Нам залишилось розглянути залежність помилок відліків від якості нанесення поділок рейок. Середні зміни помилок при користуванні різними краями шашок рейок очевидні з останньої колонки табл. 1. Точність суміщень залежно від якості країв ниток помітно змінюється. Ці зміни максимально досягають: за середніми результатами одного контактування – 29 мікрон; за середніми результатами подвійного контактування – 57 мікрон. Звідси зрозуміло, що якісне нанесення поділок рейки, які використовуються для нівелювання методом суміщень, є важливим фактором.

Підсумовуючи вищесказане, приходимо до висновків:

1) середня квадратична помилка суміщення середньої горизонтальної нитки сітки з краєм сантиметрової поділки рейки становить $m_0 = 0.113$ *мм*;

2) помилка цього відліку зростає за законом, достатньо близьким до рівняння регресії

$$m_s = 0{,}113 + 0{,}27 \cdot 10^{-3} \cdot S$$

($m_s$ – в міліметрах, $S$ – в метрах). При максимальних плечах нівелювання III-го класу 75 м помилка $m_s$ становить 0,133 мм;

3) середня квадратична помилка суміщення (контактування) кінців бульбашки контактного рівня нівеліра – $m_p$ достатньо точно визначається за формулою

$$m_p = 1{,}39 \cdot 10^{-3} \cdot S$$

(при ціні поділки рівня $\tau = 30''$). Якщо $S$ = 75 м, $m_p$ = 0,104 мм;

4) на помилку відліку рейки суттєво впливає якість нанесення поділок. При чітких, рівних краях поділок точність вища, ніж при нечітких, рваних краях. Точність відліку може змінюватися приблизно на ± 40 мікрон.

**УДК 528.11 + 519.654**

**Согор А.Р.**

НУ "Львівська політехніка", кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірювань

## ДО ПИТАННЯ ПРО ОЦІНКУ ТОЧНОСТІ В МЕТОДІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ



***В статье выведены формулы для оценки точности в методе наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения матрицы коэффициентов параметрических уравнений.***

***The expressions for the accuracy estimates in the least-squares method, while is used of the singular value decomposition have been derived.***

Нехай маємо деяку виміряну величину $\underline{L}$ та оцінювану величину $X$, які зв'язані між собою системою параметричних рівнянь поправок*:

$$\underline{A}X + \underline{L} = \underline{V} \ , \tag{1}$$

* *Рисками знизу в цій статті позначені величини, які зведені до рівноточного вигляду [4].*

де $\underline{A}$ – матриця коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок; $\underline{V}$ – вектор поправок до результатів вимірів.

Оцінимо точність величини $X$, тобто знайдемо її середню квадратичну помилку.

В загальному вигляді середня квадратична помилка величини $X$ визначається із формули [2]:

$$m_X^2 = \mu^2 Q \ , \tag{2}$$

де $\mu$ – помилка одиниці ваги; $Q$ – матриця обернених ваг оцінюваної величини.

Для визначення помилки одиниці ваги $\mu$ можна скористатись формулою теорії помилок [3]:

$$\mu^2 \ = \ \frac{1}{m-n} \cdot \underline{V}^T \underline{V} \ , \tag{3}$$

де $m$ – кількість вимірів величини $\underline{L}$; $n$ – кількість параметрів величини $X$.

Квадратична форма $\underline{V}^T \underline{V}$ у білінійному вигляді запишеться

$$\underline{V}^T \underline{V} = \underline{L}^T \underline{A} X + \underline{L}^T \underline{L} \ . \tag{4}$$

Використаємо сингулярний розклад матриці $\underline{A}$. Тобто

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \ , \tag{5}$$

де $\underline{U}$ – матриця з ортогональними стовпцями; $\underline{W}$ – ортогональна матриця; $\underline{\Sigma}$ – діагональна матриця сингулярних чисел [6].

Із застосуванням сингулярного розкладу матриці $\underline{A}$ величина $\underline{V}^T \underline{V}$ набере вигляд

$$\underline{V}^T \underline{V} = \underline{L}^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T X + \underline{L}^T \underline{L} \ . \tag{6}$$

Замість вектора параметрів $X$ підставимо його значення, виведене в [5]:

$$X = -\underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{U}^T \cdot \underline{L} \ . \tag{7}$$

Тоді отримаємо

$$\underline{V}^T \underline{V} = -\underline{L}^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{U}^T \underline{L} + \underline{L}^T \underline{L} \ . \tag{8}$$

Застосовуючи відомі співвідношення

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}^T \underline{U} = I \ ; \qquad \underline{U}\underline{U}^T \neq I \ ; \\ \underline{W}^T \underline{W} = I \ ; \qquad \underline{W}\underline{W}^T = I \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

та властивість оберненої матриці

$$\underline{\Sigma} \underline{\Sigma}^{-1} = I \tag{10}$$

(де $I$ – одинична матриця), вираз (8) запишемо

$$\underline{V}^T \underline{V} = -\underline{L}^T \underline{U} \underline{U}^T \underline{L} + \underline{L}^T \underline{L} \ . \tag{11}$$

Тоді квадрат середньої квадратичної помилки одиниці ваги $\mu$ остаточно набере вигляд

$$\mu^2 \ = \ \frac{1}{m-n} \cdot \left( \underline{L}^T \underline{L} - \underline{L}^T \underline{U} \underline{U}^T \underline{L} \right) . \tag{12}$$

Для обчислення матриці обернених ваг $Q$ скористаємося [1]:

$$Q = \left(\underline{A}^T \underline{A}\right)^{-1} . \tag{13}$$

Здійснивши сингулярний розклад матриці $\underline{A}$ за формулою (5), будемо мати

$$Q = \left[\left(\underline{U}\underline{\Sigma}\underline{W}^T\right)^T \underline{U}\underline{\Sigma}\underline{W}^T\right]^{-1} . \tag{14}$$

Виконавши транспонування та застосовуючи співвідношення (9), матрицю (14) запишемо

$$Q = \left[\underline{W}\underline{\Sigma}\underline{\Sigma}\underline{W}^T\right]^{-1} . \tag{15}$$

Використовуючи властивості оберненої матриці добутку та ортогональної матриці, остаточно одержимо матрицю обернених ваг оцінюваної величини

$$Q = \underline{W}\underline{\Sigma}^{-1}\underline{\Sigma}^{-1}\underline{W}^T . \tag{16}$$

Отже, застосовуючи апарат сингулярного розкладу до матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок, ми отримали нові формули для оцінки точності в методі найменших квадратів: для обчислення середньої квадратичної помилки одиниці ваги – формулу (12); для обчислення обернених ваг врівноважених параметрів – формулу (16). Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко одержати елементи $\mu$ і $Q$ оцінки точності, практично ігноруючи складну процедуру обертання матриці.

*1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М., 1977. 2. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М., 1968. 3. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений: Уч. пос. М., 1990. 4. Согор А.Р. Узгодження параметрів референц-еліпсоїда з даними про регіональне гравітаційне поле: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львів, 1996. 18 с. 5. Согор А.Р., Марченко О.М. До питання врахування коваріаційної матриці помилок при обробці геодезичних вимірів // Геодезія, картографія та аерофотознімання, 1999. Вип. 59. С.33–34. 6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980.*

**УДК 528.063**

**Третяк К.Р.**

НУ "Львівська політехніка", кафедра вищої геодезії та астрономії

# НОВИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ВИПАДКОВИХ ТА СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК НА ТОЧНІСТЬ ВИСОТНИХ МЕРЕЖ (на прикладі державної нівелірної мережі 1-го класу України)



***В статье предложен новый алгоритм определения в нивелирных сетях суммарных количественных характеристик трёх груп погрешностей (случайных, систематических погрешностей и ошибок, возникающих за счет деформаций земной поверхности, действующих на протяжении всего цикла наблюдений). Алгоритм основан на рекуррентных формулах. Методика апробирована на***