Тоді

$$T = \frac{\Delta}{\gamma}\left(\frac{1 - ch\lambda l}{sh\lambda l} sh\lambda x + ch\lambda x - 1\right);$$

$$\tau_x = T' = \frac{\Delta\lambda}{\gamma}\left(\frac{1 - ch\lambda l}{sh\lambda l} ch\lambda x + sh\lambda x\right).$$

Використовуючи наведені вирази, обчислюємо дотичні і нормальні напруження в усіх точках пластини.

Висновок

Результати розрахунку описаних пластин показують, що пластини з незавантаженою ділянкою є жорсткішими, ніж звичайні. При $l_1 = l_2$ прогин пластини є під силою, на 20 % меншою в пластинах з незавантаженою ділянкою.

УДК 539-3; 620.0.12

В.К. Шиндер, П.А. Ткаченко, С.І. Томецька
Національний університет “Львівська політехніка”

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ВЗАЄМОДІЇ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ

Викладено основні положення загального математичного підходу та алгоритм розв’язку двовимірних задач квазістатичної термопружності. Застосування апарата аналітичних функцій узагальненої комплексної змінної дало можливість отримати прості аналітичні співвідношення для визначення працездатності пластинчастих конструкцій із технологічними вирізами та включеннями із врахуваннями взаємодії фізико-механічних полів.

Basic principles of general mathematical approach and algorithm of solving two-dimensional problems of quasi-static thermoelasticity are revealed. The usage of apparatus of analytical functions of generalazied complex variable gave the possibility to get simple analytical correlations for designation of efficiency of lamellar constructions with consideration of interaction of physico-mathematical fields.

Проблема та її аналіз

Актуальним питанням теорії та практики будівництва сьогодні є проблема впливу фізико-механічних полів на міцність споруд та будівельних конструкцій. Аналіз чинників, які призводять до передчасного їх руйнування, показав, що фізико-механічні поля та їх взаємодія істотно впливають на розподіл механічних напружень і ними не можна нехтувати під час проектування будівельних конструкцій та споруд. Зв’язаність механічних і електричних полів та анізотропія будівельних матеріалів, зокрема бетону, вносять додаткові труднощі до аналізу граничних задач електропружності. Підвищується порядок диференціальних рівнянь для польових величин, механічні та електричні граничні умови, як правило, не розділяються, що необхідно для розгляду складних граничних задач математичної фізики. Поблизу неоднорідностей (технологічних вирізів та включень) зустрічаються великі градієнти механічних та електричних польових величин, що викликає концентрацію механічних напружень і електричного поля, а це призводить до руйнування і насамперед в цих зонах. Тому актуальним є не тільки одержання формального математичного розв’язку, але і розробка методу, який уможливлював би ефективно досліджувати ефект взаємодії механічного та електричного полів і напруженість тіла в околі неоднорідності та в зонах пікових частот збурення. Сьогодні в літературі з'явилося багато різних досліджень і конкретних результатів в області статичних і динамічних задач електропружності. Доволі повний огляд робіт, виконаних приблизно до 1980 року, бачимо в [1]. З наведеного огляду зрозуміло, що задачі про напружений стан п'єзоелектричних тіл з криволінійними вирізами та включеннями розв'язувались переважно наближеними методами. Тому проблема побудови загального підходу, зручного для числової реалізації, до розв'язку двовимірних задач електропружності для п'єзоелектричного тіла з криволінійними вирізами та включеннями, є актуальною та являє значний теоретичний і прикладний інтерес.

Постановка задачі та її розв'язок

У сучасних спеціальних будівельних конструкціях доволі часто використовують залізобетонні кусково-однорідні пластинчасті елементи, які працюють на розтяг-стиск, згин. Під час експлуатації у цих пластинках поблизу технологічних вирізів або включень виникають зони підвищеної концентрації механічних напружень та електричного поля, а це, своєю чергою, призводить до утворення тріщин та руйнування. Тому виникає потреба у визначенні напружено-деформованого стану та аналізу взаємовпливу електричного, механічного та теплового полів.

Розглянемо тонку п'єзоелектричну пластинку незмінної товщини h, яка у кожній точці має площину пружної симетрії, паралельну до серединної площини x O z, і займає нескінченну область S із отвором, обмеженим простим гладким контуром L. Пластинка знаходиться у рівновазі під дією фізичних факторів, розподілених на її боковій поверхні. За наявності площини матеріальної симетрії термодинамічні співвідношення, які пов'язують переміщення, електричну індукцію та ентропію із пружними напруженнями, напруженістю електричного поля та температурою, задаються рівняннями [2]. За відсутності об'ємних сил електричної природи рівняння рівноваги п'єзоелектричної пластинки мають такий самий вигляд, як і в класичній теорії пружності [3], а рівняння Максвелла за нехтування магнітними ефектами при квазістатичному наближенні для електричного поля записуються співвідношеннями [3, 4].

Аналогічно до [5, 6] введемо функцію механічних напружень V_1 і функцію потенціалу електричного поля V, тоді із рівняння сумісності деформацій [3] і рівнянь Максвелла [4] одержимо систему диференціальних рівнянь виду [5 6]:

$$L_4 V_1 - L_3 V = -L_2^T T; \qquad L_3 V_1 - L_2 V = -L_2^P T \,, \tag{1}$$

причому диференціальний оператор L_4 збігається із відповідним оператором узагальненого плоского напруженого стану тонкої анізотропної пластинки [3], а оператор L_2^T відповідає оператору теорії термопружності ізотропного тіла [7].

Визначивши із системи (1) функцію потенціалу електричного поля $V(x, z)$, одержимо рівняння шостого порядку, коефіцієнти якого залежать від фізико-механічних параметрів матеріалу пластинки. Функція температури, що входить до правої частини рівняння [7, 8] за встановленого режиму та за наявності теплообміну із оточуючим середовищем на торцевих площинах, визначається під час інтегрування відповідного рівняння теплопровідності [7, 8, 9].

У повних змінних $z_j=x+\mu_j z$ $(j=1,4)$ статична задача двовимірної термоелектропружності за відсутності зосереджених джерел тепла приведена до розв'язку рівняння шостого порядку [6, 8, 9], де μ_j $(j=1,4)$ – корені відповідного характеристичного рівняння ($Im\ \mu > 0$).

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння [8, 9] у випадку некратних коренів характеристичного рівняння набере вигляду

$$V_1 = 2\,\mathrm{Re}\left\{F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3) + r\int \Phi_4(z_4)\,dz_4\right\}, \tag{2}$$

де $F_j(z_j)$ $(j=1, 2, 3)$ – довільні аналітичні функції комплексної змінної z_j $(j = 1, 2, 3)$, що змінюється в областях $S^{(j)}$, які одержуються із області S відповідними афінними перетвореннями. Через співвідношення (2) формулу потенціалу електричного поля можна задати виразом

$$V = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j[F_j(z_j) + r\int\Phi_4(z_4)dz_4], \qquad 3)$$

причому величини *r*, λ_j (j=1, 2, 3) запишуться через фізико-механічні параметри матеріалу пластинки.

На основі співвідношень (2), (3) одержано формули для обчислення механічних напружень і напруженостей електростатичного поля за відсутності зосереджених джерел тепла вздовж контура криволінійного отвору *L* [7, 8, 9].

Граничні умови основних задач записані в інтегральній формі, що містять шукані потенціали електронапруженого стану. У тому випадку, коли на безмежності за відсутності зосереджених джерел тепла задано однорідний тепловий потік інтенсивності q_∞, направлений під кутом β до осі *X*, функція $\Phi_4(z_4)$ за доволі великих $|z_4|$ повинна мати вигляд [8]

$$\Phi_4(z_4) = A_0^{(4)} + A_1^{(4)}z_4 + 0(1/z_4), \qquad 4)$$

де $A_0^{(4)} = T_\infty/2$, T_∞ – задана на безмежності температура, а A_1^4 визначається із умов обмеженості тіла [7, 8].

За великих $|z_j|$ (j=1, 2, 3) функції $\Phi_j(z_j)$ (j=1,2,3) мають видгляд [5, 6, 9]

$$\Phi_j(z_j) = A_0^{(j)} + A_1^{(j)}z_j + D^j z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j}\right) \text{ (j=1, 2, 3).} \qquad 5)$$

За відсутності зосереджених джерел тепла сталі $D^{(j)}$ (j=1,2,3) виражаються через компоненти головного моменту зовнішніх зусиль, прикладених до границі *L* за формулами [8, 9] (головний вектор дорівнює нулеві). Сталі $A_0^{(j)}$, $A_1^{(j)}$ визначаються із умов обмеженості електронапруженого стану пластинки. Подання (5) функцій $\Phi_j(z_j)$ (j=1,2,3) забезпечує однозначність пружних переміщень і потенціалу електронапруженого стану.

У разі наявності пружного включення на лінії розмежування різнорідних матеріалів виконуються умови ідеального пружного і електричного контакту, які подано у вигляді інтегральних співвідношень, які містять шукані потенціали електронапруженого стану. Залежність електропружних властивостей матеріалу від температури приймається лінійною. Температурне поле визначається із розв’язку відповідного рівняння теплопровідності.

На границях $L^{(j)}$ областей $S^{(j)}$ аналітичні функції $\Phi_j(t_j)$ допускають представлення (z_j- t_j) [5, 6, 8, 9]:

$$\Phi_j(t_j) = A_0^{(j)} + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{(j)}k^{(j)}6^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} bk^{(j)}6^{-k}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\lambda k6^k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mu k6^{-k}}\text{, (j=1,2,3)}, \qquad 6)$$

а функція $\Phi_4(t_4)$ на границі $L^{(4)}$ в області $S^{(4)}$ має вигляд [7, 8, 9].

Праві частини представлень (6) не можуть бути аналітично продовжені ззовні одиничного кола γ без попередньої регуляризації, яка полягає у виконанні умов, зазначених у [5, 6, 8, 9].

Згідно з методикою [5, 6, 8, 9], задача визначення плоского напруженого стану анізотропної пластинки із врахуванням п’єзо- та піроелектричних ефектів приводиться до розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів $a_к^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ розкладу комплексних потенціалів термоелектронапруженого стану.

Актуальним питанням сьогодні є також проблема впливу електромагнітного випромінення на міцність споруд і будівельних напружень. Аналіз чинників, які приводять до передчасного їх руйнування, показав, що магнітне поле істотно впливає на розподіл механічних напружень і ним не можна нехтувати під час проектування будівельних конструкцій. Розглянемо пластинчасту тонку плиту з технологічним отвором, яка знаходиться під дією механічного навантаження і електромагнітного випромінювання. За фізико-механічну модель такої конструкції можна прийняти ізотропну пластинку. Для електропровідного пружного тіла, яке не намагнічується і не поляризується, дослідження напруженого стану поблизу отвору (включення) за нехтування незначним впливом градієнтів температури на електричний струм, можливе на основі лінійних рівнянь магнітопружності. При цьому використовуються рівняння руху пружного середовища, які доповнені пондемоторними силами [2, 3]. Разом із рівняннями стану рухомого ізотропного середовища [2, 3, 10] і рівняннями узагальненого закону Ома [4, 10] вони становлять замкнену систему нелінійних рівнянь магнітопружності для ізотропного середовища, яку потрібно розв’язати за заданих початкових умов на поверхні тіла. У загальному випадку поверхня S, яка обмежує пружне тіло, є границею розподілу двох середовищ з різними електромагнітними властивостями, і за відсутності на S поверхневих електричних струмів і зарядів граничні умови для електромагнітного поля мають вигляд, наведений у [9, 4, 10]. Для виконання умови непротікання електричного струму через поверхню S необхідно, щоб провідність середовища, яке оточує тіло, дорівнювала нулеві.

Враховуючи вказані зауваження і допущення, одержимо із системи рівнянь магнітопружності такі фундаментальні рівняння лінійної теорії магнітопружності ізотропних провідників [4, 10]:

$$\nabla^2 H = N\left[H - \nabla x(uxH)\right], \quad N = (c\eta m)^{-1}; \tag{7}$$

$$gu = (\lambda\mu)\nabla\left(\nabla^* u\right) + \mu^2\nabla^2 u + \mu_0\left(\nabla^{2*} H\right)\cdot H\ . \tag{8}$$

Тіло знаходиться під дією однорідного магнітного поля з вектором напруженості H_0:

$$H_0 = \left\{H_0 \cdot \cos\beta;\ H_0 \cdot \sin\beta;\ 0\right\}\ . \qquad 9)$$

У випадку тонкої пластинки вектор механічних переміщень має дві ненульові компоненти

$$H_0 = \left\{U(x, y);\ \mathrm{V(x, y)};\ 0\right\}, \qquad 10)$$

а магнітне поле, яке виникає під дією зовнішнього навантаження, описується вектором

$$H_1 = \left\{H_1(x, y);\quad H_{21}(x, y);\quad 0\right\}. \qquad 11)$$

Увівши функцію механічних напружень або потенціал $V(x, y)$, приведемо цю задачу до розв’язку відповідного рівняння 4-го порядку [10], при цьому подамо викликані зовнішнім механічним навантаженням відхилення магнітного поля такими виразами:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0^* \, cos\, b + h_1; \\ H_2 &= H_0^* \, sin\, b + h_2, \end{aligned} \qquad 12)$$

де

$$h = \left\{h_1, h_2, 0\right\} \qquad 13)$$

вектор збурення магнітного поля.

Звівши нові незалежні змінні

$$z = x + iy, \qquad z = x - iy \qquad 14)$$

методами теорії функцій комплексної змінної, задача плоскої стаціонарної теорії магнітопружності зводиться до визначення трьох аналітичних функцій $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$, $\varphi_3(z_3)$, які задовольняють відповідним граничним умовам на границі двовимірної області, яку займає ізотропне тіло в площині хОу. Отже, побудовані математичні моделі можуть бути використані під час автоматизації розрахунку та аналізу взаємодії фізико-механічних полів в сучасних спеціальних будівельних конструкціях і будівлях (спорудах).

1. Кудрявцев Б.А. Механика пьезоэлектрических материалов // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Мех. тверд. тела. – 1978. – Т.11. – С.5–66. 2. Партон В. З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука / Гл. ред. физ-мат. литер. – 1988. – 472 с. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1997. – 416 с. 4. Ландау Л.Д., Лившиц Е. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 214 с. 5. Мартынович Т.Л., Шиндер В.К., Ткаченко П.А. Двумерные задачи электроупругости для неоднородной пьезоэлектрической среды // Актуальные проблемы неоднородной механики: Мат. Всесоюзного научного семинара. – Ереван, 1991. – С. 169–174. 6. Мартинович Т.Л., Шиндер В.К. Узагальнений плоский напружений стан тонких п'єзоелектричних пластин з криволінійними отворами. – Львів: ДУ "Львівська політехніка", 1994. – 13 с.–Деп. В ДНТБ України 01.03.1194, №415 Ук 94. 7. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. – 166 с. 8. Шиндер В.К. Математична модель напруженого стану анізотропної пластини із врахуванням п'єзо- та піроелектричних ефектів: Мат. Всеукраїнської наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях". – Львів, 5–7 жовтня 1995 р. 9. Шиндер В.К. Розв'язування плоскої квазістатичної задачі термопружності для неоднорідних п'єзоелектричних тіл: Тези доповідей IV Міжнарод. симпозіуму укр. інж.-мех. у Львові. – Львів,1999. – С.22. 10. Шиндер В.К. Розв'язок задачі магнітопружності для пластинчастої конструкції з криволінійним вирізом: Зб. наук. ст. "Проблеми теорії та практики будівництва". Т. 2 "Сталеві конструкції. Теоретична і будівельна механіка". – 1997. – С. 142–145.

УДК 539.3; 624.075

В.К. Шиндер, П.А. Ткаченко, С.І. Томецька
Національний університет "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПІРО- ТА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ЕФЕКТІВ

Викладено принципи узагальненого підходу та алгоритм розв'язку плоскої задачі статичної електричної пружності із врахуванням п'єзоелектричного ефекту. Опрацьовано алгоритми, що ґрунтуються на запропонованих методах, а також автоматизовано математичну симуляцію взаємопов'язаних електричних та механічних полів в неоднорідних п'єзоелектричних пластинах під прямим п'єзоелектричним ефектом.

The paper reveals principles of a general mathematical approach and algorithm of solving flat problem of static electric elasticity with registration piroelectric effect. Based on the suggest calculation methods algorithms have been worked out and computer- aided mathematical simulation of interrelated electric and mechanical fields in heterogeneous piezoelectric plate (bend) under direct piezoelectric effect.

Розглянемо тонку п'єзоелектричну пластинку постійної товщини h, яка у кожній точці має площину пружної симетрії, паралельної до серединної площини xOz і такої, що займає нескінченну область S із отвором, обмеженим простим, гладким контуром L. Пластинка знаходиться у рівновазі