1. Кудрявцев Б.А. Механика пьезоэлектрических материалов // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Мех. тверд. тела. – 1978. – Т.11. – С.5–66. 2. Партон В. З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука / Гл. ред. физ-мат. литер. – 1988. – 472 с. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1997. – 416 с. 4. Ландау Л.Д., Лившиц Е. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 214 с. 5. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К., Ткаченко П.А. Двумерные задачи электроупругости для неоднородной пьезоэлектрической среды // Актуальные проблемы неоднородной механики: Мат. Всесоюзного научного семинара. – Ереван, 1991. – С. 169–174. 6. Мартинович Т.Л., Шиндер В.К. Узагальнений плоский напружений стан тонких п'єзоелектричних пластин з криволінійними отворами. – Львів: ДУ "Львівська політехніка", 1994. – 13 с.–Деп. В ДНТБ України 01.03.1194, №415 Ук 94. 7. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. – 166 с. 8. Шиндер В.К. Математична модель напруженого стану анізотропної пластини із врахуванням п'єзо- та піроелектричних ефектів: Мат. Всеукраїнської наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях". – Львів, 5–7 жовтня 1995 р. 9. Шиндер В.К. Розв'язування плоскої квазістатичної задачі термопружності для неоднорідних п'єзоелектричних тіл: Тези доповідей IV Міжнарод. симпозіуму укр. інж.-мех. у Львові. – Львів,1999. – С.22. 10. Шиндер В.К. Розв'язок задачі магнітопружності для пластинчастої конструкції з криволінійним вирізом: Зб. наук. ст. "Проблеми теорії та практики будівництва". Т. 2 "Сталеві конструкції. Теоретична і будівельна механіка". – 1997. – С. 142–145.

УДК 539.3; 624.075

В.К. Шиндер, П.А. Ткаченко, С.І. Томецька
Національний університет "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПІРО- ТА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ЕФЕКТІВ

Викладено принципи узагальненого підходу та алгоритм розв'язку плоскої задачі статичної електричної пружності із врахуванням п'єзоелектричного ефекту. Опрацьовано алгоритми, що ґрунтуються на запропонованих методах, а також автоматизовано математичну симуляцію взаємопов'язаних електричних та механічних полів в неоднорідних п'єзоелектричних пластинах під прямим п'єзоелектричним ефектом.

The paper reveals principles of a general mathematical approach and algorithm of solving flat problem of static electric elasticity with registration piroelectric effect. Based on the suggest calculation methods algorithms have been worked out and computer- aided mathematical simulation of interrelated electric and mechanical fields in heterogeneous piezoelectric plate (bend) under direct piezoelectric effect.

Розглянемо тонку п'єзоелектричну пластинку постійної товщини *h*, яка у кожній точці має площину пружної симетрії, паралельної до серединної площини *xOz* і такої, що займає нескінченну область *S* із отвором, обмеженим простим, гладким контуром *L*. Пластинка знаходиться у рівновазі під дією фізичних факторів, розподілених на її боковій поверхні. За наявності площини матеріальної симетрії термодинамічні співвідношення, які пов'язують переміщення, електричну індукцію та ентропію із пружними напруженнями, напруженістю електричного поля та температурою, задаються рівняннями [1]. За відсутності об'ємних сил електричної природи рівняння рівноваги п'єзоелектричної пластинки мають такий самий вигляд, як і в класичній теорії пружності [2], а рівняння Максвелла за нехтування магнітними ефектами при квазістатичному наближенні для електричного поля записуються співвідношеннями [3].

Аналогічно до [4, 5] введемо функцію механічних напружень U_1 і функцію потенціалу електростатичного поля V, тоді із рівняння сумісності деформацій [2] і рівнянь Максвелла [3] одержимо систему диференціальних рівнянь такого вигляду [4, 5]:

$$L_4 U_1 - L_3 V = -L_2^{(T)}; \; L_3 U_1 - L_2 V = -L_2^{(P)} T \,, \tag{1}$$

причому диференціальний оператор L_4 збігається із відповідним оператором теорії узагальненого плоского напруженого стану тонкої анізотропної пластинки [2], а оператор $L_2^{(T)}$ відповідає оператору теорії термопружності анізотропного тіла [6].

Виключивши із системи функцію потенціалу електростатичного поля $V(x,y)$, одержимо рівняння шостого порядку

$$\begin{gathered} b_1 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x^6} - b_2 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x^5 \partial z} + b_3 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x^4 \partial z^2} - b_4 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x^3 \partial z^3} + b_5 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x^2 \partial z^4} - b_6 \frac{\partial^6 U_1}{\partial x \partial z^5} + b_7 \frac{\partial^6 U_1}{\partial z^6} = \\ = a_1 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^3 \partial z} + a_3 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial z^2} + a_4 \frac{\partial^4 T}{\partial x \partial z^3} + a_5 \frac{\partial^4 T}{\partial z^4}, \end{gathered} \tag{2}$$

де коефіцієнти $b_1, ..., b_7$, $a_1, ..., a_5$ залежать від фізико-механічних параметрів матеріалу пластинки.

Функція температури, що входить до правої частини рівняння (2) за встановленого режиму $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad \tau - час \right)$ та за наявності теплообміну із оточуючим середовищем на торцевих площинах, визначається під час інтегрування відповідного рівняння теплопровідності [7].

У нових змінних $z_j = x + \mu_j z \quad \left(j = \overline{1{,}4} \right)$ статична задача двовимірної термоелектропружності за відсутності зосереджених джерел тепла приведена до розв'язку рівняння

$$b_7 \cdot 2^6 \cdot |\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3| \frac{\partial^6 U_1}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_2 \partial z_3 \partial \bar{z}_3} = 2\,\mathrm{Re}\left[E_0 \frac{\partial^4 \Phi_4(z_4)}{\partial z_4} \right]; \tag{3}$$

$$E_0 = a_5 \mu_4^4 + a_4 \mu_4^3 + a_3 \mu_4^2 + a_2 \mu_4 + a_1 \tag{4}$$

$\mu_j \left(j - 1{,}2{,}3 \right)$ корені характеристичного рівняння $\left(Jm \mu_j > 0 \right)$;

$$b_7 \mu^6 - b_6 \mu^5 + b_5 \mu^4 - b_4 \mu^3 + b_3 \mu^2 - b_2 \mu \;\; + b_1 = 0 \,. \tag{5}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3) у разі некратних коренів характеристичного рівняння (5) набере вигляду

$$U_1 = 2\,\mathrm{Re}\left\{ F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3) + r \int \left[\int \Phi_4(z_4) dz_4 \right] dz_4 \right\}, \tag{6}$$

де $F_j\left(z_j\right)$ $\left(j=1,2,3\right)$ – довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j, що змінюються в областях $S^{(j)}$, які одержуються з області S відповідними афінними перетвореннями. Через співвідношення (6) формулу потенціалу електростатичного поля можна подати виразом

$$V = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\left[F_j\left(z_j\right)+r\int\Phi_4\left(z_4\right)dz_4\right], \tag{7}$$

причому величини r, λ_j $\left(j=1,2,3\right)$ записуються через фізико-механічні параметри матеріалу пластинки.

Підставивши вирази (6), (7) у співвідношення [4, 5, 7], одержимо формули для обчислення механічних напружень і напруженостей електростатичного поля за відсутності зосереджених джерел тепла вздовж контура криволінійного отвору L:

$$\sigma_x = 2\,Re\left[\sum_{j=1}^{3}\mu_j^2\varphi_j'\left(z_j\right)+r\mu_4^2\Phi_4\left(z_4\right)\right],\ \ \sigma_z = 2\,Re\left[\sum_{j=1}^{3}\varphi_j'\left(z_j\right)+r\Phi_4\left(z_4\right)\right];$$
$$\tau_{xy} = -2\,Re\left[\sum_{j=1}^{3}\mu_j\varphi_j'\left(z_j\right)+r\mu_4^2\Phi_4\left(z_4\right)\right]; \tag{8}$$

$$E_x = -2\,Re\left[\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\varphi_j'\left(z_j\right)+r\lambda_4\Phi_4\left(z_4\right)\right];$$
$$E_z = -2\,Re\left[\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\mu_j\varphi_j'\left(z_j\right)+r\lambda_4\mu_4\Phi_4\left(z_4\right)\right]; \tag{9}$$
$$\varphi_j\left(z_j\right)=\frac{dF_j}{dz_j}\quad\left(j=1,2,3\right).$$

Граничні умови першої основної задачі прямого п’єзоелектричного ефекту в інтегральній формі залишимо в аналітичних функціях $\Phi_j\left(z_j\right)=\varphi_j'\left(z_j\right)$, $\left(j=1,2,3\right)$ [1, 2, 4]:

$$\int_L F(t)dR = \int_L F(t)(N+iT)dt - r(1+i\mu_4)\int_L F(t)\Phi_4(t_4)dt_4 - r(1+i\overline{\mu}_4)\int_L \overline{F(t)}\,\overline{\Phi_4(t_4)}d\bar{t}_4;$$
$$\int_L F(t)dJ = -\mu_4 m_4\int_L F(t)\Phi_4(t_4)dt_4 - \overline{\mu_4}\,\overline{m_4}\int_L \overline{F(t)}\,\overline{\Phi_4(t_4)}d\bar{t}_4, \tag{10}$$

де

$$dR = \sum_{j=1}^{3}\left[\left(1+i\mu_j\right)\varphi_j'\left(z_j\right)dz_j + \left(1+i\overline{\mu_j}\right)\overline{\varphi_j'\left(z_j\right)}d\bar{z}_j\right];$$
$$dJ = \sum_{j=1}^{3}\left[m_j\varphi_j'\left(z_j\right)dz_j + \overline{m}_j\overline{\varphi_j'\left(z_j\right)}d\bar{z}_j\right]. \tag{11}$$

У тому випадку, коли на безмежності за відсутності зосереджених джерел тепла задано однорідний тепловий потік інтенсивності $\overline{q}_\infty$, направлений під кутом β до осі x, функція $\Phi_4(z_4)$ за порівняно великих $|z_4|$ повинна мати такий вигляд [7]:

$$\Phi_4(z_4) = A_0^{(4)} + A_1^{(4)} z_4 + O\left(\frac{1}{z_4}\right), \tag{12}$$

де $A_0^{(4)} = \frac{1}{2} T_\infty$; T_∞ – задана на безмежності температура, а $A_1^{(4)}$ визначається із умови обмеженості температури тіла [7].

За великих $|z_j|$ $(j = 1,2,3)$ функції $\Phi_j(z_j)$ мають вигляд [4, 5, 7]:

$$\Phi_j(z_j) = A_0^{(j)} + A_1^{(j)} z_j + D^{(j)} z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j}\right) \ (j = 1,2,3). \tag{13}$$

За відсутності зосереджених джерел тепла сталі $D^{(j)}$ $(j = 1,2,3)$ виражаються через компоненти головного моменту зовнішніх зусиль, прикладених до границі L, за формулами [2, 4, 5] (головний вектор дорівнює нулеві). Сталі $A_0^{(j)}$, $A_1^{(j)}$ визначаються із умов обмеженості електронапруженого стану пластинки. Подання (13) функцій $\Phi_j(z_j)$ забезпечує однозначність пружних переміщень і потенціалу електронапруженого стану.

На границях $L^{(j)}$ областей $S^{(j)}$ аналітичні функції $\Phi_j(t_j)$ допускають подання $(z_j \to t_j)$ $(N = 0,\ T = 0)$ [4, 5]:

$$\Phi_j(t_j) = A_0^{(j)} + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} \sigma^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} \sigma^{-k}}{\sum\limits_{k=1}^{N} k\lambda_k \sigma^k - \sum\limits_{k=1}^{N} k\mu_k \sigma^{-k}} \ (j = 1,2,3), \tag{14}$$

а функція $\Phi_4(t_4)$ на границі L^4 в області S^4 має вигляд, наведений у [7].

Праві частини представлень (14) не можуть бути аналітично продовжені зовні одиничного кола γ без попередньої регуляризації, яка полягає у виконанні умов [4, 5].

Згідно з методикою [4, 5, 7], задача визначення плоского напруженого стану анізотропної пластинки із врахуванням п'єзо- та піроелектричних ефектів приводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ розкладу комплексних потенціалів термоелектронапруженого стану.

Задача згину п'єзоелектричних пластин з пружним технологічним включенням в лінійній постановці Фойгта [1, 2] зводиться, аналогічно до квазістатичної задачі термоелектропружності, до однорідного рівняння шостого порядку. Загальний розв'язок цього рівняння у випадку різних коренів характеристичного рівняння [4, 5] подамо у вигляді

$$V = 2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)\right], \tag{15}$$

причому функції $F_j(z_j)$ $(j = 1,2,3)$, аналогічні до функцій (6).

На границі двох діелектриків, пластини та включення виконуються умови спряження, які подамо у вигляді інтегральних співвідношень [4, 5, 7], що містять довільну функцію $F(t)$, голоморфну в $S^{(1)}$ (або $S^{(2)}$) [4, 5]:

$$\begin{gathered}\int_z F(t)dU_1^{(1)} = \int_z F(t)dU_1^{(2)} + iC\int_z F(t)dt;\\ \int_z F(t)dU_2^{(1)} = \int_z F(t)dU_2^{(2)};\\ \int_z F(t)dZ_1^{(1)} = \int_z F(t)dZ_1^{(2)};\\ \int_z F(t)dV^{(1)} = \int_z F(t)dV^{(2)}.\end{gathered} \tag{16}$$

Комплексні потенціали $\Phi_j^{(1)}\left(z_j^1\right)$ [4, 5, 7], які входять до співвідношень (16) за великих $\left|z_j^{(1)}\right|$, і функції $\Phi_j^{(2)}\left(z_j^{(2)}\right)$, за доволі малих $\left|z_j^{(2)}\right|$ $(j=1,2,3)$, набирають вигляду

$$\begin{gathered}\Phi_j^{(1)}\left(z_j^{(1)}\right) = A_0^{(1j)} + D_j^{(1)}z_j^{(1)-1} + 0\left(z_j^{(1)-2}\right);\\ \Phi_j^{(2)}\left(z_j^{(2)}\right) = A_0^{(2j)} + A_1^{(2j)}z_j^{(2)} + 0\left(z_j^{(2)-2}\right);\\ \left(z_j^{(1)} \in S_j^{(1)};\ z_j^{(2)} \in S_j^{(2)}\right).\end{gathered} \tag{17}$$

Рівняння контурів $Z_j^{(\alpha)}$ областей $S_j^{(\alpha)}$ запишуться $(\sigma \in \gamma)$ [4, 5]:

$$t_j^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k^{(\alpha j)}\sigma^k + \mu_k^{(\alpha j)}\sigma^{-k}\right),\ \left(\alpha = 1,2;\ \ j = 1,2,3\right),$$

де $\lambda_n^{(\alpha j)}$; $\mu_n^{(\alpha j)}$ – обчислюються за відомими співвідношеннями [4, 5, 7].

Функції $\Phi_j^{(\alpha)}\left(z_j^{(\alpha)}\right)$ в перетворених областях ззовні і всередині одиничного кола γ подамо у вигляді степеневих рядів за змінними $\xi_j^{(\alpha)}$ $\left(\alpha=1,2;\ \ j=1,2,3\right)$ [4, 5], причому на одиничному колі γ змінні $\xi_j^{(\alpha)}$ приймається одне і те саме значення $\sigma = e^{i\Theta}$, тому на границях $Z^{(\alpha)}$ областей $S_j^{(\alpha)}$ за $z_j^{(\alpha)} \to t_j^{(\alpha)}$, $\xi_j^{(\alpha)} \to \sigma$ одержимо такі подання комплексних потенціалів:

$$\begin{gathered}\Phi_j^{(1)}\left(t_j^{(1)}\right)dt_j^{(1)} = A_0^{(1j)}dt_j^{(1)} + \left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1j)}\sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(1j)}\sigma^{-k}\right]d\sigma;\\ \Phi_j^{(2)}\left(t_j^{(2)}\right)dt_j^{(2)} = A_0^{(2j)}dt_j^{(2)} + A_1^{(2j)}t_j^{(2)}dt_j^{(2)} + \left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(241j)}\sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(2j)}\sigma^{-k}\right]d\sigma.\end{gathered} \tag{19}$$

Задавши вирази (18), (19) в умови спряження (16) і виконавши інтегрування, враховуючи при цьому довільність функції *F(t),* одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів $a_k^{(\alpha j)}$, $b_k^{(\alpha j)}$ розкладу комплексних потенціалів електронапруженого стану в кусково-однорідній п’єзоелектричній пластинці.

Побудовані математичні моделі та розроблений алгоритм дають змогу встановити розподіл термоелектропружних полів в п’єзоелектричних пластинах поблизу криволінійних анізотропних пружних включень. Числовий аналіз термоелектронапруженого стану дає можливість зробити такі висновки: пружні напруження в п’єзоелектричних пластинах вздовж контура отвору розподілені не рівномірно, порівняно з напруженнями в таких самих ізотропних і анізотропних пластинах; наявність пружного (жорсткого) включення значно зменшує концентрацію пружних та електричних полів і приводить до кількісного та якісного перерозподілу термоелектричних полів в п’єзоелектричних пластинах. Випадок пружного включення є проміжним між абсолютно жорстким ядром і вільним отвором.

Ця методика може бути використана для автоматизації розрахунку та аналізу взаємодії спряжених фізико-механічних полів в сучасних п’єзоелектричних пристроях.

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с. 2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука. – №977. – 416 с. 3. Ландау Л.Д., Лившиц Е. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 214 с. 4. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К., Ткаченко П.А. Двумерные задачи электроупругости для неоднородной пьезоэлектрической среды // Актуальные проблемы неоднородной механики: Мат. Всесоюзного науч. семинара. – Ереван, 1991. – С. 169–174. 5. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К. Узагальнений плоский напружений стан тонких п’єзоелектричних пластин з криволінійними отворами // Львів: ДУ “Львівська політехніка”, І994. –13 с. – Деп. в ДНТВ України 01.03.1994, №415 ук 94. 6. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. – 166 с. 7. Мартынович Т.Л., Кибальникова С.І. Решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропного тела с полостью при заданной плотности теплового потока на ее поверхности. – В кн.: Математические методы физико-механических полей. – Киев: Наук. думка, 1979. – Вып.2. – С. 110.