

6. При довжинах ходів до 50–100 км перевага навіть існуючого геометричного нівелювання – безперечна. При розв'язуванні регіональних і особливо локальних задач геодинаміки, при спостереженнях на геодинамічних полігонах, при спостереженнях за стійкістю інженерних споруд, при розв'язанні задач міського будівництва та багатьох інших задач інженерної геодезії перевагу слід віддавати геометричному нівелюванню.

7. Для розв'язання перерахованих та інших інженерних задач, остаточною метою яких є безаварійна робота важливих виробничих об'єктів, існує нагальна необхідність подальшого підвищення точності геометричного нівелювання, оскільки для більшості території України характерні малі вертикальні переміщення (1–5 мм на рік).

Враховуючи вищенаведене, вважаємо, що створення нової інструкції геометричного нівелювання – першочергове завдання геодезичної науки та виробництва.

УДК 528.385

Островський А.Л., Новосад В.М.
 НУ “Львівська політехніка”, кафедра геодезії

ПОЛЬОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ВІДЛІКУ ШАШКОВОЇ РЕЙКИ МЕТОДОМ СУМІЩЕНЬ

© Островський А.Л., Новосад В.М., 2000

В статье рассматривается вопрос точности отсчета по шашечной рейке в геометрическом нивелировании. На основании специальных экспериментальных работ исследуется влияние на точность отсчета: ошибки совмещения средней нити сетки трубы нивелира с краем сантиметрового деления рейки; расстояния S от нивелира к рейке; ошибки установки оси цилиндрического уровня в горизонтальное положение и качества нанесения делений рейки.

Have been estimated the precision of staff counting out in geometric leveling. On the base of special estimation have been estimate the influence on staff counting out: error of superposition middle thread with centimetre divisional edge, distance from the level to staff, error of bubble tube leveling and staff quality.

Питання встановлення точності відліку нівелірної рейки розглядається у багатьох працях. В них досліджується точність відліку рейки різними методами геометричного нівелювання. Проте у вказаних працях не дається розв'язання цієї задачі, якщо розглядається особливий метод нівелювання: використовуються шашкові рейки і нівелір з плоскопаралельною пластинкою, здатною зміщувати горизонтально промінь світла на 10 мм. Таке нівелювання чинною Інструкцією не передбачено і, звичайно, досі практично ніким фундаментально не досліджувалось. Тому нами були проведені спеціальні експериментальні роботи з метою виявлення помилок відліку за рейкою при використанні плоскопаралельної пластини та існуючих шашкових рейок. Для цього була розроблена спеціальна програма, метою якої було виявити вплив на точність відліку:

1) помилки суміщення середньої нитки сітки труби з краєм сантиметрової поділки рейки, яку разом з помилкою відліку шкали мікрометра будемо вважати помилкою власне відліку – m_o ;

2) віддалі S від нівеліра до рейки, тобто зміни помилки m_o зі зміною S ;

3) помилки приведення осі циліндричного контактного рівня в горизонтальне положення, помилки контактування – m_p ;

4) якості нанесення поділок рейки.

Стосовно якості нанесення поділок можна апріорно передбачити, що точність суміщень нитки сітки з краєм поділки рейки буде різною. Так, при чіткому, рівному краї – точність напевно буде іншою, ніж для нечітких, рваних країв поділок.

Програмою проектувалось брати відліки рейки на віддальх 25, 35, 50, 75, 100, 150 м на трьох різних поділках рейки (поділок 1000, 1500, 2000 мм) при одному і двох контактуваннях рівня. Для кожної поділки і кожної віддалі виконувалось по 100 пар суміщень країв шашки з ниткою при одному і двох контактуваннях рівня. Тобто спочатку після контактування рівня виконувалось два суміщення країв шашки з ниткою, а потім після кожного контактування рівня виконувалось одне суміщення. Отже, було одержано для кожної шашки і кожної віддалі по 100 подвійних відліків для одного і двох контактувань рівня. Всього було виконано 3600 подвійних вимірів.

Тепер перейдемо до математичної обробки результатів експериментального матеріалу. Насамперед нас цікавила залежність помилки відліку від віддалі.

З метою виявлення цієї залежності нами були обчислені за формулою

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad (1)$$

середні квадратичні помилки відліку для різних поділок рейки і різних віддалей при одному і двох контактуваннях рівня. Кожна помилка була одержана із 100 подвійних різниць – d_i . Результати цих обчислень наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Помилки суміщень нитки з краєм поділки рейки при різних віддальх S_i

25 м	35 м	50 м	75 м	100 м	150 м	Поділки	Середні відліки
1	2	3	4	5	6	7	8
Одне контактування							
0.094	0.133	0.118	0.128	0.111	0.152	1000	0.123
0.150	0.129	0.142	0.097	0.124	0.108	1500	0.126
0.123	0.121	0.115	0.161	0.176	0.215	2000	0.152
Сер.0.122	0.127	0.125	0.129	0.137	0.158		0.134
Два контактування							
0.095	0.128	0.106	0.143	0.142	0.172	1000	0.131
0.158	0.169	0.142	0.142	0.166	0.149	1500	0.154
0.120	0.131	0.261	0.223	0.260	0.260	2000	0.188
Сер.0.124	0.143	0.170	0.169	0.177	0.194		0.158

Табл. 1 була раніше опублікована*.

* Хижак Л.С., Новосад В.М. Про помилку відліку по шашковій рейці методом суміщень при геометричному нівелюванні // Зб. геод., карт. і аерофотозн. 1996. Вип. 57. С.26–39.

Очевидно, що при одному контактуванні помилки в цій таблиці містять, крім помилок власне відліків, вплив віддалі та акуратності нанесення поділок на рейках; при двох контактуваннях рівня помилки таблиці містять, крім тільки що перерахованих, ще і помилки контактування рівня – m_p , тобто помилки приведення візирної осі в горизонтальне положення (звичайно при відсутності кута "i").

Як можна помітити, аналізуючи таблицю, залежність від віддалі за даними окремих рядів таблиці просліджується не дуже чітко. Проте за середніми даними це видно чітко.

Так, за середніми даними одного контактування з переходом від 25 м до 150 м помилка збільшилась на 0,036 мм. Водночас за середніми даними двох контактувань помилка (при такій же зміні довжин) збільшилась на 0,070 мм, тобто майже вдвічі. Така різниця зрозуміла, оскільки при двох контактуваннях на зміну помилки відліку впливає ще й помилка контактування рівня, причому m_{pi} , безперечно, пропорційна S_i . Надалі нас, насамперед, буде цікавити m_o – помилка відліку, незалежна від S , та зміна m_o зі зміною S .

Логічно прийняти, що зміна m_{Si} описується рівнянням регресії

$$m_{Si} = m_o + KS_i \quad (2)$$

Для обчислення невідомих m_o і коефіцієнта K скористаємось рядком середніх значень помилок при одному контактуванні. Рівняння помилок буде мати вигляд:

$$m_o + KS_i - m_{Si} = v_i \quad (3)$$

Два нормальні рівняння, якщо кількість рівнянь помилок позначити n , запишуться так:

$$n m_o + [S_i]K - [m_{Si}] = 0 \quad (4)$$

$$[S_i] m_o + [S_i S_i]K - [m_{Si} S_i] = 0.$$

Розв'язання рівнянь системи (4) дають

$$m_o = \frac{-[S_i][m_{Si} S_i] + [S_i S_i][m_{Si}]}{n[S_i S_i] - [S_i][S_i]}, \quad (5)$$

$$K = \frac{-[S_i S_i][m_{Si}] + [S_i][m_{Si} S_i]}{n[S_i S_i] - [S_i][S_i]}. \quad (6)$$

З (5) та (6), отримуємо

$$m_o = \frac{-435 * 60.82 + 42475 * 0.798}{6 * 42475 - 435 * 435} = 0,113 \text{ мм}$$

$$K = \frac{-435 / 0.798 + 60.82 * 6}{65625} = 0,00027.$$

Розглянемо, як рівняння регресії (2) відповідає помилкам відліків, отриманих за експериментальними даними. Для цього з помилок m_{Si} відніматимемо добутки $K S_i$; тоді залишки повинні бути близькі до m_o . Різниці між залишками та m_o і будуть характеризувати ступінь відповідності рівняння (2) реальному стану явища.

Обчислення точності подання m_s рівнянням регресії

S_i	25 м	35 м	50 м	75 м	100 м	150 м
m_{S_i}	0,122 мм	0,127 мм	0,125 мм	0,129 мм	0,137 мм	0,158 мм
κS_i	0,007	0,009	0,014	0,020	0,027	0,041
$m_{S_i} - \kappa S_i$	0,115	0,118	0,111	0,109	0,110	0,117
m_o	0,113	0,113	0,113	0,113	0,113	0,113
$v_i = (m_{S_i} - \kappa S_i) - m_o$	+0,002	+0,005	-0,002	-0,004	-0,003	+0,004

Отже, помилки m_{S_i} отримані з точністю μ_{m_s}

$$\mu_{m_s} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-2}} \quad (7)$$

$$\mu_{m_s} = 0,0043 \text{ мм.}$$

Оцінка точності визначення m_o та K :

$$\mu_{m_o} = \frac{\mu_{m_s}}{\sqrt{P_{m_o}}} \quad (8)$$

$$\mu_K = \frac{\mu_{m_s}}{\sqrt{P_K}} \quad (9)$$

$$P_{m_o} = \frac{n[S_i S_i] - [S_i][S_i]}{[S_i S_i]} = 1.54; \quad P_K = \frac{n[S_i S_i] - [S_i][S_i]}{n} = 10938$$

$$\mu_{m_o} = 0,0035; \quad \mu_K = 0,000041.$$

Отже, $m_o = 0,113 \pm 0,0035$;

$$K = 0,00027 \pm 0,000041.$$

$\mu_{m_o} < m_o$ в 32,3, а μ_K майже на порядок менше за K . Отже, великий обсяг експериментів забезпечив достатньо точне визначення невідомих m_o та K .

Для пошуку невідомих помилок контактування рівня m_{P_i} скористаємося середніми значеннями помилок $m_{S_i P_i}$ при двох контактуваннях, які можна подати формулою:

$$m_{S_i P_i} = m_o + \kappa S_i + m_{P_i} \quad (10)$$

Відповідно до (10) при двох контактуваннях помилки відліку $m_{S_i P_i}$ містять три складові частини. Виключимо поки що з $m_{S_i P_i}$ складову, залежну від S_i .

Обчислення сумісних помилок m_o та m_p

S_i	25	35	50	75	100	150
$m_{S_i P_i}$	0,124 мм	0,143 мм	0,170 мм	0,169 мм	0,177 мм	0,194 мм
κS	0,007	0,009	0,014	0,020	0,027	0,041
$m'_o = (m_{S_i P_i} - \kappa S)$	0,117	0,134	0,156	0,149	0,150	0,153

Останній рядок помилок m'_o містить помилки m_o та m_{Pi} . Модуль і знак m_o – відомий, однак m_{Pi} – знакоперемінна, випадкова величина. Тому залежність між цими величинами треба записати так:

$$m'^2_o = m^2_o + m^2_{Pi}. \quad (11)$$

$$m_{Pi} = \sqrt{m'^2_o - m^2_o}. \quad (12)$$

Обчислення за формулою (12) дають

Таблиця 4

Обчислення значень m_{Pi}

S_i	25	35	50	75	100	150
m_{Pi}	0,030 мм	0,072 мм	0,108 мм	0,097 мм	0,099 мм	0,103 мм

Природно прийняти:

$$m_{Pi} = \Delta\tau_i S_i, \quad (13)$$

де $\Delta\tau_i$ – кути між горизонтальною лінією і віссю рівня. Звичайно, можна визначити середнє вагове значення $\Delta\tau_i$ за способом найменших квадратів за формулою

$$\Delta\bar{\tau} = \frac{[S_i m_{Ki}]}{[S_i S_i] \cdot 10^{-3}} \quad (14)$$

тоді отримаємо $\Delta\bar{\tau} = 0,000000971$, або в секундах дуги $\Delta\tau'' = 0,2''$.

Однак при такому визначенні перевагу одержують ті значення $\Delta\tau_i''$, що мають великі ваги, тобто значні S_i (100м, 150м).

Враховуючи, що обчислені помилки отримані з великої вибірки (по 100 пар вимірів), а середні значення – з 200 пар вимірів і є достатньо точними, в чому ми вже переконалися вище (див. (7): $\mu_{m_o} = 0,0043$), то доцільно визначити $\Delta\tau_i$ для кожної із шести довжин S_i за формулою

$$\Delta\tau_i = \frac{m_{Pi}}{S_i}. \quad (15)$$

Таблиця 5

Обчислення значень $\Delta\tau''$

S_i	25	35	50	75	100	150
$\Delta\tau_i$	$12,12 \times 10^{-7}$	$20,57 \times 10^{-7}$	$21,5 \times 10^{-7}$	$12,94 \times 10^{-7}$	$9,86 \times 10^{-7}$	$6,88 \times 10^{-7}$
$\Delta\tau_i''$	0,25 "	0,42 "	0,44 "	0,27 "	0,20 "	0,14 "

Як бачимо, кут $\Delta\tau_i''$ змінюється не зовсім лінійно. Плечам нівелювання III класу більше відповідає середнє арифметичне значення $\Delta\tau_{cp}$

$$\Delta\tau''_{cp} = 0,287'',$$

оскільки

$$S_{cp} = \frac{[S_i]}{6} = 72,5 \text{ м.}$$

Отже, для визначення m_p при нівелюванні третього класу (для плеч 25 – 100 м) можна запропонувати формулу:

$$m_p = \frac{\Delta\tau_{cp}''}{\rho''} S.$$

Після підстановки числових значень $\Delta\tau_{cp}'' = 0,287$; $\rho'' = 206265''$ отримаємо:

$$m_p = 1,39 S 10^{-3}. \quad (16)$$

Скористаємось табл. 1, а саме рядом середніх помилок (при двох контактуваннях) для контролю надійного визначення m_o , K , m_p . Для цього із ряду помилок m_{Sp} спочатку виключимо $m_{pi} = \Delta\tau_i S_i$.

Для цього скористаємось формулою :

$$m'_{Si} = \sqrt{m_{Sp}^2 - m_{pi}^2}. \quad (17)$$

Зауважимо, що ряд помилок з двома контактуваннями ще не використовувався для визначення m_{Si} . Знайдені за (17) m_{si} повинні бути близькими до m_{Si} , знайдених з ряду середніх помилок з одним контактуванням. Це один контроль. Потім з m'_{Si} виключимо κS – змінну m_{Si} з віддаллю S_i . Маємо

$$m'_{oi} = m'_{Si} - \kappa S_i. \quad (18)$$

Залишки m'_{oi} повинні дорівнювати m_o . Різниця $d' = m'_{oi} - m_o$ є другим контролем. Обчислення наведені в табл. 6.

Як бачимо, перший та другий контроль дали непогані результати. Різниця $d = m'_{si} - m_{si}$ (помилки m_{si} та m'_{si} – практично незалежні, оскільки отримані за різними вимірами, рознесеними в часі на 0,5 – 1,0 год), а $d' = m'_{oi} - m_o$ (помилки m'_{oi} та m_o також одержані практично за незалежними вимірами) не перевищують 10 мікрон (0,01 мм). Зауважимо, що помилки m_{si} та m'_{si} (одного та двох контактувань) можна було б використати для сумісного визначення m_o та K . Однак контроль визначення невідомих нам видається більш необхідним.

Таблиця 6

Перевірка точності визначення невідомих m_o , K , m_p

S	25	35	50	75	100	150
m_{ck}	0,124	0,143	0,170	0,169	0,177	0,194
$m_{pi} = \Delta\tau_i S_i$	0,030	0,072	0,108	0,097	0,099	0,103
m'_{si}	0,120	0,124	0,131	0,138	0,147	0,164
m_{si}	0,122	0,127	0,125	0,129	0,137	0,158
$d = m'_{si} - m_{si}$	-0,002	-0,003	+0,006	+0,009	+0,010	+0,06
κS_i	0,007	0,09	0,014	0,020	0,027	0,041
$m'_{oi} = m'_{Si} - \kappa S_i$	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,123
m_o	0,113	0,113	0,113	0,113	0,113	0,113
$d' = m'_{oi} - m_o$	0,000	+0,002	+0,004	+0,005	+0,007	+0,010

Нам залишилось розглянути залежність помилок відліків від якості нанесення поділок рейок. Середні зміни помилок при користуванні різними краями шашок рейок очевидні з останньої колонки табл. 1. Точність суміщень залежно від якості країв ниток помітно змінюється. Ці зміни максимально досягають: за середніми результатами одного контактування – 29 мікрон; за середніми результатами подвійного контактування – 57 мікрон. Звідси зрозуміло, що якісне нанесення поділок рейки, які використовуються для нівелювання методом суміщень, є важливим фактором.

Підсумовуючи вищесказане, приходимо до висновків:

1) середня квадратична помилка суміщення середньої горизонтальної нитки сітки з краєм сантиметрової поділки рейки становить $m_0 = 0.113$ мм;

2) помилка цього відліку зростає за законом, достатньо близьким до рівняння регресії

$$m_s = 0,113 + 0,27 \cdot 10^{-3} \cdot S$$

(m_s – в міліметрах, S – в метрах). При максимальних плечах нівелювання III-го класу 75 м помилка m_s становить 0,133 мм;

3) середня квадратична помилка суміщення (контактування) кінців бульбашки контактного рівня нівеліра – m_p достатньо точно визначається за формулою

$$m_p = 1,39 \cdot 10^{-3} \cdot S$$

(при ціні поділки рівня $\tau = 30''$). Якщо $S = 75$ м, $m_p = 0,104$ мм;

4) на помилку відліку рейки суттєво впливає якість нанесення поділок. При чітких, рівних краях поділок точність вища, ніж при нечітких, рваних краях. Точність відліку може змінюватися приблизно на ± 40 мікрон.

УДК 528.11 + 519.654

Согор А.Р.

НУ “Львівська політехніка”, кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірювань

ДО ПИТАННЯ ПРО ОЦІНКУ ТОЧНОСТІ В МЕТОДІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

© Согор А.Р., 2000

В статье выведены формулы для оценки точности в методе наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения матрицы коэффициентов параметрических уравнений.

The expressions for the accuracy estimates in the least-squares method, while is used of the singular value decomposition have been derived.

Нехай маємо деяку виміряну величину \underline{L} та оцінювану величину X , які зв'язані між собою системою параметричних рівнянь поправок*:

$$\underline{AX} + \underline{L} = \underline{V}, \quad (1)$$

* Рисками знизу в цій статті позначені величини, які зведені до рівноточного вигляду [4].