

Для обчислення матриці обернених ваг Q скористаємося [1]:

$$Q = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1}. \quad (13)$$

Здійснивши сингулярний розклад матриці \underline{A} за формулою (5), будемо мати

$$Q = \left[(\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T)^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \right]^{-1}. \quad (14)$$

Виконавши транспонування та застосовуючи співвідношення (9), матрицю (14) запишемо

$$Q = \left[\underline{W} \underline{\Sigma} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \right]^{-1}. \quad (15)$$

Використовуючи властивості оберненої матриці добутку та ортогональної матриці, остаточно одержимо матрицю обернених ваг оцінюваної величини

$$Q = \underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{W}^T. \quad (16)$$

Отже, застосовуючи апарат сингулярного розкладу до матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок, ми отримали нові формули для оцінки точності в методі найменших квадратів: для обчислення середньої квадратичної помилки одиниці ваги – формулу (12); для обчислення обернених ваг врівноважених параметрів – формулу (16). Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко одержати елементи μ і Q оцінки точності, практично ігноруючи складну процедуру обертання матриці.

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М., 1977. 2. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М., 1968. 3. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений: Уч. пос. М., 1990. 4. Согор А.Р. Узгодження параметрів референц-еліпсоїда з даними про регіональне гравітаційне поле: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львів, 1996. 18 с. 5. Согор А.Р., Марченко О.М. До питання врахування коваріаційної матриці помилок при обробці геодезичних вимірів // Геодезія, картографія та аерофотознімання, 1999. Вип. 59. С.33–34. 6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980.

УДК 528.063

Третяк К.Р.

НУ “Львівська політехніка”, кафедра вищої геодезії та астрономії

НОВИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ВИПАДКОВИХ ТА СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК НА ТОЧНІСТЬ ВИСОТНИХ МЕРЕЖ (на прикладі державної нівелірної мережі 1-го класу України)

© Третяк К.Р., 2000

В статті пропонується новий алгоритм визначення впливу випадкових та систематичних похибок на точність висотних мереж (на прикладі державної нівелірної мережі 1-го класу України). Алгоритм оснований на рекуррентних формулах. Методика апробована на

государственной нивелирной сети Украины. По результатам последнего цикла наблюдений (1971-1993 гг.) определено, что на 1 км нивелирного хода случайная погрешность составляет 0,49 мм, систематическая – 0,06 мм, а погрешности, обусловленные деформациями земной поверхности, – 0.015 мм/год.

The new algorithm was proposed for the determination of total quantitative characteristics of 3 groups of errors, which effect within whole measurement cycle in leveling networks: 1) random errors, 2) systematic errors, 3) errors caused by the Earth's surface deformations. The algorithm is based on recursive formulas. The technique was tested in the case of the Ukrainian State Leveling Network. It was determined from the last cycle of measurements (1971 – 1993) that the errors for 1 km of a leveling trace are the following: the random error – 0.49 mm, the systematic error – 0.06 mm, and the error caused by the Earth's surface deformations – 0.015 mm/year.

Створення глобальних висотних мереж, як правило, вимагає тривалого часу. Наприклад, останній цикл нівелювання висотної мережі України тривав з 1971 по 1993 рр. Обсяги нівелювань були нерівномірно рознесені в часі та в просторі мережі (рис 1.). Мережа утворена з 30 замкнених полігонів ліній нівелювання першого класу загальною довжиною 12100 км (рис 2). У створенні мережі брали участь різні виконавці, застосовувалися різноманітні прилади, а кожна лінія нівелювання проходила в своєрідних природних умовах. Всі ці фактори створюють ряд випадкових та систематичних похибок, які, враховуючи ієрархічну структуру висотних побудов (мережа – лінія – секція – хід – станція), на різних рівнях обробки результатів нівелювання нагромаджуються, або навпаки, взаємокомпенсуються [3]. На рівні станції нівелювання встановлено всі джерела випадкових та систематичних похибок. В нівелірному ході, який виконується однією бригадою протягом одного дня, деякі з цих похибок накопичуються, а інші за рахунок методики нівелювання навпаки, компенсуються. Відповідно в секції нівелювання, роботи в якій проводяться однією бригадою і одними інструментами, але протягом кількох днів або тижнів, із змінами умов нівелювання також накопичуються чи компенсуються деякі похибки нівелювання. Аналогічні процеси відбуваються при обробці ліній нівелювання, вимірювання на яких проводяться тривалий час, різними бригадами та інструментами, та при урівноваженні замкнутих полігонів і висотних мереж, які ще охоплюють значні території з характерними і різноманітними природними умовами.

В результаті на рівні глобальної мережі ми спостерігаємо вплив випадкових похибок які згідно із своєю природою накопичуються в лініях нівелювань пропорційно \sqrt{L} : де L – довжина лінії нівелювання та систематична похибка, які, зрозуміло, пропорційні L . Однак в кожній лінії нівелювання систематична помилка на 1 км ходу та її знак залежать від ряду факторів, які особливі для кожної лінії (перепад висот між кінцевими реперами лінії, досконалість метрологічного забезпечення використовуваних інструментів, характеристик ґрунтів, за якими виконується нівелювання тощо). Відповідно на рівні мережі систематичні похибки пов'язані з технологією нівелювання, для кожної лінії, будуть пропорційно L накопичуватись, але з різною швидкістю і будуть додатними або від'ємними. Такі систематичні похибки при урівноваженні мереж можна характеризувати випадковими, але пропорційними L .

Якщо в лініях нівелювання існують систематичні похибки, які пропорційні виміряним перевищенням і мають однаковий знак, то вони не впливають на нев'язки полігонів. Сума цих похибок в замкнутому полігоні дорівнює нулю. Відповідно урівноваження мережі не

дає змоги ні послабити їх вплив, ні оцінити їх. Їх виявлення можливе тільки при комбінації геометричного нівелювання і альтернативних методів (наприклад, GPS-нівелювання). Крім цих похибок, є ще природні фактори, які спотворюють результати нівелювання. Враховуючи, що повний цикл нівелювання триває десятки років, то за цей час вузлові репері мережі зазнають зміни у висотному положенні за рахунок впливу ендогенних та екзогенних факторів (рухи земної кори, приповерхневі геоморфологічні процеси). Оскільки ці висотні зміщення є повільними і плавно змінюють напрям та швидкість на значних площах земної поверхні, то спричинені ними зміни в перевищеннях будь пропорційні L і періоду $\Delta T_i = T_i - T_{cp}$, де T_i – епоха нівелювання конкретної лінії, а T_{cp} – середня епоха нівелювання всієї мережі. Вважаємо, що кінематика реперів описується моделлю рівномірного руху. Доказом суттєвого впливу цього фактора на точність результатів урівноваження є випадкова похибка нівелювання висотної мережі України, визначена за нев'язками полігонів $\eta = 1.74$ мм [2]. За теоретичними розрахунками та оцінкою точності окремих ліній нівелювань висотної мережі України ця похибка є вдвічі, втричі меншою. Очевидно, що отриманий результат не враховує суттєвого фактора – деформацій земної поверхні, які відбуваються протягом всього циклу нівелювання.

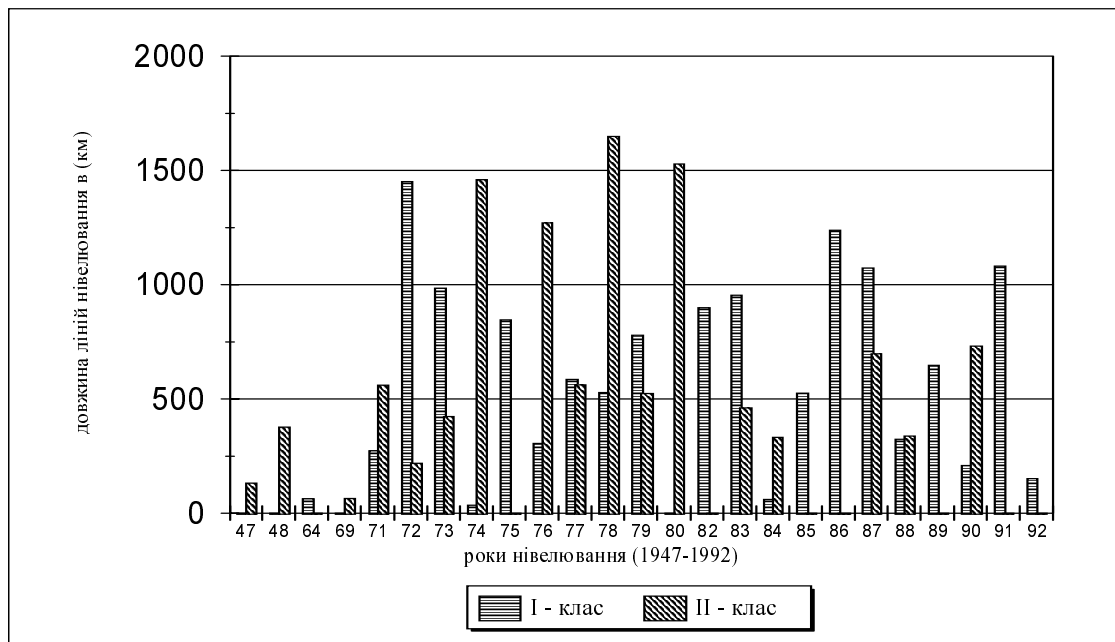


Рис. 1. Розподіл в часі обсягів нівелювання першого та другого класів висотної мережі України

Зважаючи на викладені допущення, ми матимемо можливість врахувати при урівноваженні мережі деформації земної поверхні і достовірно оцінити значення випадкових та систематичних помилок. Для цього розроблено спеціальний алгоритм урівноваження мережі корелатним способом із застосуванням специфічних умовних рівнянь.

Так, для замкнутого полігона умовне рівняння має такий вигляд

$$v_{12}^{(1)} + v_{23}^{(1)} + \dots + v_{n1}^{(1)} + v_{12}^{(2)} + v_{23}^{(2)} + \dots + v_{n1}^{(2)} + v_{12}^{(3)} + v_{23}^{(3)} + \dots + v_{n1}^{(3)} + w = 0, \quad (1)$$

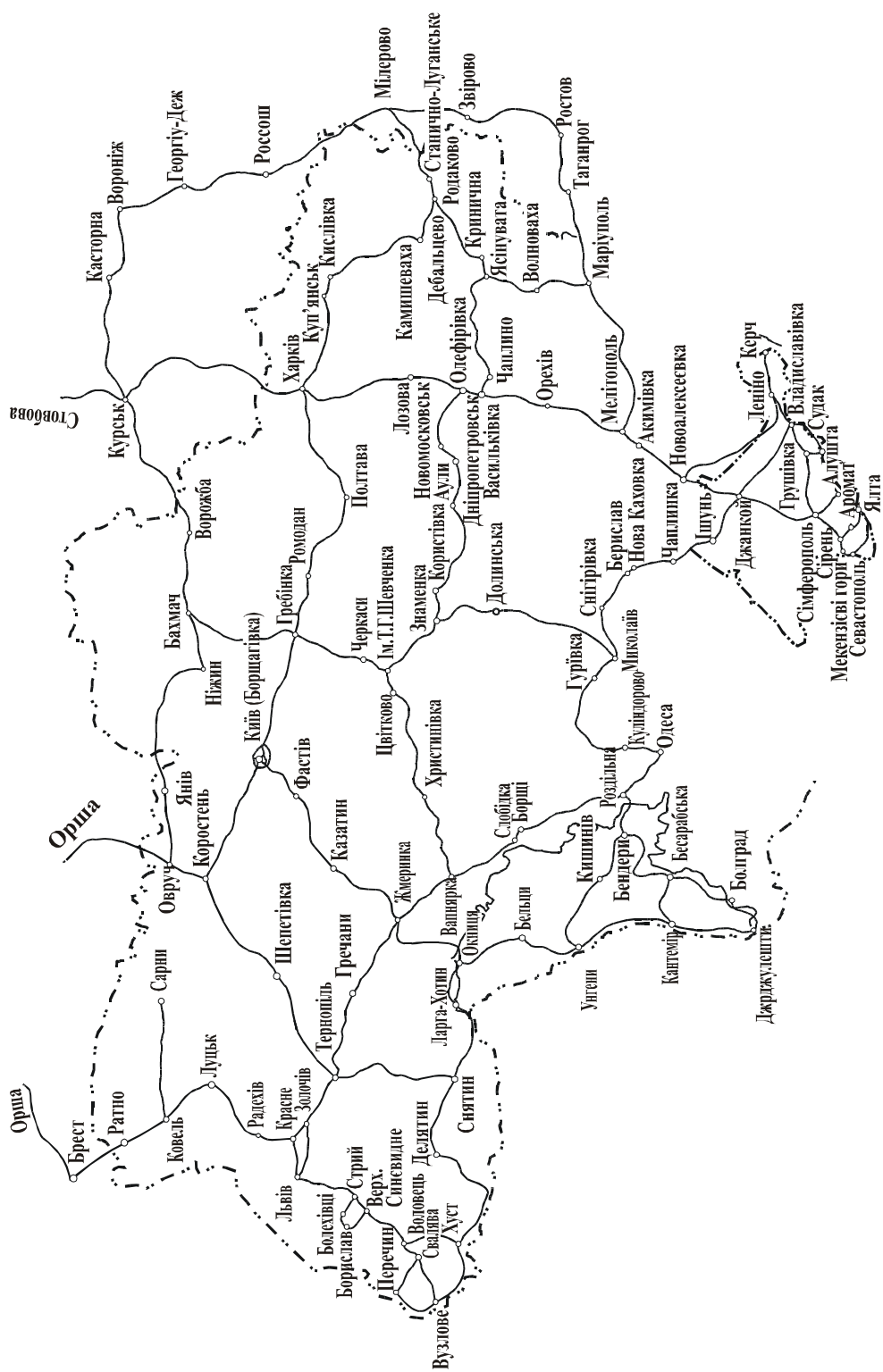


Рис. 2. Схема нівелірної мережі 1-го класу України

де $v_{i,i+1}^{(1)}, v_{i,i+1}^{(2)}, v_{i,i+1}^{(3)}$ поправки в $i, i+1$ перевищення за випадкову (пропорційну \sqrt{L}), випадкову (пропорційну L) похибки нівелювання, та деформацію земної поверхні, w – нев'язка замкнутого полігона, n – кількість вимірних перевищень. В матричному вигляді рівняння поправок запишуться

$$\|A, A, A'\| \cdot \begin{vmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \\ V^{(3)} \end{vmatrix} + W = 0, \quad (2)$$

де $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{vmatrix}$ – матриця коефіцієнтів умовних рівнянь;

$$V^{(j)} = \begin{vmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \\ \dots \\ v_n^{(j)} \end{vmatrix}, j = 1, 2, 3; W = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{vmatrix}; A' = \begin{vmatrix} a_1 \cdot \text{sign}(\Delta T_1) & a_2 \cdot \text{sign}(\Delta T_2) & \dots & a_n \cdot \text{sign}(\Delta T_n) \\ b_1 \cdot \text{sign}(\Delta T_1) & b_2 \cdot \text{sign}(\Delta T_2) & \dots & b_n \cdot \text{sign}(\Delta T_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 \cdot \text{sign}(\Delta T_1) & q_2 \cdot \text{sign}(\Delta T_2) & \dots & q_n \cdot \text{sign}(\Delta T_n) \end{vmatrix};$$

$\text{sign}(\Delta T)$ – функція, яка набирає значення $+1$ при $\Delta T > 0$, -1 при $\Delta T < 0$, і 0 при $\Delta T = 0$.

Співвідношення ваг відповідних поправок таке

$$p^{(1)} = \frac{1}{m_{\text{вип}}^2 L}, \quad p^{(2)} = \frac{1}{m_{\text{сисст}}^2 L^2}, \quad p^{(3)} = \frac{1}{m_{\text{деф}}^2 L^2 \Delta T^2}, \quad (2)$$

де $m_{\text{вип}}^2, m_{\text{сисст}}^2, m_{\text{деф}}^2$ – відповідно, середня квадратична: випадкова (пропорційна \sqrt{L}), випадкова (пропорційна L) похибки нівелювання, похибка за деформацію земної поверхні.

Діагональна матриця обернених ваг є такою

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{P^{(1)}} & & \\ & \frac{1}{P^{(2)}} & \\ & & \frac{1}{P^{(3)}} \end{vmatrix}; \quad (3)$$

$$\text{де } \frac{1}{P^{(j)}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{P_1^{(j)}} & & \\ & \frac{1}{P_2^{(j)}} & \\ & & \dots \\ & & & \frac{1}{P_n^{(j)}} \end{vmatrix}, j = 1, 2, 3;$$

Нормальні рівняння можна записати у вигляді

$$N \cdot K + W = 0, \quad (4)$$

де $N = A \cdot P^{-1} \cdot A^T$, а $K = -N^{-1} \cdot W$ – вектор корелат. Вектор поправок знаходимо за залежністю

$$V = P^{-1} \cdot A^T \cdot K. \quad (5)$$

У першому наближенні для знаходження ваг використано згідно з інструкцією з високоточного нівелювання – випадкову та систематичну похибки нівелювання на 1 км ходу, які дорівнюють $\eta = 0.8$ мм/км, $\sigma = 0.08$ мм/км. Вертикальну деформацію земної поверхні прийнято 10^{-7} 1/рік, що відповідає приблизно середньому градієнту вертикальних деформацій земної поверхні на території України, що дорівнює 0.1мм/км*рік [1]. Середня епоха нівелювання мережі була прийнята 1980 р.

Урівноваження виконувалось за методикою корелатного методу. Оцінка точності виконувалась згідно з такими залежностями

$$\eta_{\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{p^{(1)} v^{(1)} v^{(1)} m_{\text{вип}}^2}{r}}, \sigma_L = \sqrt{\frac{p^{(2)} v^{(2)} v^{(2)} m_{\text{сис}}^2}{r}}, \zeta_{L\Delta T} = \sqrt{\frac{p^{(3)} v^{(3)} v^{(3)} m_{\text{деф}}^2}{r}} \quad (6)$$

де r – кількість умовних рівнянь; $\eta_{\sqrt{L}}$ – ср. кв. випадкова помилка на 1 км ходу (пропорційна \sqrt{L}), σ_L – ср. кв. випадкова на 1 км ходу похибка нівелювання або ср. кв. систематична на 1 км ходу похибка в лініях нівелювання (пропорційна L), та $\zeta_{L\Delta T}$ ср. кв. похибка, викликана деформацією земної поверхні за 1 рік на 1 км ходу. В результаті урівноваження та оцінки точності обчислено, що при такому співвідношенні ваг значення $\eta_{\sqrt{L}} = 0.11$ мм/км, $\sigma_L = 0.008$ мм/км, $\zeta_{L\Delta T} = 0.043$ мм/(км·рік). В даному випадку апіорна та апостеріорна оцінка точності результатів вимірювань має суттєві розбіжності. Результати оцінки точності вимірів після урівноваження суттєво відрізняються від теоретичних розрахунків.

Оскільки ми строго приймаємо закони накопичення всіх досліджуваних помилок, то помилки, які визначають співвідношення ваг, повинні дорівнювати відповідним помилкам, які отримуються в результаті оцінки точності вимірювань після урівноваження мережі. Тільки за такої умови наші допущення про розподіл та накопичення похибок будуть справедливі в мережі. Для цього необхідно, щоб

$$m_{\sqrt{L}} = \eta_{\sqrt{L}}, \quad m_L = \sigma_L, \quad m_{\text{деф}} = \zeta_{L\Delta T}. \quad (7)$$

Ці рівності можна отримати ітераційним методом. За результатами послідовних ітерацій встановлено, що виконання рівностей (4) для висотної мережі 1-го класу України є при таких значеннях відповідних помилок $m_{\sqrt{L}} = \eta_{\sqrt{L}} = 0.49$ мм/км, $m_L = \sigma_L = 0.06$ мм/км, $m_{\text{деф}} = \zeta_{L\Delta T} = 0.015$ мм/(км·рік).

Значення похибок $\eta_{\sqrt{L}}$, σ_L – в допустимих межах нормативних інструкцій.

За отриманими результатами розраховано вплив випадкових систематичних похибок нівелювання та деформацій земної поверхні на точність визначення висот реперів нівелірної мережі першого класу. Розраховано точність за технологією параметричного методу урівноваження. Вихідним пунктом мережі прийнято фундаментальний репер м.Миколаєва. Це обумовлено тим, що мореограф м. Миколаєва може бути прийнятий початковим пунктом національної референтної системи висот.

На рис. 3–5 наведено ізолінії похибок визначення висот пунктів мережі першого класу, обумовлених відповідно випадковими, систематичними похибками нівелювання та деформаціями земної поверхні. На рис. 6 зображено ізолінії похибок визначення висот пунктів мережі першого класу, зумовлених сумарним впливом всіх похибок нівелювання та деформацій земної поверхні. Сумарна похибка розраховувалась за таким виразом

$$m_{\text{сум}} = \sqrt{m_{\eta}^2 + (m_{\sigma} + m_{\zeta})^2}, \quad (8)$$

де m_{η} , m_{σ} , m_{ζ} – середні квадратичні похибки визначення висот пунктів, зумовлені, відповідно, випадковими і систематичними похибками нівелювання та деформаціями земної поверхні. У виразі (5) похибки m_{σ} і m_{ζ} підсумовуються, оскільки вони, на відміну від m_{η} , є систематичними.



Рис. 3. Ізолінії похибок визначення висот пунктів нівелірної мережі першого класу, зумовлених випадковими похибками нівелювання (вихідний пункт – фундаментальний репер м. Миколаєва)

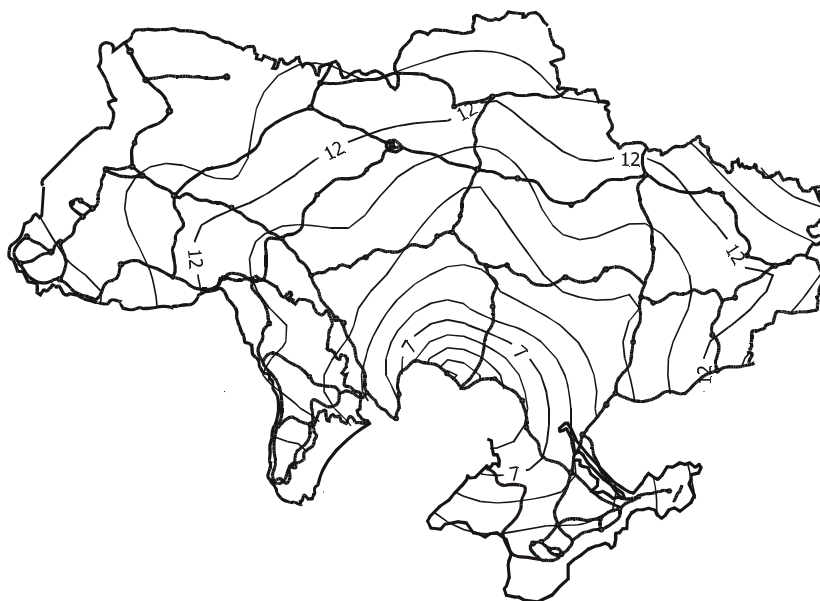


Рис. 4. Ізолінії похибок визначення висот пунктів нівелірної мережі першого класу, зумовлених систематичними похибками нівелювання (вихідний пункт – фундаментальний репер м. Миколаєва)



Рис. 5. Ізолінії похибок визначення висот пунктів нівелірної мережі першого класу, зумовлених деформаціями земної поверхні (вихідний пункт – фундаментальний репер м.Миколаєва)



Рис. 6. Ізолінії похибок визначення висот пунктів нівелірної мережі першого класу, зумовлених сумарним впливом випадкових і систематичних похибок та деформацій земної поверхні (вихідний пункт – фундаментальний репер м. Миколаєва)

За отриманими розрахунками максимальна сумарна та випадкова похибки визначення висот пунктів мережі є на території Карпат і досягають відповідно 30 мм та 21 мм. Максимальні похибки визначення висот пунктів, викликані систематичними похибками нівелювання, досягають 15 мм на окраїнах мережі. Максимальні похибки визначення висот пунктів, викликані деформаціями земної поверхні, досягають 7 мм на території Карпат, Криму та центральної частини України. Екстремуми похибок, викликаних деформаціями

земної поверхні, добре узгоджуються з картами деформацій земної поверхні, побудованими за результатами повторних нівелювань [1].

Отримані результати слід врахувати при плануванні та оптимізації повторного циклу високоточного нівелювання України.

1. Третьяк К.Р. Карта сучасних градієнтів швидкостей вертикальних деформацій земної поверхні Кримського півострова // Збірн. наук. доп. IV-го наук.-техн. симп. "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища – GPS і GIS-технології. 1999. Алушта. С.56–60. 2. Третьяк К.Р., Якобчук Т. Дослідження точності високоточної нівелірної мережі України // Зб. мат. наук.-техн. симп. "ГЕОМОНІТОРИНГ – 99". Моршин–Львів 1999. С. 140. 3. Третьяк К.Р. Аналіз впливу випадкових та систематичних похибок на точність державної нівелірної мережі України 1-го класу // Ювілейний зб. наук. пр. присвячений 5-й річниці професійного свята працівників Геології, геодезії та картографії. Ліга–Прес. Львів, 2000. С.51–53. 4. Третьяк К.Р. Карта сучасних градієнтів швидкостей вертикальних деформацій земної поверхні Кримського півострова // Геодинаміка. 1(2). 1999. С. 22–30.

УДК 528.21/22

Фоца Р.С.

НУ "Львівська політехніка", кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірювань

КОВАРІАЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОЗДОВЖНИХ І ПОПЕРЕЧНИХ КОМПОНЕНТ ВІДХИЛЕНЬ ВІСКА

© Фоца Р.С., 2000

В статье на основании потенциалов нецентральных радиальных мультиполей получены выражения для ковариационных функций составляющих уклонений отвеса.

The covariation functions of the deflection of vertical was obtained by means non-central radial multipole potential.

Останнім часом при дослідженнях збурюючого потенціалу та його трансформант в регіональному та локальному масштабах широко застосовується метод середньої квадратичної колокації. В [1,2] доводиться можливість використання потенціалів нецентральных радіальних мультиполів як коваріаційної функції збурюючого потенціалу T у методі середньої квадратичної колокації. В [3] отримані коваріаційні функції для поздовжніх l і поперечних m компонент відхилень виска. Наведемо їх: