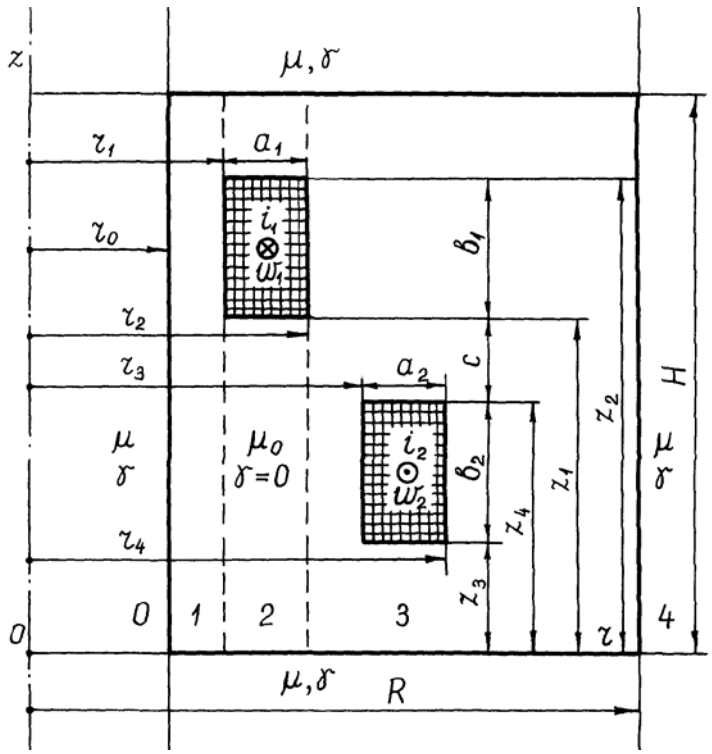
УДК 621.314

Яцун М.А., Яцун А.М.
ДУ “Львівськаполітехніка”, кафедра ЕМА,
Львівський технічний коледж

ВЛАСНА І ВЗАЄМНА ІНДУКТИВНОСТІ РОЗСІЯННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ СПІВВІСНИХ ОБМОТОК НА ФЕРОМАГНІТНОМУ ОСЕРДІ

Отримані вирази для власної і взаємної індуктивностей розсіяння циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді залежно від геометричних розмірів і взаємного розміщення обмоток, розмірів і властивостей екрана

Більшість електромагнітних апаратів (трансформатори, реактори, посилювачі, котушки індуктивності, реле) мають обмотки (котушки), розміщені на феромагнітному осерді. Якщо осердя замкнене, то магнітне поле котушок зі струмом у них поділяють на основний потік (основне потокозчеплення), який замикається повністю в осерді, і потік (потокозчеплення) розсіяння, який замикається частково або повністю поза осердям. Потокозчеплення розсіяння залежить практично лінійно від струмів у котушках. Тому у математичних моделях і заступних електричних схемах таких апаратів потокозчеплення розсіяння виражають власними і взаємними індуктивностями розсіяння відповідних обмоток.



Розрахункова модель
із циліндричними співвісними обмотками.
на феромагнітному осерді.

У літературі [1] власні і взаємні індуктивності розсіяння котушок визначаються за наближеними формулами і значними застереженнями (припущеннями). Тому пропонуємо методику аналітичного визначення цих індуктивностей.

У загальному випадку використаємо розрахункову модель (рис.1), яка складається із двох соосних циліндричних котушок на феромагнітному осерді без втрат і замкненого екрана висотою H у формі двох циліндрів і двох однакових шайб з радіусами r_0 і R, які приймаються з безмежно великою магнітною проникністю або надпровідними і відображають ярма і ярмові балки, дно, кришку і стінки бака [2]. Екран охоплює три області (1, 2, 3) з магнітною сталою μ_0. Первинна обмотка (збудження) з числом витків w_1 і струмом i_1 має внутрішній і зовнішній радіуси відповідно r_1 і r_2, ширину a_1 і висоту b_1. Вторинна обмотка з числом витків w_2 і струмом i_2 має внутрішній і зовнішній радіуси відповідно r_3 і r_4, ширину a_2 і висоту b_2.

Спочатку приймемо [3], що первинна обмотка має безмежно малий радіальний розмір dr і задану густину струму $\delta_{01}=i_1 w_1 /(a_1 b_1)$, тобто $r_2 = r_1+dr$. Тоді друга область випадає і векторний потенціал магнітного поля у областях 1 і 3 ($r_0 \le r \le r_1$ і $r_1+dr \le r \le R$) описується рівнянням Лапласа

$$\Delta \vec{A}' = 0, \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа (лапласіан).

Для вибраної розрахункової моделі (рис.1) внаслідок осьової симетрії задачі векторний потенціал має тільки одну азимутальну складову і від кута α не залежить, тобто $A' = A'_\alpha(r,z)$. Тому в подальшому для спрощення виразів індекси "α" пропускаються і в циліндричній системі координат (r, α, z) держимо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A'}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A'}{\partial z^2}-\frac{A'}{r^2}=0. \tag{2}$$

Визначимо граничні (краєві) умови для векторного потенціалу на поверхні феромагнітного єкрана з безмежно великою магнітною проникністю. До такого екрана лінії магнітної індукції підходять під прямим кутом, тобто біля поверхні екрана тангенційна складова магнітної індукції дорівнює нулеві. Це означає, що на циліндричних частинах екрана ($r = r_0$; $r = R$)

$$\frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial (rA')}{\partial r}\right)_{r=r_0}=0; \qquad \frac{1}{R}\left(\frac{\partial (rA')}{\partial r}\right)_{r=R}=0, \tag{3}$$

а на частинах екрана в формі шайб (z=0; z=H)

$$-\left(\frac{\partial A'}{\partial z}\right)_{z=0}=0; \qquad -\left(\frac{\partial A'}{\partial z}\right)_{z=H}=0. \tag{4}$$

Розв'язок рівняння (2) шукаємо в формі добутку Лапласа

$$A_m'=F_m(r)\,\Phi_m(z), \tag{5}$$

де індекс "m" визначає область простору всередині екрана (m= 1, 2, 3).

Граничні умови (4) на частинах екрана в формі шайб задовільняються, якщо векторний потенціал магнітного поля розсіяння за координатою z виражається рядом Фур'є

$$\Phi_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\cos(nz), \tag{6}$$

де $n=\pi k/H$.

Відповідно розкладемо в ряд Фур'є і густину струму в первинній обмотці на всю висоту H екрана:

$$\delta_0 = \delta_{01}\sum_{k=0}^{\infty} b_{k1}\cos(nz), \tag{7}$$

де при k=0 $b_{01}=b_1/H$; при k=!, 2, 3,

$$b_{k1} = \frac{2}{H}\int_{z_1}^{z_1+b_1}\cos(nz)dz = \frac{4}{k\pi}\sin(nb_1/2)\cos[n(z_1+b_1/2)]. \tag{8}$$

Потоки розсіяння визначаються тільки змінними складовими ряду Фур'є для густини струму за висотою обмотки, середня величина яких у межах висоти моделі дорівнює нулю.

Тоді рівняння Лапласа в часткових похідних (2) зводиться до звичайного диференційного рівняння для першої функції добутку Лапласа (5):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)-\left(n^2+\frac{1}{r^2}\right)F=0, \tag{9}$$

яке для областей 1 і 2 має розв'язки:

$$F_1 = C_{11}I_1(nr)+C_{12}K_1(nr); \quad F_3 = C_{31}I_1(nr)+C_{32}K_1(nr), \tag{10}$$

де I_1 і K_1 – модифіковані функції Бесселя (циліндричні) першого порядку відповідно першого і другого роду; C_{11}, C_{12}, C_{31}, C_{32} – сталі інтегрування.

Відповідно векторний потенціал у областях 1 і 3 визначається виразами:

$$A_1' = \sum_{k=1}^{\infty}[C_{11}I_1(nr)+C_{12}K_1(nr)]\cos(nz); \quad A_3' = \sum_{k=1}^{\infty}[C_{31}I_1(nr)+C_{32}K_1(nr)]\cos(nz); \tag{11}$$

Із умови неперервності векторного потенціалу магнітного поля в однорідному середовищі граничні умови на межі між областями 1 і 3 з лінійною густиною струму $\delta_{01}dr_1$ визначаються виразами

$$\left[A_1'\right]_{r=r_1} = \left[A_3'\right]_{r=r_1}; \tag{12}$$

$$\left(H_{1z}-H_{3z}\right)_{r=r_1} = \delta_{01}dr_1 \quad \text{або} \quad \left[\frac{1}{\mu_0 r}\left(\frac{\partial(rA_1')}{\partial r}-\frac{\partial(rA_3')}{\partial r}\right)\right]_{r=r_1} = \delta_{01}dr_1, \tag{13}$$

де H_{1z} і H_{3z} – осьові складові напруженості магнітного поля відповідно в області 1 і 3.

Розкриваючи граничні умови (3) , (12) і (13), для сталих інтегрування одержимо:

$$C_{11} = \mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1K_0(nr_0)B_{01}dr_1/B_0; \qquad C_{12} = \mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1I_0(nr_0)B_{01}dr_1/B_0;$$

$$C_{31} = \mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1K_0(nR)B_{02}dr_1/B_0; \qquad C_{32} = \mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1I_0(nR)B_{02}dr_1/B_0, \tag{14}$$

де $I_0(x)$ і $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя відповідно першого і другого роду нульового порядку.

Тоді

$$\begin{aligned} A_1' &= \mu_0\delta_{01}r_1dr_1\sum_{k=1}^{\infty}b_{k1}(B_{01}/B_0)[K_0(nr_0)I_1(nr)+I_0(nr_0)K_1(nr)]\cos(nz); \\ A_3' &= \mu_0\delta_{01}r_1dr_1\sum_{k=1}^{\infty}b_{k1}(B_{02}/B_0)[K_0(nR)I_1(nr)+I_0(nR)K_1(nr)]\cos(nz), \end{aligned} \tag{15}$$

де

$$B_0 = K_0(nr_0)I_0(nR) - I_0(nr_0)K_0(nR);$$

$$B_{01} = I_1(nr_1)K_0(nR) + I_0(nR)K_1(nr_1); \qquad B_{02} = I_1(nr_1)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_1(nr_1).$$

При заданому радіальному розмірові $a_1 = r_2\text{-}r_1$ первинної обмотки

$$A_1 = \int_{r_1}^{r_2} A_1' = \mu_0\delta_{01}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}(B_1/B_0)\cos(nz)[F_1K_0(nR)+F_2I_0(nR)] =$$

$$= (\pi\mu_0\delta_{01}/2)\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}B_1\cos(nz)(r_2D_2 - r_1D_4)/(nB_0);$$

$$A_2 = \int_{r_1}^{r} A_3' + \int_{r}^{r_2} A_1' = \tag{16}$$

$$= \mu_0\delta_{01}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}\cos(nz)\{B_2[F_3K_0(nr_0) + F_4I_0(nr_0)] + B_1[F_5K_0(nR) + F_6I_0(nR)]\}/B_0 =$$

$$= (\pi\mu_0\delta_{01}/2)\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}\cos(nz)\{r_2B_1D_2 - r_1B_2D_3 - B_0L_1(nr)/n\}/(nB_0);$$

$$A_3 = \int_{r_1}^{r_2} A_3' = \mu_0\delta_{01}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}B_2\cos(nz)[F_1K_0(nr_0)+F_2I_0(nr_0)]/B_0 =$$

$$= (\pi\mu_0\delta_{01}/2)\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}B_2\cos(nz)(r_2D_1 - r_1D_3)/(nB_0),$$

де $F_1 = \int_{r_1}^{r_2} r_1I_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(r_2B_3 - r_1B_4);$ $\quad F_2 = \int_{r_1}^{r_2} r_1K_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(r_2B_5 - r_1B_6);$

$$F_3 = \int_{r_1}^{r} r_1I_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(rB_7 - r_1B_4); \qquad F_4 = \int_{r_1}^{r} r_1K_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(rB_8 - r_1B_6);$$

$$F_5 = \int_{r}^{r_2} r_1I_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(r_2B_3 - rB_7); \qquad F_6 = \int_{r}^{r_2} r_1K_1(nr_1)dr_1 = \frac{\pi}{2n}(r_2B_5 - rB_8);$$

$$B_1 = K_0(nr_0)I_1(nr) - I_0(nr_0)K_1(nr); \qquad B_2 = K_0(nR)I_1(nr) - I_0(nR)K_1(nr);$$

$$B_3 = I_1(nr_2)L_0(nr_2) - I_0(nr_2)L_1(nr_2); \qquad B_4 = I_1(nr_1)L_0(nr_1) - I_0(nr_1)L_1(nr_1);$$

$$B_5 = K_1(nr_2)L_0(nr_2) + K_0(nr_2)L_1(nr_2); \qquad B_6 = K_1(nr_1)L_0(nr_1) + K_0(nr_1)L_1(nr_1);$$

$$B_7 = I_1(nr)L_0(nr) - I_0(nr)L_1(nr); \qquad B_8 = K_1(nr)L_0(nr) + K_0(nr)L_1(nr);$$

$L_0(x)$ і $L_1(x)$ – модифіковані функції Струве нульового і першого порядку.
Власна індуктивність розсіяння первинної обмотки визначається виразом

$$L_{\sigma 1} = \frac{2\pi w_1^2}{a_1^2 b_1^2 \delta_{01}} \int_{z_1}^{z_1+b_1} dz \int_{r_1}^{r_2} rA_2 dr =$$

$$= \frac{\pi^2 \mu_0 w_1^2 H}{4a_1^2 b_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_{k1}^2 / \left(n^2 B_0 \right) \right] \left[\pi r_2 D_2 \left(r_2 D_1 - r_1 D_3 \right) - \pi r_1 D_3 \left(r_2 D_2 - r_1 D_4 \right) - 2B_0 F_{01} \right], \qquad (17)$$

де

$$D_1 = B_3 K_0 (nr_0) + B_5 I_0 (nr_0); \qquad D_2 = B_3 K_0 (nR) + B_5 I_0 (nR);$$
$$D_3 = B_4 K_0 (nr_0) + B_6 I_0 (nr_0); \qquad D_4 = B_4 K_0 (nR) + B_6 I_0 (nR);$$
$$F_{01} = \int_{r_1}^{r_2} r L_1 (nr) dr.$$

Взаємна індуктивність розсіяння між первинною і вторинною обмотками залежить від взаємного розташування обмоток. При $r_3 \le r_4 \le r_1$ вона визначається виразом

$$M_{\sigma 12} = \frac{2\pi w_1 w_2}{a_1 b_1 a_2 b_2 \delta_{01}} \int_{z_3}^{z_3 + b_2} dz \int_{r_3}^{r_4} r A_1 dr =$$
$$= \frac{\pi^3 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left\{ K_0 (nR) \left[r_2 B_3 - r_1 B_4 \right] + I_0 (nR) \left[r_2 B_5 - r_1 B_6 \right] \right\} \times$$
$$\times \left\{ r_4 \left[B_9 K_0 (nr_0) + B_{11} I_0 (nr_0) \right] - r_3 \left[B_{10} K_0 (nr_0) + B_{12} I_0 (nr_0) \right] \right\} / (nB_0) =$$
$$= \frac{\pi^3 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left(r_2 D_2 - r_1 D_4 \right) \left(r_4 D_5 - r_3 D_6 \right); \qquad (18)$$

при $r_3 \le r_1 \le r_4 \le r_2$

$$M_{\sigma 12} = \frac{\pi^2 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left[\pi r_2 D_2 \left(r_4 D_5 - r_3 D_6 \right) + \pi r_1 \left(r_3 D_4 D_6 - r_4 D_3 D_7 \right) - 2B_0 F_{02} \right] / \left(n^2 B_0 \right);$$

(19)

при $r_3 \le r_1 \le r_2 \le r_4$

$$M_{\sigma 12} = \frac{\pi^2 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left[\pi r_3 D_6 \left(r_1 D_4 - r_2 D_2 \right) + \pi r_4 D_7 \left(r_2 D_1 - r_1 D_3 \right) - 2B_0 F_{01} \right] / \left(n^2 B_0 \right); \qquad (20)$$

при $r_1 \le r_3 \le r_2 \le r_4$

$$M_{\sigma 12} = \frac{\pi^2 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left[\pi r_3 \left(r_1 D_3 D_8 - r_2 D_2 D_6 \right) + \pi r_4 D_7 \left(r_2 D_1 - r_1 D_3 \right) - 2B_0 F_{03} \right] / \left(n^2 B_0 \right); \qquad (21)$$

при $r_1 \le r_3 \le r_4 \le r_2$

$$M_{\sigma 12} = \frac{\pi^2 \mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1 b_1 a_2 b_2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k1} b_{k2} \left[\pi r_2 D_2 \left(r_4 D_5 - r_3 D_6 \right) - \pi r_1 D_3 \left(r_4 D_7 - r_3 D_8 \right) - 2B_0 F_{04} \right] / \left(n^2 B_0 \right);$$

при

$$r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4 \qquad (22)$$

$$M_{\sigma 12} = \frac{2\pi w_1 w_2}{a_1 b_1 a_2 b_2 \delta_{01}} \int_{z_3}^{z_3 + b_2} dz \int_{r_3}^{r_4} r A_3 dr =$$

$$=\frac{\pi^3\mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1b_1a_2b_2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}b_{k2}\{K_0(nr_0)[r_2B_3-r_1B_4]+I_0(nr_0)[r_2B_5-r_1B_6]\}\times$$
$$\times\{r_4[B_9K_0(nR)+B_{11}I_0(nR)]-r_3[B_{10}K_0(nR)+B_{12}I_0(nR)]\}/(nB_0)=$$
$$=\frac{\pi^3\mu_0 w_1 w_2 H}{4a_1b_1a_2b_2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k1}b_{k2}(r_2D_1-r_1D_3)(r_4D_7-r_3D_8), \quad (23)$$

де

$$B_9=I_1(nr_4)L_0(nr_4)-I_0(nr_4)L_1(nr_4); \qquad B_{10}=I_1(nr_3)L_0(nr_3)-I_0(nr_3)L_1(nr_3);$$
$$B_{11}=K_1(nr_4)L_0(nr_4)+K_0(nr_4)L_1(nr_4); \qquad B_{12}=K_1(nr_3)L_0(nr_3)+K_0(nr_3)L_1(nr_3);$$
$$D_5=B_9K_0(nr_0)+B_{11}I_0(nr_0); \qquad D_6=B_{10}K_0(nr_0)+B_{12}I_0(nr_0);$$
$$D_7=B_9K_0(nR)+B_{11}I_0(nR); \qquad D_8=B_{10}K_0(nR)+B_{12}I_0(nR).$$
$$F_{02}=\int_{r_1}^{r_4} rL_1(nr)dr; \qquad F_{03}=\int_{r_3}^{r_2} rL_1(nr)dr; \qquad F_{04}=\int_{r_3}^{r_4} rL_1(nr)dr.$$

При відсутності феромагнітного осердя (r_0=0) у відповідних виразах необхідно прийняти, що C_{12}=0, а при відсутності циліндричної частини екрана ($R\to\infty$) – C_{31}=0. У першому випадку

$$C_{11}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1B_{01}dr_1/B_0;$$
$$C_{31}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1K_0(nR)I_1(nr_1)dr_1/I_0(nR); \qquad C_{32}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1I_0(nR)I_1(nr_1)dr_1/I_0(nR),$$

а у другому випадку

$$C_{11}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1K_0(nr_0)K_1(nr_1)dr_1/K_0(nr_0); \qquad C_{11}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1I_0(nr_0)K_1(nr_1)dr_1/K_0(nr_0);$$
$$C_{32}=\mu_0\delta_{01}b_{k1}r_1B_{02}dr_1/K_0(nr_0).$$

Якщо частини екрана в формі шайб є надпровідними, то на їх поверхні векторний потенціал дорівнює нулеві. Тоді

$$\Phi_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(nz); \qquad \delta_0=\delta_{01}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k1}\sin(nz);$$
$$n=(2k-1)\pi/H; \qquad b_{k1}=\frac{4}{nH}\sin[n(z_1+b_1/2)]\sin(nb_1/2);$$
$$b_{k2}=\frac{4}{nH}\sin[n(z_2+b_2/2)]\sin(nb_2/2).$$

У випадку, коли шайба з координатою z=0 є надпровідною, а шайба з координатою z=H має безмежну магнітну проникність, одержимо

$$\Phi_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(nz); \qquad \delta_0=\delta_{01}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k1}\sin(nz);$$
$$n=(2k-1)\pi/(2H); \qquad b_k=\frac{4}{nH}\sin[n(z\ +b\ /2)]\sin(nb\ /2);$$
$$b_{k2}=\frac{4}{nH}\sin[n(z_2+b_2/2)]\sin(nb_2/2).$$

Навпаки, коли шайба з координатою z=0 має безмежну магнітну проникність, а шайба з координатою z=H є надпровідною, одержимо:

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(nz); \qquad \delta_0 = \delta_{01} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k1} \cos(nz);$$

$$n = (2k-1)\pi/(2H); \qquad b_{k1} = \frac{4}{nH} \sin(nb_1/2) \cos[n(z_1 + b_1/2)];$$

$$b_{k2} = \frac{4}{nH} \sin(nb_2/2) \cos[n(z_2 + b_2/2)].$$

Якщо надпровідною є циліндрична частина екрана з радіусом R, то у відповідних виразах необхідно замість $I_0(nR)$ і $K_0(nR)$ підставити відповідно $[-I_1(nR)]$ і $K_1(nR)$ Якщо ж надпровідною є циліндрична поверхня стрижня з радіусом r_0, то замість $I_0(nr_0)$ і $K_0(nr_0)$ необхідно підставити відповідно $[-I_1(nr_0)]$ і $K_1(nr_0)$.

Отримані результати дають змогу дослідити вплив геометричних розмірів і взаємного розміщення обмоток, а також розмірів і властивостей елементів екрана на власну та взаємну індуктивності розсіяння циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді.

1. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Ленинградское отделение: Энергия. 1970. 2. Скоклюк М.І., Яцун А.М., Яцун М.А. Власна і взаємна індуктивності циліндричних співвісних обмоток на феромагнітному осерді // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1997. № 301. С.94–102. 3. Смайт В. Электростатика и электродинамика / Пер. со второго американского издания. М., 1954.

УДК 621

Кватер Т.
Ряшівський педагогічний університет

АНАЛІЗ РОБОЧОГО СТАНУ АВІАЦІЙНОГО МОТОРА

Запропоновано методику діагностики робочого стану авіаційного мотора, яка базується на оцінці характеристик його вібрацій. Наведено результати розрахунку.

Забезпечення безпеки польотів є найважливішим завданням для повітряного за’язку. Для досягнення цієї мети передбачається вироблення такого підходу, який би забезпечував поточний контроль стану моторної ґрупи такою мірою, щоб звести до мінімуму ризик аварій. Понад це ставиться вимога зменшити кошти на експлуатацію шляхом збільшення терміну між плановими ремонтами і можливості безпосереднього контролю пілотом технічного стану моторної ґрупи.