

опір зсуву закладних деталей залізобетонних конструкцій: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 1999. – Вип. 3. – С.252–255. 13. Салійчук Л.В. Взаємодія з бетоном анкерів закладних деталей в зоні їх розташування: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 2003. – Вип. 9. – С.311–316. 14. Салійчук Л.В., Кваша В.Г. Робота нормальних і дотичних анкерів у закладних деталях залізобетонних конструкцій // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка" "Теорія і практика будівництва". – 1996. – № 300. – С.127–134. 15. Салійчук Л.В., Кваша В.Г. Дослідження міцності і деформативності вмонтованого в бетоні трубчастого анкера при згині: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 2003. – Вип. 10. – С. 202–208. 16. Салійчук Л.В., Ольховий І.М. Розрахункове дослідження роботи в бетоні трубчастого вмонтованого анкера при поперечному навантаженні: Зб. "Автомобільні дороги і дорожнє будівництво". – 2004. – Вип. 69. – С. 219–225. 17. Стрелецький Н.И. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов. – М.: Транспорт, 1981. – 360 с. 18. Холмянский М.М. Закладные детали сборных железобетонных элементов. – М., 1968. – 208 с. 19. Шитиков Б.А. Изгиб стального стержня в бетоне // Сб. НИИЖБ "Штампованные и сварные закладные детали железобетонных конструкций". – М., 1979. – С.110–127. 20. Furmańczyk S., Lefik M. Zakotwienie kotka rozporowego w betonie // XLI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB: Problemy naukowo-badawcze budownictwa. – T. 5: Konstrukcje betonowe. – Krakow–Krynica, 1995. – S. 45–52. 20. Starosolski W. Łączniki rozporowe – przegląd // Przegląd budowlany. –Warszawa, 1998. – Nr 8–9. – S. 382–388. 21. Żaboklicki M. Łącznik rozporowy poddany obciążeniu poprzecznemu // XLII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB: Problemy naukowo-badawcze budownictwa.– T. 4: Konstrukcje betonowe. – Krakow–Krynica, 1995. – S. 157–164.

УДК 624.075: 539.3

Р.М. Тацій, О.Р. Давидчак

Національний університет "Львівська політехніка"

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ І СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ

© Тацій Р.М., Давидчак О.Р., 2006

**Запропоновано методику дослідження динаміки і стійкості стрижневих систем із довільним розподілом масами, жорсткості та навантаження, розроблену на основі алгоритму методу граничних елементів і методу дискретизації елементів.**

**To find frequencies and forms of characteristic oscillations, critical (buckling) loads of durability of framed structures with discrete–continuous distribution of parameters, the presented article suggests using the boundary elements method with evolutionary operators that correspond to quasi–differential equations obtained during certain approximation of coefficients of corresponding equations.**

### Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень

Сьогодні активно розглядається багатьма дослідниками універсальний числово-аналітичний метод граничних елементів (МГЕ), який порівняно з методом скінченних елементів і методом скінченних різниць має певні переваги під час розв'язку тривимірних і динамічних задач [1, 2]. Порівняно повно розроблений МГЕ для задач статички та динаміки стрижневих систем, які зводяться до розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Проте за дискретно-неперервних розподілів параметрів моделі інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов'язано зі значними труднощами або з появою складних фундаментальних функцій. Тому в літературі під час розрахунку МГЕ використовувались різні наближені підходи, наприклад, врахування зосереджених мас на стрижневих елементах у задачах динаміки

приведенням їх до еквівалентної розподіленої маси тощо [1]. Однак загальна методологія аналізу коливань і стійкості континуально-дискретних механічних систем із нерівномірно розподіленими параметрами та дискретними включеннями ще не набула належного розвитку і не задовольняє практичним вимогам. Тому теоретичні дослідження, спрямовані на вирішення цієї наукової проблеми, є актуальними і перспективними.

**Мета роботи** – розробити нову методику розрахунку та числового дослідження стрижневих систем із дискретно-неперервними розподілами параметрів (змінна жорсткість, довільний розподіл та розташування мас і сил вздовж стрижнів) на стійкість та динамічні впливи.

У цій роботі пропонується використати для знаходження частот і форм власних коливань, критичних сил стійкості стрижневих систем алгоритм МГЕ з еволюційними операторами, що відповідають квазідиференціальним рівнянням, отриманим за певної апроксимації коефіцієнтів відповідних рівнянь.

### Методика розрахунку

Для розрахунку конструкції на основі інтегрування диференціальних рівнянь необхідно отримати розв'язок диференціального рівняння для окремого стрижня. Тому спочатку розглянемо методику розв'язку для окремого стрижня.

#### І. Розв'язок для окремого стрижня

Рівняння поперечних коливань прямолінійного стрижня в амплітудному стані за позовжньо-поперечного згину має вигляд [3]

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( P \frac{dv}{dx} \right) - \omega^2 \left( m^* v - \frac{d}{dx} \left( \mu^* \frac{dv}{dx} \right) \right) = \varphi(x), \quad (1)$$

де  $m^* = m(x) + \sum M_i \delta(x - x_i)$ ;  $\mu^* = \mu(x) + \sum I_i \delta(x - x_i)$  – погонні маса й момент інерції, причому  $m(x)$  і  $\mu(x)$  – звичайні функції, а  $M_i$ ,  $I_i$  – маса й момент інерції вантажів, зосереджених у перерізах  $x = x_i$ ;  $P$  – позовжня стискаюча сила.

Побудова фундаментальної матриці для диференціальних рівнянь (1), коефіцієнти яких містять дельта-функції, наведена у [3, 4]. Згідно із згаданою методикою розв'язки рівнянь (1) подаються через розв'язок простого рівнянь  $(EI y''''(x))'' = 0$ , матриця фундаментальних розв'язків якого за  $EI = const$  має такий вигляд:

$$B(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & x - \alpha & \frac{(x - \alpha)^2}{a_0 * 2!} & \frac{(x - \alpha)^3}{a_0 * 3!} \\ 0 & 1 & x - \alpha & \frac{(\alpha - x)^2}{a_0 * 2!} \\ 0 & 0 & 1 & x - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $a_0 = EI$ .

Для розв'язання рівняння (1) прогин, кут повороту, момент і перерізувальну силу в довільному перерізі  $x$  стрижня позначимо відповідними квазіпохідними в такий спосіб:

$$\begin{aligned} v^{[0]} &\stackrel{df}{=} v(x); & v^{[1]}(x) &= v'(x); \\ v^{[2]}(x) &= EI v''(x); & v^{[3]}(x) &= P v'(x) - (EI v''(x))'. \end{aligned} \quad (3)$$

Вихідне диференціальне рівняння (1) зводимо до системи рівнянь першого порядку:

$$V'(x) = C'(x) \times V(x) + F'(x), \quad (4)$$

де

$$V(x) = \begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \\ v^{[2]} \\ v^{[3]} \end{pmatrix}; ; F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$C'(x), F'(x)$  – матриці міри на  $I$  ( $C(x); F(x)$  – функції локально обмеженої на  $I$  варіації);

$$a_2 = -\omega^2 \left( m_0 + \sum_{k=1}^n \delta(x-x_k) M_k \right); \quad a_1 = -P - \omega^2 \left( \sum_{i=1}^t I_i \delta(x-x_i) + \mu \right).$$

Функція  $C(x)$  допускає стрибки  $\Delta C(x) = C(x) - C(x-0)$ :

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta a_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Розглянемо вільні коливання, які описуються однорідним квазідиференціальним рівнянням:

$$(a_0 v'')'' - (a_1 v')' + a_2 v = 0. \quad (6)$$

Для отримання простого еволюційного оператора  $B(x, \alpha)$ , що відповідає квазідиференціальному рівнянню (6), коефіцієнти  $a_1(x)$  і  $a_2(x)$  подамо у вигляді дельта-функцій [4]:

$$a_1(x) = \alpha_1'(x) = \sum_{k=1}^n f_1(x_k); \quad a_2(x) = \alpha_2'(x) = \sum_{k=1}^n f_2(x_k), \quad (7)$$

де  $\alpha_1(x) = \int a_1(x) dx$  – подано кусково сталою функцією із стрибками в точках  $x_k = h \cdot k$ ;  $n$  – кількість ділянок, на які розбивається проміжок інтегрування;  $h = x_k - x_{k-1}$ .

Сtribок функції  $\Delta C(x_k)$  запишемо так:

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(x_k) & 0 & 0 \\ f_2(x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

За такого подання коефіцієнтів  $a_1, a_2$ , якщо буде відомий еволюційний оператор диференціального рівняння  $(a_0 y'')'' = 0 - B(x_k - 0, x_{k-1})$ , який виражається через функцію Коші, то фундаментальну матрицю диференціальної системи (3) можна знайти за формулою [4]

$$B^*(x, x_0) = \prod_{k=1}^n (E + \Delta C(x_k)) \times B(x_k - 0; x_{k-1}), \quad (9)$$

де  $E$  – одинична матриця.

Коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$  відповідно до формули (7) подамо у вигляді узагальнених функцій

$$a_1 \sim -P \left( \sum_{k=1}^n h \delta(x-x_k) \right) - \omega^2 \left( \mu \sum_{k=1}^n h \delta(x-x_k) + \sum_{i=1}^m I_i \delta(x-x_i) \right); \quad (11)$$

$$a_2 \sim -\omega^2 \left( \sum_{k=1}^n m_0 h \delta(x-x_k) + \sum_{i=1}^m M_i \delta(x-x_i) \right),$$

де  $h = \frac{1}{n}$ .  
Тоді

$$\Delta a_1(x_k) \sim -Ph - \omega^2 \left( \mu h + \sum_{i=1}^m I_i \delta(x - x_i) \right);$$

$$\Delta a_2(x_k) \sim -\omega^2 \left( hm_0 + \sum_{i=1}^m M_i \delta(x - x_i) \right).$$
(12)

Розв'язок рівняння (6) запишемо у вигляді

$$V(x) = B^*(x, x_0) \times V_0,$$
(13)

де  $V(x)$  – матриця параметрів напружено-деформованого стану у перерізі стрижня;  $V_0$  – матриця початкових параметрів;  $B^*(x, x_0)$  – фундаментальна матриця диференціальної системи (3), елементи якої знаходять через функцію Коші для рівняння  $(EI(x)y'')'' = 0$ .

## II. Розв'язок для довільної стрижневої системи

Для довільної стрижневої системи можна отримати систему рівнянь такої самої будови, як і (13). Матриця  $B^*$  перетвориться у квазидіагональну, а вектори  $V(x)$  і  $V_0$  міститимуть параметри деформівного стану усіх стрижнів у довільній і початковій точках:

$$B^* = \begin{vmatrix} B_1(x, x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_i(x, x_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_m(x, x_0) \end{vmatrix}, \quad V(x) = \begin{vmatrix} V_1(x) \\ \vdots \\ V_i(x) \\ \vdots \\ V_m(x) \end{vmatrix}; \quad V_0 = \begin{vmatrix} V_{01} \\ \vdots \\ V_{0i} \\ \vdots \\ V_{0m} \end{vmatrix},$$
(14)

де  $m$  – кількість стрижнів у системі.

Граничні і початкові параметри різних стрижнів системи будуть пов'язані рівняннями рівноваги й сумісності переміщень вузлів. Це дає змогу перенести граничні параметри стрижнів із матриці  $V$  у матрицю  $V_0$ , виконати відповідні перетворення матриці  $B^*$  і звести систему (13) до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих граничних і початкових параметрів стрижнів за такою схемою [1]:

$$V = B^* * V_0 \rightarrow B^* * V_0 - V = 0 \rightarrow B^* * V_* = 0.$$
(15)

Спектр частот власних коливань знаходять з умови рівності нулю визначника

$$|B^*_*| = 0.$$
(16)

Рівняння (16) уможливорює шляхом підбору визначити повний спектр частот стрижневої системи і за характером зміни частот за зміни поздовжньої сили визначити критичні сили для стрижневої системи.

Запропонований алгоритм розрахунку може бути використаний для визначення параметрів вимушених гармонічних коливань стрижневих систем із дискретно-неперервними розподілами параметрів.

## ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ

**Приклад 1. Визначення частоти власних коливань рами, яка показана на рис. 1, із зосередженою і розподіленою масами [5].**

Результати розрахунку (графіки частотного визначника) отримані за розробленою методикою і, для порівняння, методами переміщень [2] та граничних елементів [1] показано відповідно на рис. 1, а, б, в.

Недоліком МГЕ є те, що заміна точкової маси на еквівалентну розподілену призводить до похибки, яка зростає із зростанням номера частоти, а вже для третьої частоти похибка збільшується до 30,67%. У методі переміщень графік частотного визначника має розриви, причому точка

розриву ( $\lambda_3=3,93$ ) збігається із коренем частотного визначника, отриманого використаним у роботі підходом. Тобто розрив у визначнику методу переміщень потрапляє на третю частоту власних коливань і під час розрахунку згаданим методом цю частоту пропускають. Цих недоліків, як свідчать наведені результати, позбавлений запропонований у роботі метод розрахунку.

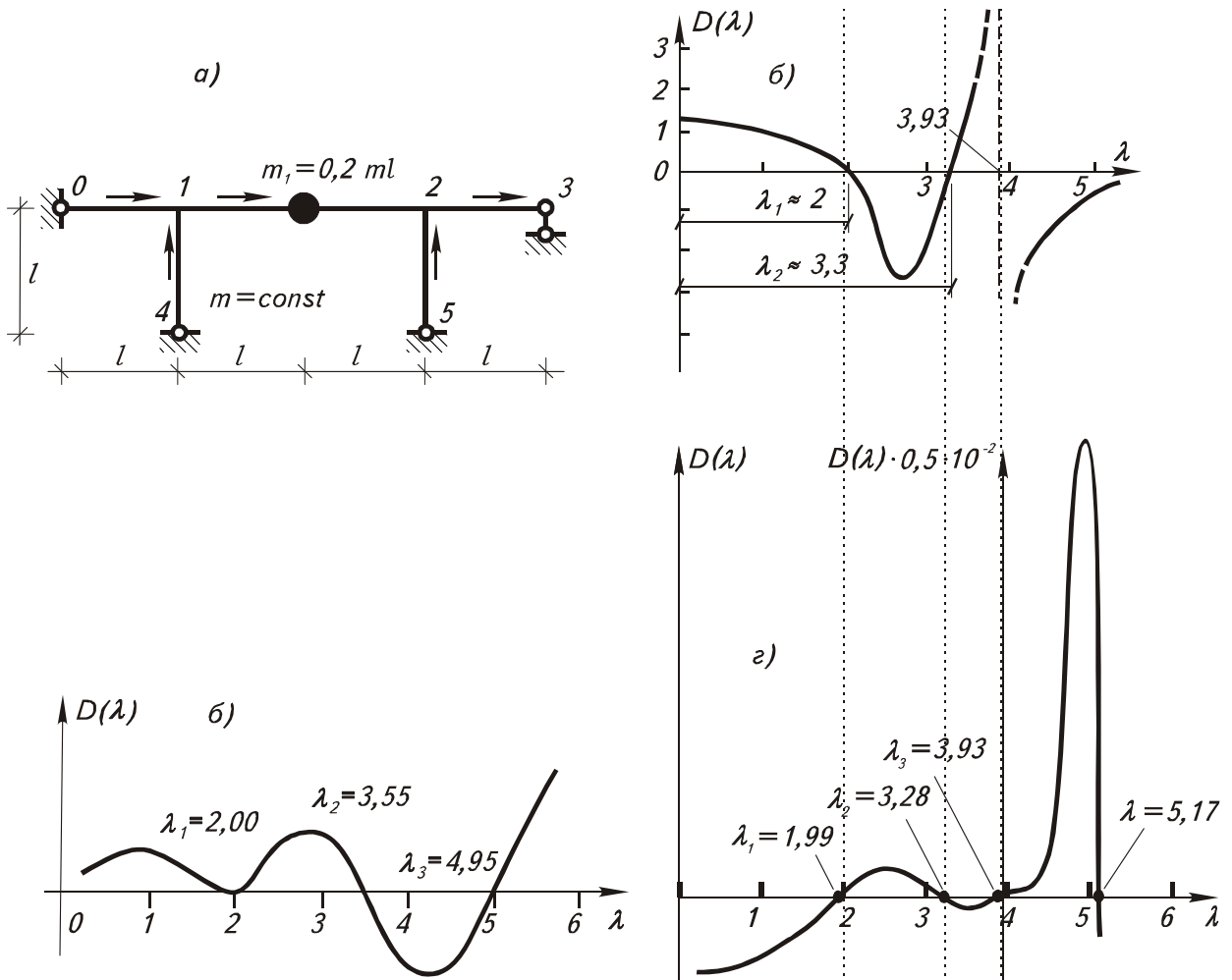


Рис. 1. Частота власних коливань рами

**Приклад 2.** Визначення оптимального розташування мас на літальному апараті за дії слідкуючої сили [ 6 ].

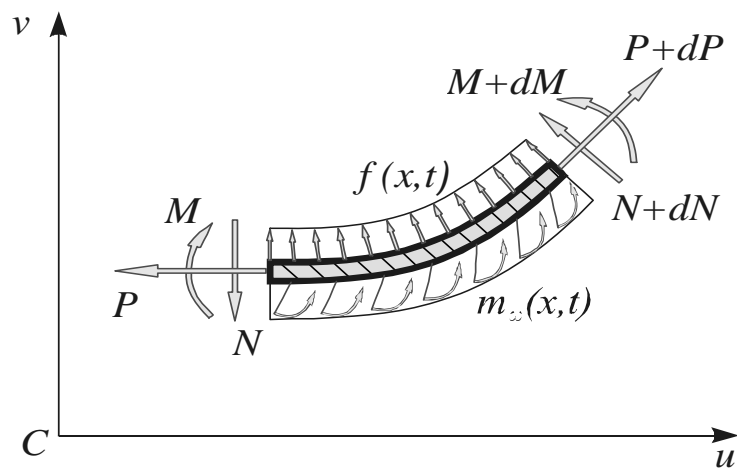


Рис. 2. Елемент  $dx$  стрижня в площині  $Cuv$

Розглянуто плоскі малі поперечні коливання пружної конструкції (одновимірного об'єкта (рис. 2)) в умовах вільного польоту під дією незмінної слідкуючої сили  $F_0$  і за умови малих просторових поворотів.

Поздовжнє стискаюче зусилля в стрижні визначається за формулою

$$P(x) = EF \frac{du(x)}{dx} = -F_0 \frac{l_0 - x}{l_0}. \quad (17)$$

Позначаючи власні поперечні коливання  $V(x,t)$  у вигляді  $V(x,t) = v(x) \cdot \cos \omega t$ , із рівнянь пружних коливань після перетворень отримаємо для вільних коливань однорідне рівняння:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( EF \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) - \omega^2 \left( m^* v - \frac{d}{dx} \left( \mu^* \frac{dv}{dx} \right) \right) = 0, \quad (18)$$

де  $u$  – абсолютне поздовжнє видовження;  $m_0(x)$  – розподілена маса стрижня;  $M_k$  – маса  $k$ -того

вантажу;  $m(x) = m_0(x) + \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) M_k$ .

Розв'язок рівняння (18) отримано за наведеною у розділі 1 методикою. Результати досліджень показано на рис. 3.

Аналіз результатів показує наявність оптимальних місць розташування зосереджених мас на стрижні в умовах вільного польоту.

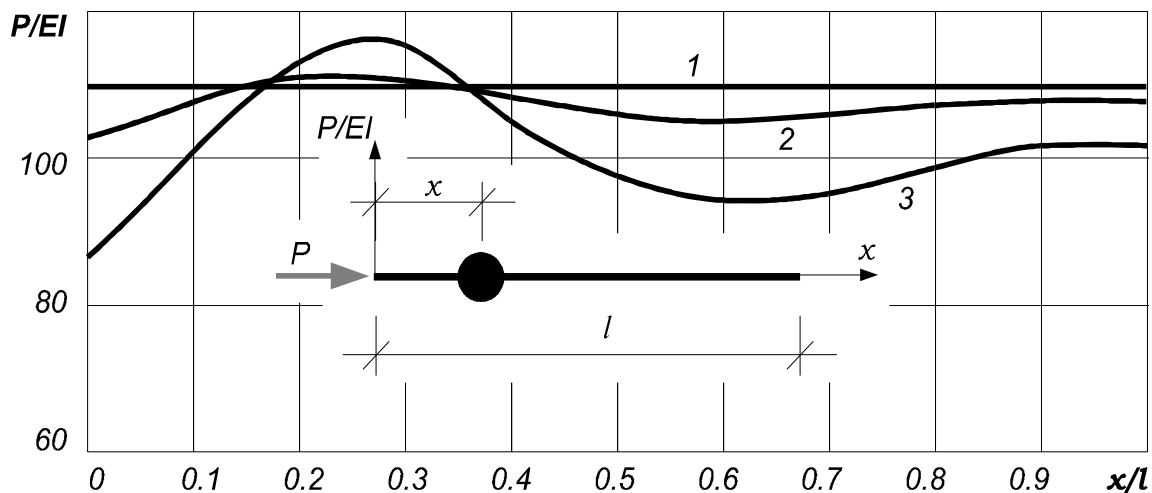


Рис. 3. Залежності величин критичних сил від місця розташування зосередженої маси: за різних співвідношень мас:

3 – для стрижня із співвідношенням мас  $\frac{Q_1}{g_0 l} = 0,05$ ;

2 – для  $\frac{Q_1}{g_0 l} = 0,01$ ; 1 – для стрижня без зосередженої маси  $Q_1 = 0$ .

**Приклад 3. Дослідження стійкості стрижнів під дією неконсервативних сил.** Використовуючи запропоновану методику розв'язку диференціальних рівнянь динамічним методом, визначалися критичні сили для консольного стрижня із розподіленою і зосередженою масами, завантаженого неконсервативною силою. Результати розрахунків показано на рис. 4 [7].

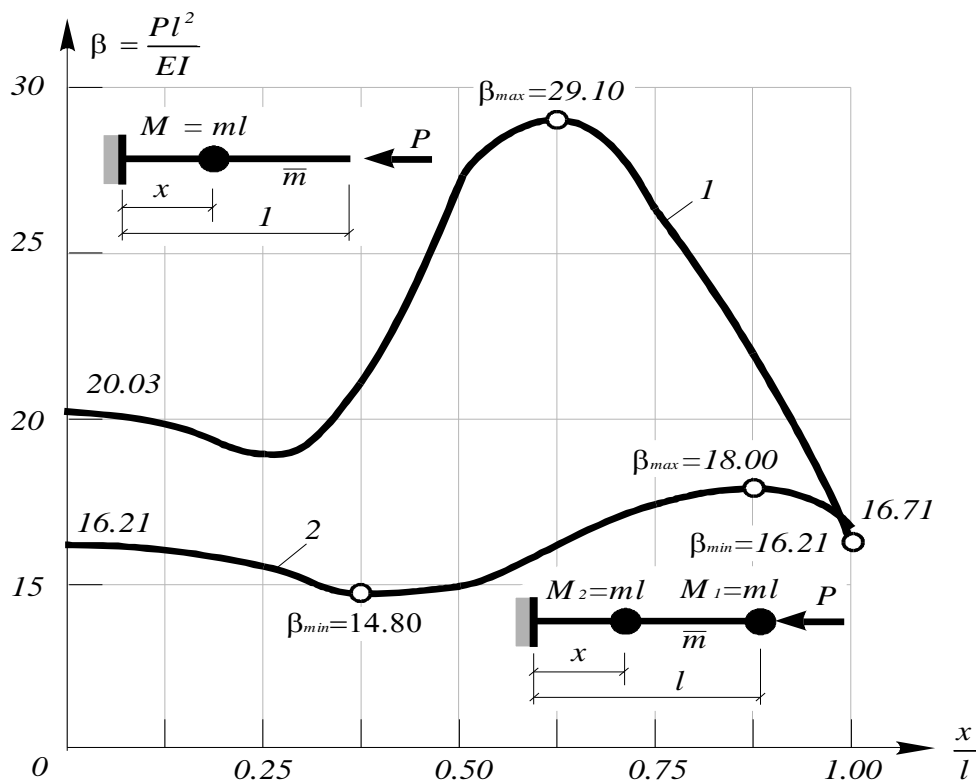


Рис. 4. Залежності величини критичної сили від положення зосередженої маси на стрижні. Лінія 1 відповідає стрижню із однією зосередженою масою, лінія 2 – стрижню із двома зосередженими масами

### Висновок

Отримано нову методику розрахунку пружних стрижневих систем із дискретно неперервним розподілом параметрів на стійкість та динаміку, яка має певні переваги над класичними відомими методами, про що свідчить приклад 1. Ця методику, як показано у прикладах 2 і 3, дає змогу отримувати нові результати у дослідженні стійкості та динаміки стрижневих систем.

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. *Строительная механика: Специальный курс. Применение метода граничных элементов.* – Одесса: "Астропринт", 2001. – 240 с.
2. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова.* – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.
3. Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь // *Вісник НУ "Львівська політехніка" "Теорія і практика будівництва"*. – 2004. – № 495. – С.62–64.
4. Давидчак О., Тацій Р. Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів. – *ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i inżynieria srodowiska.* – Rzeszow, 2004. – Z. 37. – S. 57–60.
5. Давидчак О.Р. Розрахунок рам як дискретно-неперервної стрижневої системи на вільні коливання // *Вісник НУ "Львівська політехніка" "Теорія і практика будівництва"*. – 2004. – № 520. – С.53–56.
6. Тацій Р., Давидчак О. *Lbyfvsxyf cnsqrscnm rjycnherws] ghb ls] ckslre.xj] cbkb d evjdf] dskmyuj gjkmjne.* – 6<sup>th</sup> International Scitntific Conference Aktualne problemy budownictwa i inzynierii srodowiska. *Politechniki Rzeszowskiej.* – Rzeszow, 2001. – С.368–371.
7. Тацій Р., Давидчак О. Про оптимальне розташування мас на консолі при автоколивній втраті стійкості. – 5<sup>th</sup> International Scitntific Conference Aktualne problemy budownictwa i inzynierii srodowiska. *Politechniki Rzeszowskiej.* – Rzeszow, 2000. – С.547–550.