земної поверхні, добре узгоджуються з картами деформацій земної поверхні, побудованими за результатами повторних нівелювань [1].

Отримані результати слід врахувати при плануванні та оптимізації повторного циклу високоточного нівелювання України.

1. Третяк К.Р. Карта сучасних градієнтів швидкостей вертикальних деформацій земної поверхні Кримського півострова // Збірн. наук. доп. IV-го наук.-техн. симп. "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS-технології. 1999. Алушта. С.56–60. 2. Третяк К.Р., Якобчук Т. Дослідження точності високоточної нівелірної мережі України // Зб. мат. наук.-техн. симп. "ГЕОМОНІТОРИНГ – 99". Моршин–Львів 1999. С. 140. 3. Третяк К.Р. Аналіз впливу випадкових та систематичних похибок на точність державної нівелірної мережі України 1-го класу // Ювілейний зб. наук. пр. присвячений 5-й річниці професійного свята працівників Геології, геодезії та картографії. Ліга–Прес. Львів, 2000. С.51–53. 4. Третяк К.Р. Карта сучасних градієнтів швидкостей вертикальних деформацій земної поверхні Кримського півострова // Геодинаміка. 1(2). 1999. С. 22–30.

УДК 528.21/22

Фоца Р.С.

НУ "Львівська політехніка", кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірювань

КОВАРІАЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОЗДОВЖНІХ І ПОПЕРЕЧНИХ КОМПОНЕНТ ВІДХИЛЕНЬ ВИСКА

В статье на основании потенциалов нецентральных радиальных мультиполей получены выражения для ковариационных функций составляющих уклонений отвеса.

The covariation functions of the deflection of vertical was obtained by means non-central radial multipole potential.

Останнім часом при дослідженнях збурюючого потенціалу та його трансформант в регіональному та локальному масштабах широко застосовується метод середньої квадратичної колокації. В [1,2] доводиться можливість використання потенціалів нецентральних радіальних мультиполів як коваріаційної функції збурюючого потенціалу T у методі середньої квадратичної колокації. В [3] отримані коваріаційні функції для повздовжніх l і поперечних m компонент відхилень виска. Наведемо їх:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cov}_n[l_P, l_Q] = {} & \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \xi_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} + \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \eta_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} + \\
& + \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \xi_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} + \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \eta_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP}, \\
\operatorname{cov}_n[m_P, m_Q] = {} & \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \xi_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} - \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \eta_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} - \\
& - \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \xi_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} + \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \eta_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP}, \\
\operatorname{cov}_n[l_P, m_Q] = {} & \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \xi_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} - \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \eta_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} + \\
& + \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \xi_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} - \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \eta_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP}, \\
\operatorname{cov}_n[m_P, l_Q] = {} & \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \xi_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} + \operatorname{cov}_n\left[\xi_P, \eta_Q\right]\sin\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP} - \\
& - \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \xi_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\cos\alpha_{QP} - \operatorname{cov}_n\left[\eta_P, \eta_Q\right]\cos\alpha_{PQ}\sin\alpha_{QP}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

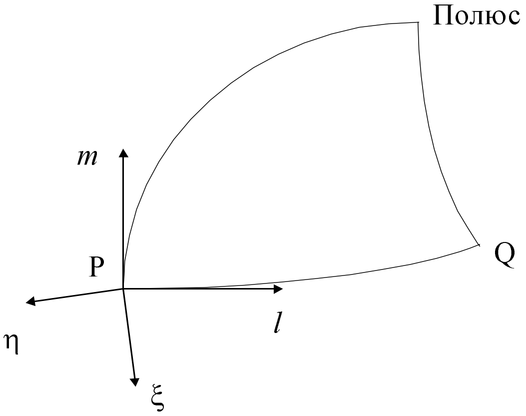

Рис.1. Сферичний трикутник, що пов'язує компоненти ξ, η з *l*, *m*

Нагадаємо, що компоненти *l* і *m* були введені Г.Моріцом як проекція на напрямок великого кола (*l*), що проходить через точки P і Q, та перпендикулярний йому напрямок (*m*) (рис.1). Взаємні коваріаційні функції, які пов'язані з допоміжними компонентами l і m, вигідно відрізняються від коваріаційних функцій, пов'язаних з ξ і η; оскільки залежать лише від сферичної відстані ψ між точками P і Q (коваріаційні функції, що пов'язані з ξ і η, залежать також від напрямку вектора PQ).

З визначення випливає, що в точці P

$$\left.\begin{aligned}
l &= -\xi\cos\alpha_{PQ} - \eta\sin\alpha_{PQ}, \\
m &= -\xi\sin\alpha_{PQ} + \eta\cos\alpha_{PQ},
\end{aligned}\right\}, \quad (2)$$

де α_{PQ} − азимут напрямку PQ в точці P, який можна знайти за формулою:

$$tg\alpha_{PQ} = \frac{\sin\vartheta_Q \sin\left(\lambda_Q - \lambda_P\right)}{\sin\vartheta_P\cos\vartheta_Q - \cos\vartheta_P\sin\vartheta_Q\cos\left(\lambda_Q - \lambda_P\right)}. \quad (3)$$

В формулах (1) відповідні коваріації між ξ і η обчислюються за формулами (4)

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]=\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \vartheta_Q}\frac{\partial t}{\partial \vartheta_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta_P \partial \vartheta_Q}\right],\\
&\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]=\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q \sin\vartheta_P \sin\vartheta_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial \lambda_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda_P \partial \lambda_Q}\right],\\
&\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]=-\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q \sin\vartheta_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial \vartheta_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \vartheta_P \partial \lambda_Q}\right].\\
&\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]=-\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q \sin\vartheta_P}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \vartheta_Q}\frac{\partial t}{\partial \lambda_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda_P \partial \vartheta_Q}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (4),$$

Рекурентні формули для першої $\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}$ та другої $\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}$ похідних мультиполя *n*-го порядку, а також всі необхідні величини для обчислень за цими формулами наведені нижче (формули (5) та (6), відповідно):

$$\left.\begin{aligned}
&nq_i^2\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}=2ns_i V_n^i(P)+(2n-1)V_{n-1}^i(P)+\\
&\qquad+(2n-1)(t-s_i)\frac{\partial V_{n-1}^i(P)}{\partial t}-(n-1)\frac{\partial V_{n-2}^i(P)}{\partial t},\\
&\frac{\partial V_0^i(P)}{\partial t}=\frac{s_i}{q_i^3},\\
&\frac{\partial V_1^i(P)}{\partial t}=\frac{1}{q_i^3}+(t-s_i)\frac{3s_i}{q_i^5}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&nq_i^2\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}=4ns_i\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}+(4n-2)\frac{\partial V_{n-1}^i(P)}{\partial t}+\\
&\qquad+(2n-1)(t-s_i)\frac{\partial^2 V_{n-1}^i(P)}{\partial t^2}-(n-1)\frac{\partial^2 V_{n-2}^i(P)}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial^2 V_0^i(P)}{\partial t^2}=\frac{3s_i^2}{q_i^5},\\
&\frac{\partial^2 V_1^i(P)}{\partial t^2}=\frac{6s_i}{q_i^5}+(t-s_i)\frac{15s_i^2}{q_i^7}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$V_n^i(P)$ можна обчислити за допомогою рекурентної формули, наведеної в [1]:

$$nq_i^2V_n^i(P)=(2n-1)(t-s_i)V_{n-1}^i(P)-(n-1)V_{n-2}^i(P), \tag{7}$$

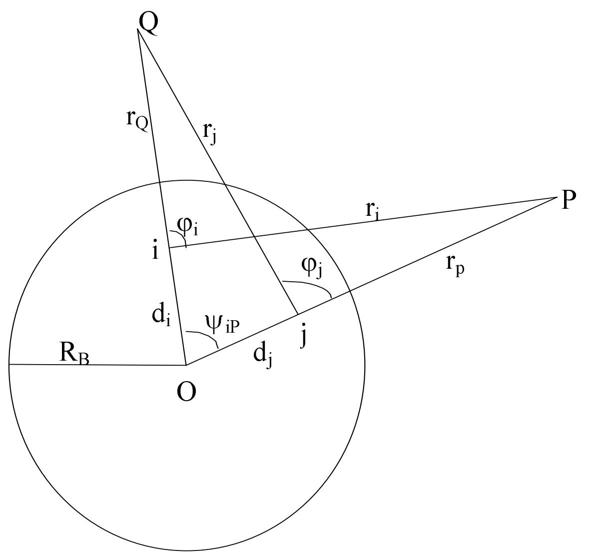

Рис.2. До пояснення елементів формул (5)-(9).

в цій формулі

$$\left.\begin{aligned}
t&=\cos\psi_{ip},\\
q_i&=\sqrt{1+s_i^2-2s_it},\\
s_i&=\frac{d_i}{r_P},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

а для розрахунку за рекурентною формулою (7) маємо вирази для мультиполів нульового і першого порядків:

$$\left.\begin{aligned}
V_0^i(P)&=\frac{1}{q_i},\\
V_1^i(P)&=(t-s_i)\frac{1}{q_i^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Зміст елементів формул (5)-(9) зрозумілий з рис.2

В [4] наведені вирази для похідних кута ψ по φ_p,λ_p:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_P}&=-\cos\alpha_{PQ},\\
\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P}&=-\cos\varphi_P\sin\alpha_{PQ}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Якщо перейти від широти φ до полярної відстані ϑ, останні дві формули матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_P} &= \cos\alpha_{PQ}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P} &= -\sin\vartheta_P \sin\alpha_{PQ} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Використаємо формули (9), щоб отримати вирази для похідних від $t = \cos\psi$ по сферичних координатах точки P через азимут напрямку PQ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial\vartheta_P} &= \frac{\partial\cos\psi}{\partial\vartheta_P} = -\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_P} = -\sin\psi\cos\alpha_{PQ}, \\ \frac{\partial t}{\partial\lambda_P} &= \frac{\partial\cos\psi}{\partial\lambda_P} = -\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P} = \sin\psi\sin\vartheta_P\sin\alpha_{PQ}, \\ \frac{\partial t}{\partial\vartheta_Q} &= -\sin\psi\cos\alpha_{QP}, \\ \frac{\partial t}{\partial\lambda_Q} &= \sin\psi\sin\vartheta_Q\sin\alpha_{QP}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Підставивши тепер формули (10) в формули (4), а ті, своєю чергою, у формули (1) і виконавши всі необхідні перетворення із застосуванням формул сферичної тригонометрії, отримаємо такий вирази для коваріацій:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cov}_n[l_P, l_Q] &= \frac{1}{\gamma_P\gamma_Q r_P r_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\left(\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\cos\psi - \frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\sin^2\psi\right) \\ \operatorname{cov}_n[m_P, m_Q] &= \frac{1}{\gamma_P\gamma_Q r_P r_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t} \\ \operatorname{cov}_n[l_P, m_Q] &= 0 \\ \operatorname{cov}_n[m_P, l_Q] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Особливо хочеться звернути увагу на те, що останні дві коваріації дорівнюють нулю. Ця особливість дає змогу при використанні групової колокації або обертанні блокових матриць зменшити обсяг розрахунків, одночасно збільшуючи обсяг даних, які можна обробляти.

Отже, отримані коваріаційні функції для повздовжніх l та поперечних m компонент відхилень виска можуть бути використані для апроксимації гравітаційного потенціалу Землі системою нецентральних радіальних мультиполів.

1. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. I. Теоретические основы метода // Кинематика и физика небесных тел. 1987. –3. № 2. С.54–62. 2. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. II. Предварительный мульти-польний анализ // Кинематика и физика небесных тел. 1987. –3. № 3. С.38–44. 3. Фоца Р.С. Коваріаційні функції для складових відхилень виска // Міжвідомчий наук.-техн. зб. 1999. Вип. 59. С.35–40. 4. Heiskanen W.A., Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco, 1967. P.113.