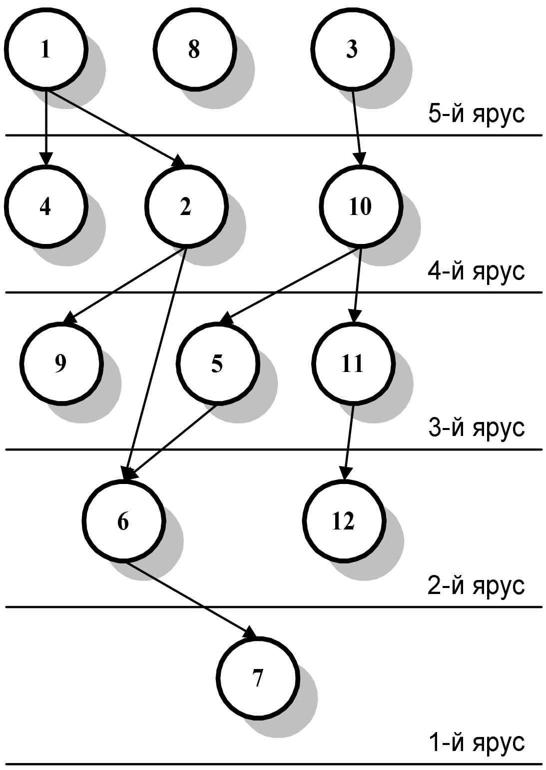

Рис. 2. Ярусно-паралельна форма графа технологічної лінії

Визначимо для 5-го ярусу матрицю часів

$$T_5 = T \otimes C_5 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Визначаємо для 4-го ярусу матрицю часів T_4. Для цього спочатку утворюємо клон-матрицю $F^{K(T)}$, клон-матрицю $F^{K(T_5)}$, а потім матрицю часткових сум $T_4^ч$.

$$F^{K(T)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & 8 & 2 & 10 & 5 & 5 \end{vmatrix},$$

$$F^{K(T_5)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_4^ч = \left(F^{K(T)}\right)^T + F^{K(T_4)} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 5 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 13 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 13 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 9 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 11 & 8 & 13 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 10 & 15 & 10 & 10 & 10 & 10 & 18 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 8 & 5 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 13 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 13 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Далі утворимо матрицю B і $\sup\{B\}$

$$B = T_4^{ч} \otimes A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad sup\{B\} = \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

У результаті останньої операції отримаємо матрицю T_4

$$T_4 = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо всі значення матриць T_3, T_2, T_1 тільки з тією різницею, що клон-матрицю $F^{K(T)}$ утворювати не потрібно.

$$T_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{vmatrix},$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

На останньому етапі отримаємо

$$T_\Sigma = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 & 7 & 18 & 21 & 25 & 8 & 10 & 15 & 15 & 25 \end{vmatrix},$$

а $T_L = sup\{T_\Sigma\} = 25.$

Отже, час критичного шляху для даної схеми технологічної лінії становить 25 часових одиниць.

ВИСНОВОК

Запропонований алгоритм визначення часу критичних шляхів деревоподібних топологій технологічних ліній, що базується на поданні топології матрицями суміжностей і введених операціях над цими матрицями, просто перетворюється в підпрограму прикладної програми топологічного аналізу. Крім того, цей алгоритм може бути адаптований для визначення часу критичних шляхів інших топологій, наприклад, циклічних.

1. Рак Ю.П. Малі друкарські системи: прогнозування, аналіз, синтез. — К., 1999. – 256 с. 2. Dunets` R. Topology analysis algorithms of electromechanical schemes // Наук. праці конф. “Комп’ютерні технології друкарства: алгоритми, сигнали, системи “ДРУКОТЕХН-96”, 16 – 18 жовтня 1996 р. – Львів, 1996. С. 92 – 93. 3. Дунець Р., Дунець Б. Алгоритм перетворення графів в ярусно-паралельну форму на основі операцій алгебри логіки // Поліграфія і видавнича справа. –1997. – Вип. 33. – С. 17 – 24. 4. Дунець Р.Б. Визначення часу мінімальних шляхів у деревовидних топологіях, заданих матрицями суміжностей // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. – 2000. – № 403. – С. 41 – 47.