

ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ ГНУЧКИХ АНКЕРІВ В ЗАКЛАДНИХ ДЕТАЛЯХ І З’ЄДНАННЯХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ

© Салійчук Л.В., 2006

Наведено результати експериментальних досліджень напружено-деформованого стану і міцності гнучких арматурних анкерів як за групового їх розташування в закладних деталях, так і одиночних, що працюють на зріз, в з’єднаннях залізобетонних конструкцій. Запропоновано розрахункову модель одиночного анкера в бетонному масиві та методику розрахунку його міцності, деформативності і довжини анкерування в бетоні.

The results of experimental researches of the tensely-deformed state and durability of flexible anchors of reinforcement are resulted both at group their location in the details of establishments and single, workings on a cut, in connections of constructions of the reinforced concretes. The calculation model of single anchor is offered in a concrete array that method of calculation of his durability, deformations and lengths of anchoring in a concrete.

1. Постановка завдання

Гнучкі анкери з привареними до них металевими пластинами (закладні деталі) або без них у вигляді випусків, петель, гаків тощо, вироблених з бетону, поширено застосовуються в залізобетонному будівництві для об’єднання елементів як в новозбудованих спорудах, так і в існуючих при їх ремонті, підсиленні і реконструкції. Залежно від призначення, типу з’єднаних елементів, умов навантаження вони можуть працювати на зсуваючі зусилля або одночасно на зсуваючі, відриваючі зусилля і згинальні моменти (за наявності ексцентриситетів прикладення зсуваючих сил). За способом розміщення в об’єднаних елементах анкери можуть бути одиночними і груповими, нормальними (тобто орієнтованими перпендикулярно до дії зсуваючої сили) і нахиленими або дотичними (тобто орієнтованими під кутом до дії зсуваючої сили) [2, 3, 4, 6, 12, 13, 14, 18].

Основним недоліком традиційно застосовуваних анкерних елементів є їх матеріаломісткість, значна трудомісткість у виконанні, складність виконання монтажних робіт. Тому останнім часом замість них застосовують ефективніші і технологічніші типи з’єднань – трубчасті анкери з конусно-болтовими розпірними елементами [20, 21, 22]. Порівняно з традиційними вони значно простіші в улаштуванні вузлових з’єднань, забезпечують необхідну швидкість монтажу, а також довговічніші і надійніші в роботі.

У проведених дослідженнях переважно вивчали міцність гнучких арматурних анкерів у складі закладних деталей збірних і збірно-монолітних залізобетонних конструкцій [2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 14, 18, 19], а також жорстких і гнучких анкерів сталезалізобетонних конструкцій різного призначення [8, 9, 17]. Дослідження розпірних анкерів проведені в обмеженому обсязі, передусім за кордоном, і стосовно анкерів заводського виготовлення невеликих діаметрів [20, 22]. В Україні подібні типи анкерів застосовували тільки в поодиноких випадках [5, 7]; експериментальних досліджень їх роботи в бетоні не проводили, а методику розрахунку міцності і деформативності за дії різних комбінацій зусиль не розроблено.

Залишились також недослідженими багато інших питань з теорії проектування анкерів. Зокрема вплив на міцність і деформативність з’єднань кількості, способу розміщення, площі і класу арматури анкерів, а також міцності бетону об’єднаних конструктивних елементів. Існуючі нормативні документи рекомендують приймати мінімальну довжину анкерних стрижнів закладних деталей різного призначення в межах $(15-30)d$ для бетонів класу В25–30. Така велика довжина анкерів призводить до збільшення розмірів конструктивних елементів, збільшення об’ємів буріння каналів і перевитрати металу на анкерні стрижні. Для трубчастих анкерів подібні рекомендації відсутні. Недостатньо досліджена також і деформативність анкерів, хоча відомо, що визначення переміщень,

кутів повороту, жорсткості защемлення анкерів в бетоні відіграє істотну роль під час проектування вузлів об'єднання залізобетонних елементів, а також з'єднань в збірно-монолітних конструкціях, або під час розширення прольотних будов мостів монолітною, збірною і збірно-монолітною накладною плитою. В нормативних документах будь-які рекомендації з цих питань відсутні.

Тому експериментальне вивчення несучої здатності і деформативності нормальних і дотичних анкерів як у складі закладних деталей, так і окремо працюючих елементів на дію зсуваючих зусиль, і сумісну дію зсуваючих зусиль та згинальних моментів, а також визначення ефективної довжини заанкерювання анкерів в бетоні та показників їх податливості: горизонтальних і вертикальних зміщень, кутів повороту, коефіцієнтів податливості і жорсткості було метою дослідження. Окремо передбачалось дослідити можливість застосування існуючих рекомендацій з розрахунку міцності анкерів різних типів або створення нової, обґрунтованої експериментально, розрахункової бази.

2. Завдання і програма досліджень

Сформульовані на основі аналізу виконаних експериментів [1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 18, 20, 22] завдання подальших досліджень зводяться ось до чого:

- експериментально дослідити міцність і деформативність стрижневих анкерів різних конструкцій на дію як зсуваючих сил, так і сумісну дію зсуваючих сил і згинальних моментів;
- дослідити напружений стан і міцність бетону в зоні розміщення анкерів;
- вивчити сумісну роботу системи одиночний трубчастий розпірний анкер натурних розмірів – оточуючий бетон, встановити деформовану вісь анкера та ефективну довжину його заанкерювання в бетонному масиві за дії зсуваючої сили;
- встановити фактичну деформативність (податливість) анкерів різних типів за групового і одиночного їх розташування;
- розробити розрахункові моделі анкерів за різних видів навантажень та експериментально обґрунтовану методику їх розрахунку;
- розробити рекомендації з проектування анкерів різних типів та призначення.

Загальна програма експериментальних досліджень включала випробування трьох груп дослідних зразків, мету випробувань яких та обсяг експериментальних досліджень подано в табл. 1.

Таблиця 1

Програма і обсяг експериментальних досліджень гнучких анкерів (стрижневих і трубчастих)

№ з/п	Група серій	Мета випробувань	К-ть дослід. зразків
1	Група А (АГ, СП)	Дослідження роботи прямих стрижневих анкерів у складі закладних деталей (об'єднання з металевими пластинами) на дію зсуваючих сил залежно від кількості та способу розміщення анкерів, площі та класу арматури, міцності бетону	38 шт. (див. табл. 2)
2	Група Б (АГ, СП, СВ)	Порівняльні дослідження несучої здатності і деформативності закладних деталей з прямими і комбінованих з прямими і відігнутими анкерами за дії зсуваючих сил і згинальних моментів. Визначення показників податливості – горизонтальних і вертикальних переміщень, коефіцієнтів податливості і жорсткості	12 шт. (див. табл. 2)
3	Група В (АР, Т)	Дослідження міцності і деформацій вмонолічених в бетонний масив одиночних розпірних трубчастих анкерів на дію зсуваючої сили залежно від довжини їх заанкерювання	6

АГ – анкери групові; СП – стрижневі прямі; СВ – стрижневі відігнуті; АР – анкери розпірні; Т – трубчасті.

3. Конструкція і виготовлення дослідних зразків, фізико-механічні характеристики матеріалів

Експериментальні дослідження роботи гнучких анкерів груп А і Б включали випробування семи серій експериментальних зразків (рис. 1, а, б) [6, 12, 13]. На експериментальних зразках серій I–V (група А) вивчали вплив на несучу здатність і деформативність за дії зсуваючої сили кількості, розміщення і площі арматури анкерів (серія I, III, IV), межі текучості арматури (серія II) і міцності

бетону (серія V). Типи і характеристика використаних для експериментальних досліджень закладних деталей натурних розмірів показано на рис. 1 і подано в табл. 2.

Експериментальні зразки групи Б включали дві серії S і SF з закладними деталями двох типів – з нормальними (№7, рис. 1, в) і комбіновані з нормальними і дотичними анкерами (№10, рис. 1, з) [14]. Зразки серії S випробовували тільки зсуваючим зусиллям, серії SF – зсуваючим зусиллям і згинальним моментом. Прямим порівнянням результатів випробувань зразків цих серій оцінювали вплив дотичних анкерів на міцність і деформації закладних деталей за зсуву і зсуву зі згином.

Нормальні анкери всіх досліджуваних закладних деталей прикріплювали до пластин дуговим електрозварюванням в середовищі вуглекислого газу в тавр у розсвердлені отвори (рис. 1, д), дотичні – внахлест фланговими швами.

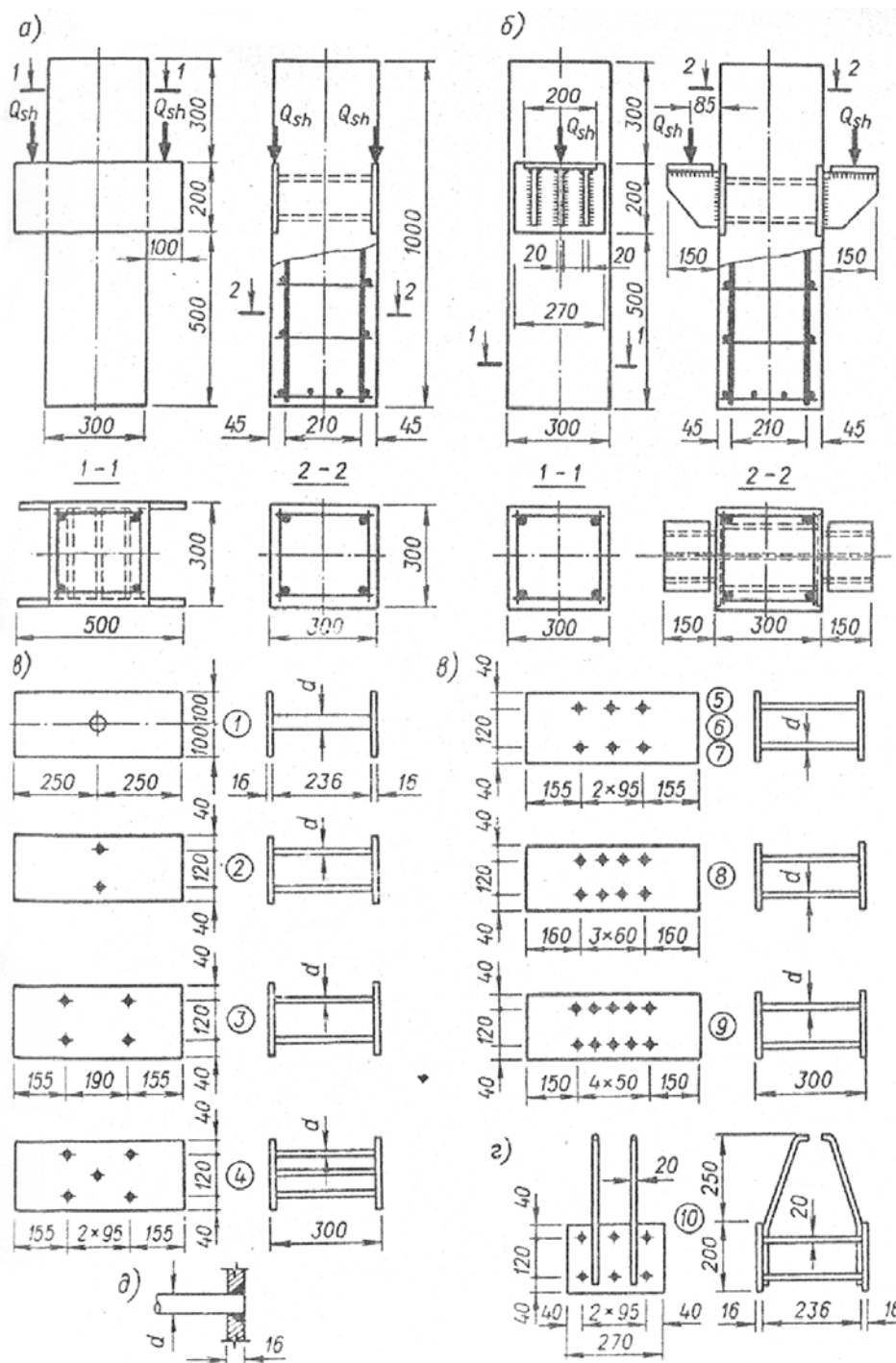


Рис. 1. Конструкція експериментальних зразків (а, б) та типи досліджуваних закладних деталей групи А з прямими (в) і групи Б з прямими і відігнутими анкерами (з)

Експериментальні зразки груп А і Б виготовляли одночасно з бетону одного складу 1:1,32:3,65 при $V/C=0,42$, проектного класу В35. Характеристики міцності бетону і арматури, визначені за випробуваннями стандартних кубів, призм і відібраних зразків арматури, подано в табл. 2. До початку випробувань кубова міцність бетону становила 41,6 МПа, призмova – 30,4 МПа, межа текучості арматури анкерів – 408,1 МПа (А-III), 338,5 МПа (А-II), 238,4 МПа (А-I). В кожній із серій I–V випробовували по два, а в серіях S, SF – по три зразки-близнюки. За основу конструкції експериментальних зразків одиночних трубчастих анкерів прийнято розпірний анкер натурних розмірів [15], деталі якого показано на рис. 2, а, а розташування в каналі бетонного масиву – на рис. 2, б. Анкери виготовляли з відрізків труби діаметром 40–50 мм і товщиною стінки 5–7 мм. Трубчастий елемент анкера 2 розміщують в каналі бетонного масиву 1 і розпирають до його стінок конусним елементом 3, який втягують в розрізану частину анкера інвентарним болтом. Після чого зазор між поверхнею анкера і каналу, а також його внутрішній простір заповнюють цементно-епоксидним розчином 4.

Експериментальні зразки (рис. 3) являли собою бетонні масиви Т-подібного поперечного перерізу габаритними розмірами 40×55 см і довжиною 55 см, у яких під час виготовлення утворювали канали діаметром 50 мм (імітація висвердлених каналів) різної довжини А-I: 250 мм; А-2:350 мм; А-3:450 мм залежно від довжини вмонтованих в них одиночних розпірних анкерів натурних розмірів з труби $\varnothing 38$ мм і товщиною стінки 3,8 мм. Кожна пара зразків мала різну довжину вмонтованого в канал анкера: 200, 300, 400 мм. Ставилось за мету встановлення ефективної (робочої) довжини заанкерювання за дії на анкер зсуваючої сили. Канали зсередини і ззовні заповнювали цементно-епоксидним розчином Sika Groud 311 (міцність на стиск – близько 80 МПа, модуль пружності – 37000 МПа) фірми Sika.

Зразки виготовляли на полігоні заводу залізобетонних виробів за звичайною заводською технологією одночасно із бетону одного складу 1:1,32:3,65 (по вазі) при $v/c=0,42$. Проектний клас бетону – В25.

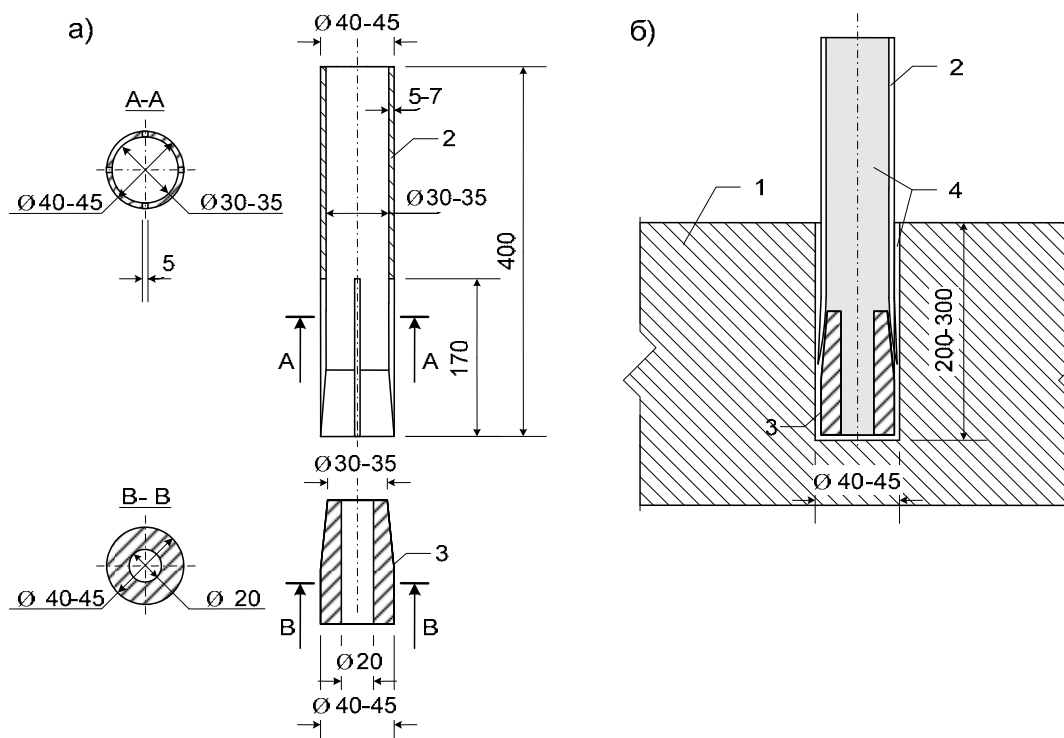


Рис. 2. Деталі розпірного анкера (а) та його розташування в бетонному масиві (б):
1 – бетонний масив; 2 – трубчастий анкер; 3 – розпірний конус;
4 – замоноличення цементно-епоксидним розчином SikaGroud 311

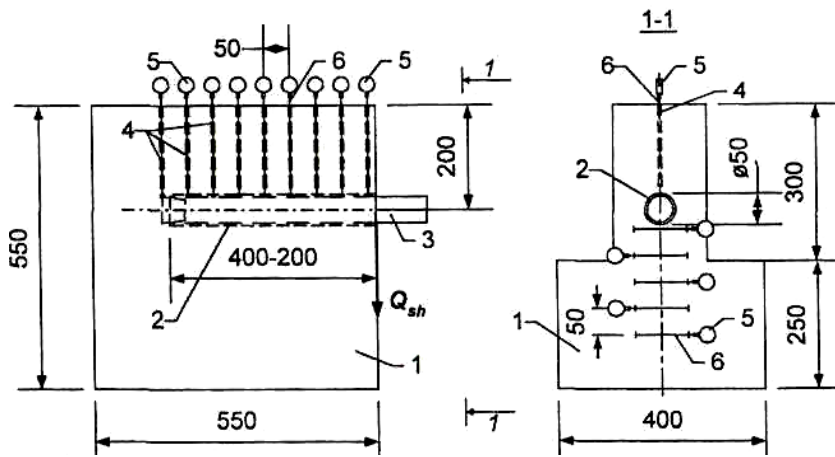


Рис. 3. Конструкція дослідних зразків з замоноличеним анкером, схема розміщення приладів:

- 1 – бетонний масив; 2 – канал для вмонічення анкера;
 3 – анкер; 4 – канали для розташування штоків мікроіндикаторів;
 5 – мікроіндикатор; 6 – видовжувач

Міцнісні і деформативні характеристики бетону визначали випробуваннями стандартних кубів розмірами 150×150×150 мм і призм – розмірами 150×150×600 мм і 100×100×400 мм.

4. Методика випробувань експериментальних зразків

Під час випробувань експериментальних зразків груп А і Б на зсув зсуваючі сили прикладали в площині пластин закладних деталей до їх виступаючих за грані зразків консолей (рис. 1, а), чим забезпечували роботу анкерів на чистий зсув. Навантаження закладних деталей зсуваючим зусиллям і згинальним моментом здійснювали через металеві опорні столики, до яких навантаження прикладали з ексцентриситетом 8,5 см (рис. 1, б). Зразки навантажували ступенями, що дорівнювали 0,05–0,1 від передбачуваного руйнівного навантаження з витримкою 15–20 хв на кожному ступені. Вимірювали вертикальні і горизонтальні (для серії SF) переміщення пластин закладних деталей, а також поздовжні деформації бетону нижче від пластини закладної деталі (див. схеми на рис. 4). Для вимірювання переміщень застосовували мікроіндикатори з ціною поділки 0,001 мм, деформацій – тензорезистори на базі 50 мм. За величинами вертикальних і горизонтальних переміщень оцінювали жорсткість анкерів і ступінь їх заанкерювання в бетоні, а по кутах повороту визначали коефіцієнти податливості, порівнюючи які між собою, визначали ефективність того чи іншого типу анкерів [14]. В результаті випробувань одержано комплекс експериментальних даних про характер і причини руйнування, величини навантажень утворення тріщин і руйнівних, а також деформативність закладних деталей з різними типами анкерів.

Експериментальні зразки групи В – одиночні трубчасті анкери А-1, А-2, А-3 (по два зразки кожного типу) – також випробовували зсуваючою силою, яку прикладали в рівні бокового обрізу бетонного масиву (рис. 3). Для навантаження зразків за цією схемою розроблено спеціальну силову випробувальну установку, конструкція і принцип дії якої описано в [15].

Новою методичною особливістю цих випробувань було експериментальне визначення зігнутої осі анкера в бетоні за дії на нього зсуваючої сили. Для цього використано мікроіндикатори з ціною поділки 0,001 мм, якими через 50 мм вздовж вмоніченої частини анкера вимірювали його вертикальні переміщення. Для забезпечення контакту штока мікроіндикатора з досліджуванним анкером під час виготовлення зразків у верхній їх частині на глибину до поздовжнього каналу утворювали через 50 мм від площини навантаження вертикальні канали (рис. 3), в яких розміщували видовжувачі, жорстко (на різьбі) з'єднані зі штоками мікроіндикаторів, через які вони впирались в поверхню вмонічених анкерів, вимірюючи їх вертикальні переміщення під час навантаження. За їх величиною встановлювали фактичну зігнуту (здеформовану) вісь анкера, а за нею – і робочу довжину його анкерування при зрізі.

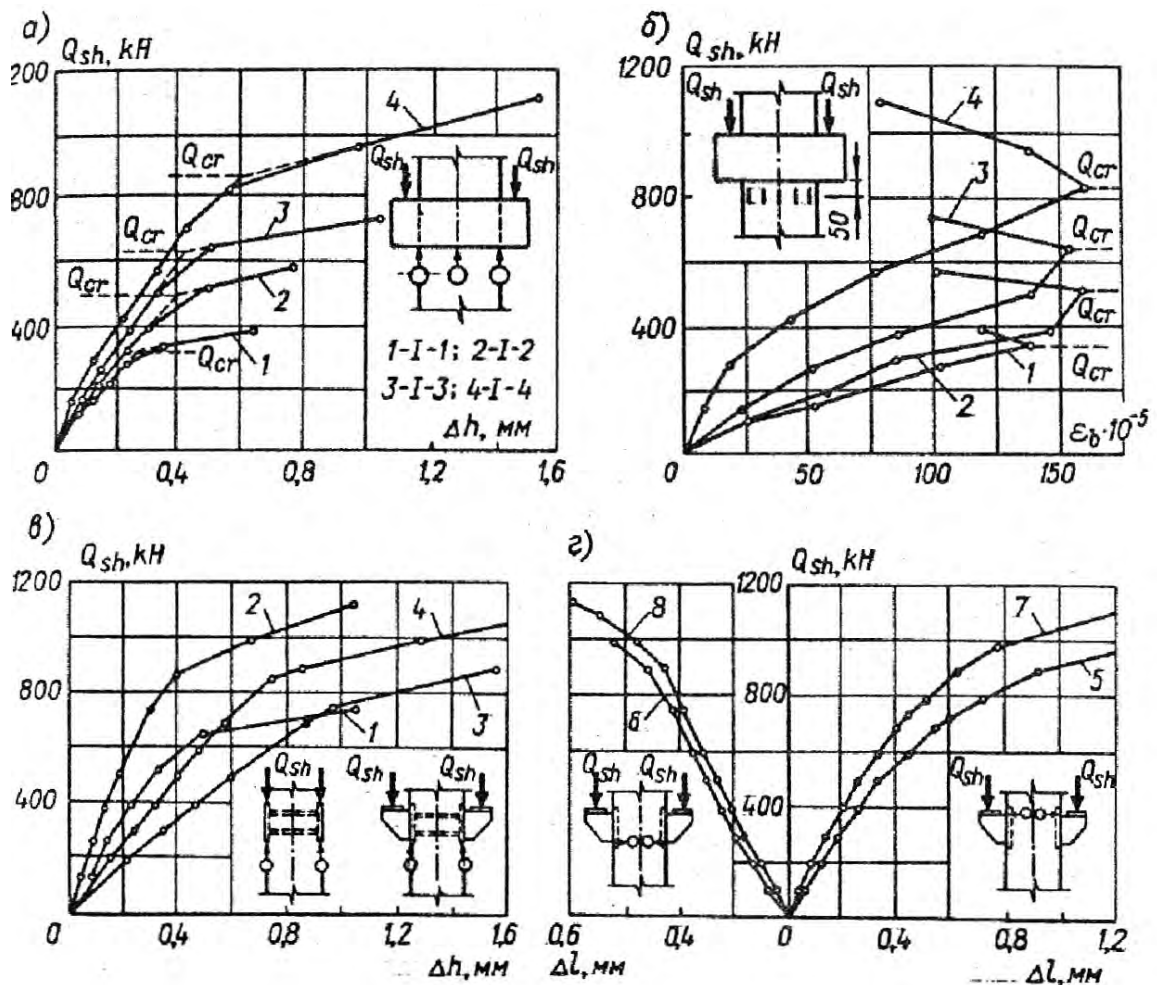


Рис. 4. Графіки вертикальних переміщень (а) і деформацій бетону (б) під пластинами закладних деталей зразків серії І (група А) та графіки вертикальних (в) і горизонтальних (з) переміщень пластин закладних деталей серій S і SF (група Б):
 1, 2 – серія S; 3, 4 – серія SF – закладні деталі №7, №10;
 серія SF; 5, 6 – закладна деталь №7; 7, 8 – закладна деталь №10

Вимірювали також деформації бетону на лицьовій грані бетонного масиву в зоні під анкером. Для цього використовували мікроіндикатори, встановлені на базі 100 мм, в наклеєних на поверхню бетону тримачах (рис. 3).

Під час аналізу результатів випробувань кількість арматури анкерів оцінювали за умовним процентом армування, що дорівнює відношенню площі арматури анкерів до площі пластини закладної деталі в межах її контакту з бетоном

$$\mu_{an} = \frac{A_{an}}{A_b} \times 100\% .$$

5. Основні результати випробувань експериментальних зразків груп А, Б, В

Характер роботи анкерів закладних деталей експериментальних зразків груп А і Б під навантаженням оцінювали за графіками “зсуваюча сила–переміщення пластин закладної деталі” (рис. 4, а, в), а також за графіками деформацій бетону під нижньою гранню пластин закладної деталі (рис. 4, б). Криві вертикальних і горизонтальних переміщень пластин закладних деталей, випробуваних тільки на зсув (1, 3, 5, 7) і на зсув зі згином (2, 4, 6, 8), мають однаковий характер (рис. 4, в, з). До певної величини навантаження, яке прийняте за критичне [2, 3, 4], залежність

$Q_{sh} - \Delta h$ майже лінійна. Точка перелому графіків зсувів і значного їх збільшення на ділянці вище від неї умовно прийнята за величину критичної сили Q_{cr} . Після її досягнення анкери обох типів (нормальні і комбіновані – нормальні і дотичні) не втрачають несучої здатності, але через інтенсивне наростання вертикальних і горизонтальних деформацій їх податливість значно зростає, а між пластиною закладної деталі і поверхнею бетону виникає тріщина. Крім того, після досягнення критичних навантажень настає відколювання бетону під нижнім ребром пластин закладної деталі, про що свідчить різке зменшення поздовжніх стискаючих деформацій бетону нижче від пластин закладних деталей (рис. 4, б). До досягнення критичної сили анкери і бетон під нижнім ребром пластин працюють сумісно. З умов обмеження деформативності вузлових з'єднань і забезпечення їх жорсткості експлуатаційні навантаження на закладні деталі не повинні перевищувати критичних, які необхідно приймати за граничні під час розрахунку міцності анкерів в з'єднаннях залізобетонних елементів.

За величину руйнівних навантажень приймали максимальне значення за силовимірювачем преса, після якого починалось його зменшення за зростаючих переміщень пластин, які до моменту руйнування становили 4–7 мм.

Порівняння зон руйнування бетону під пластинами закладних деталей з різними типами нормальних анкерів (група А) дає змогу зробити деякі висновки про характер руйнування експериментальних зразків [6, 12, 13]. В закладних деталях з великою кількістю анкерів виколування бетону відбувалось в межах товщини пластини. Після цього перед руйнуванням зразків в ядрі перерізу під анкерами утворювались тріщини розколювання, які свідчили про те, що при руйнуванні зразків разом з текучістю арматури відбувалось місцеве руйнування бетону під анкерами. Руйнування зразків з великою кількістю анкерів супроводжувалось зміщенням пластин вниз на 5–7 мм.

Інтенсивність наростання деформацій, а також величина критичних сил залежать від кількості і площі арматури анкерів. Найбільш інтенсивно розвиваються деформації в зразках з найбільшою кількістю анкерів і, навпаки, зі збільшенням площі їх перерізу наростання деформацій сповільнюється, а величини критичних сил зростають. До моменту відколювання бетону величини граничних стискаючих деформацій бетону приблизно однакові. Це свідчить про те, що відколювання бетону проходить за приблизно однакових напружень в бетоні під нижньою гранню пластини закладних деталей, незалежно від площі арматури анкерів.

Характер руйнування зразків всіх серій з кількістю анкерів 4–6 – однаковий. За досягнення критичної сили відбувається відколювання бетону під пластиною закладної деталі, після чого зусилля передаються на анкери, які руйнуються від відриву пластини закладної деталі в місцях її приварювання до анкерів, або від текучості арматури анкерів, що супроводжується зминанням бетону під ними.

Закладні деталі з малою кількістю (1–2) більш жорстких анкерів (III-1, III-2) працюють інакше. В стрижнях цих анкерів фіброва текучість не досягнута і збільшення деформацій спостерігається до руйнування, яке настає внаслідок розколювання бетону під анкерами. Це свідчить про те, що зі збільшенням діаметра арматури анкерів ефективність їх роботи в бетоні

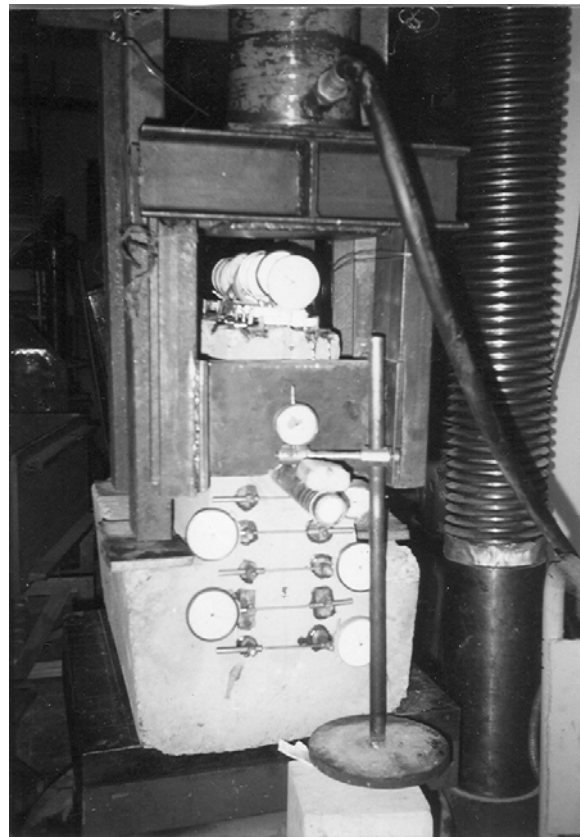


Фото. Загальний вигляд випробування на зсув експериментального зразка трубчастого анкера

заданої міцності зменшується. Тобто для кожного класу бетону існує граничний діаметр (а відповідно і граничний процент армування), за якого руйнування закладної деталі настає від розколювання або зминання бетону під анкерами до досягнення ними межі текучості.

Величини дослідних критичних і руйнівних навантажень для зразків групи А (середні по двох зразках-близнюках) наведено в табл. 2, а їх графіки залежно від досліджуваних факторів (серія I-V), – на рис. 5. Аналізуючи їх, слід відмітити, що як критичні, так і руйнівні навантаження залежать від площі (проценту армування) анкерів (рис. 5, а, з) і її межі текучості (рис. 5, б). За постійного процента армування і різної кількості анкерів руйнівне і критичне навантаження збільшується зі збільшенням кількості анкерів (рис. 5, в) і міцності бетону (рис. 5, д).

Таблиця 2

Характеристика і критичні та руйнівні навантаження експериментальних зразків груп А і Б

Шифр зразка	Тип закладних деталей, кількість і діаметр анкерів	σ_y , МПа	R_b , МПа	Q_{cr}^{exp}	Q_u^{exp}	$\frac{Q_u^{exp}}{Q_{cr}^{exp}}$
I-1	2-2Ø20			298	424	1,423
I-2	3-4Ø20			454	660	1,454
I-3	7-6Ø20	408,1	30,4	610	886	1,452
I-4	9-10Ø20			875	1284	1,467
II-1	5-6Ø20	238,4		507	745	1,469
II-2	6-6Ø20	305,1	30,4	556	847	1,523
II-3	7-6Ø20	408,1		610	886	1,452
III-1	1-1Ø40	388,5	28,2	-	493	-
III-2	2-2Ø28	384,4	28,2	-	548	-
III-3	3-4Ø20		30,4	454	660	1,454
III-4	4-5Ø18	401,2	28,2	466	709	1,521
III-5	8-8Ø14	415,9	29,9	487	771	1,583
IV-1	7-6Ø10	419,9		320	466	1,456
IV-2	7-6Ø16	414,9		492	669	1,360
IV-3	7-6Ø20	408,1	43,2	598	859	1,436
IV-4	7-6Ø25	400,2		710	1063	1,497
V-1			18,8	396	761	1,922
V-2	7-6Ø20	408,1	31,8	486	811	1,669
V-3			19,2	598	859	1,436
S-1	7-6Ø20			616	883	1,433
S-2	10-6Ø20+4Ø20	408,1	30,4	858	1142	1,331
SF-1	7-6Ø20	408,1	30,4	680	1014	1,491
SF-2	10-6Ø20+4Ø20			734	990,8	1,556

σ_y – границя текучості арматури; R_b – призмova міцність бетону; Q_{cr}^{exp} , Q_u^{exp} – досліджена критична і руйнівна сили (середні по випробуваннях пластини закладної деталі (рис. 4, б)).

Співвідношення між руйнівними і критичними зусиллями досить значне і за даними випробувань становить 1,33–1,56, що свідчить про достатній резерв міцності анкерів за межами критичних зусиль.

Проведений аналіз випробуваних дослідних зразків закладних деталей групи А показує, що для зразків з кількістю анкерів більше як 3–4 спостерігають три характерні стадії напружено-деформованого стану бетону в зоні розташування анкерів [13]:

Стадія I – до досягнення зсуваючим навантаженням критичного. Характерною особливістю цієї стадії є майже лінійні залежності між зсуваючою силою та вертикальними переміщеннями і деформаціями бетону, а також сумісна робота анкерів і бетону на відколювання під нижньою гранню пластини. Кінець першої стадії відповідає різкому збільшенню деформацій зсуву, виключенню з роботи на стиск (відколювання) бетону під нижньою гранню пластини і досягненням зсуваючим навантаженням критичного. Такому напружено-деформованому стану відповідає настання фібрової текучості анкерних стрижнів, що підтверджують також і інші досліди [1, 2, 3, 4, 18]. Отже, перша стадія, навантаження якої становить 60–70 % від руйнівного, відповідає нормальній роботі закладних деталей в умовах експлуатації, коли розрахункові зусилля не перевищують критичних зсуваючих сил, а кінець її розглядають як граничний стан за критичною силою (критичним переміщенням) або за придатністю до нормальної експлуатації.

Стадія II – зсуваюче навантаження перевищує критичне. Перехід до другої стадії роботи характеризується відколюванням бетону під пластиною і сприйняттям всього зсуваючого навантаження анкерами, інтенсивним наростанням переміщень і подальшим розвитком текучості анкерних стрижнів.

Стадія III – стадія руйнування, яка характеризується порівняно коротким проміжком роботи закладної деталі, коли текучість розповсюджується на всі поперечні перерізи анкерних стрижнів, а бетон під ними зминається.

Закладні деталі з жорсткими анкерами працюють інакше: до руйнування фіброва текучість не досягається, а руйнування проходить крихко від розколювання бетону під анкерами за великих стискаючих напружень зминання в бетоні під анкерами.

Загалом з проведених випробувань експериментальних зразків групи А можна зробити висновок, що зі збільшенням діаметра арматури анкерів і зменшенням кількості ефективність їх роботи в бетоні заданої міцності зменшується, тобто для кожного класу бетону існує граничний діаметр анкерів, за якого граничний стан настає за досягнення критичного навантаження.

Деформативність закладних деталей №7 і №10 (рис. 1, в, г) в зразках групи Б серій S і SF оцінювали за замірними в процесі випробувань вертикальними і горизонтальними зміщеннями пластин закладних деталей. Середні за випробуваннями трьох зразків графіки цих деформацій показано на рис. 4, в, г. Аналізуючи їх, потрібно відмітити, що як і за чистого зсуву, так і за зсуву зі згином до досягнення зсуваючими силами критичних вертикальні і горизонтальні переміщення майже лінійні. Значне збільшення їх настає за навантажень, більших від критичних. Очевидно це пов'язано з початком текучості розтягнутих анкерів, або з початком зминання бетону під горизонтальними анкерами і нижньою гранню закладної пластини.

Більшу деформативність мають закладні деталі №7. Наявність дотичних анкерів зменшує деформативність пластин закладних деталей у 1,3–1,5 раза. Деформативність закладних деталей за чистого зсуву в 1,65–1,8 раза менша, ніж за зсуву зі згином. Відносну деформативність закладних деталей №7 і №10 в зразках серії SF додатково оцінювали за коефіцієнтами податливості, які визначали як тангенс кута повороту пластин закладної деталі від дії вузлового моменту [14]. За критичного навантаження коефіцієнт податливості закладної деталі №7 становив 0,054 і був у 1,54 раза більший, ніж закладної деталі №10. Тобто на меншу деформативність закладної деталі №10 істотно вплинула наявність дотичних анкерів.

Характер тріщиноутворення і руйнування зразків серії S, випробуваних на чистий зсув, з закладними деталями №7 аналогічний до описаного вище. Зразки цієї ж серії з закладними деталями №10 руйнувались аналогічно, але за більших навантажень, від текучості арматури нормальних і дотичних анкерів і зминання бетону під нижньою гранню пластин закладної деталі.

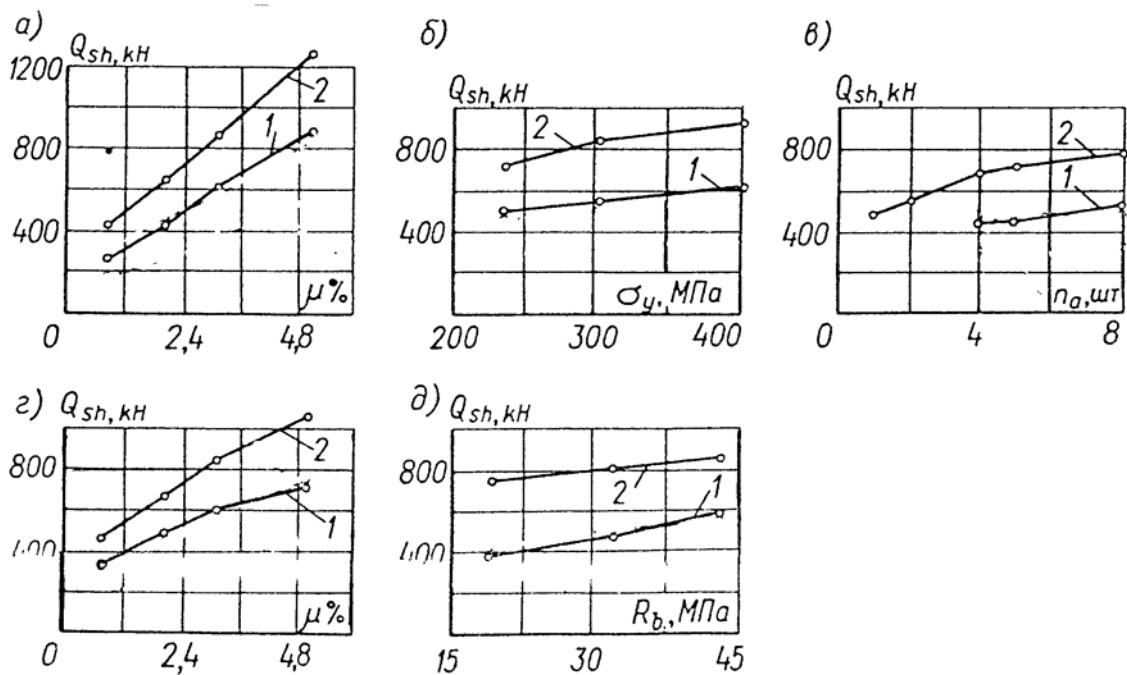


Рис. 5. Експериментальні залежності критичних (1) і руйнівних (2) навантажень від досліджуваних факторів: а – процента армування за різної кількості анкерів (серія I); б – межі текучості арматури (серія II); в – кількості анкерів (серія IV), д – міцності бетону (серія V)

У дослідних зразках серії SF з закладними деталями №7 перші тріщини утворились на контакті закладних деталей з бетоном, що супроводжувалось зростанням вертикальних 3 і горизонтальних 5, 6 зміщень пластин (рис. 4, в, з). За навантажень 780–830 кН (0,8...0,85 від руйнівних) утворились вертикальні тріщини на бокових гранях колони з боку пластин. Тріщини розповсюджувались від нижніх анкерів вниз по колоні. Ці зразки руйнувались внаслідок текучості арматури верхніх горизонтальних анкерів. Руйнування супроводжувалось зсувом пластин закладних деталей вниз на 4,5–5,5 мм і руйнуванням зовнішнього шару бетону колон під нижньою гранню закладних пластин, а також зминанням його під анкерами.

За поступового навантаження зразків серії SF з закладними деталями №10 при навантаженні 540–590 кН по контуру закладних пластин з боку розтягнутих граней утворились тріщини відриву. Після їх виникнення істотно збільшувались вертикальні (4) і горизонтальні (7, 8) переміщення (рис. 4, в, з). Безпосередньо перед руйнуванням, за навантажень 840–880 кН, в нижній частині колон на гранях, де розміщені пластини закладних деталей, виникали вертикальні тріщини від нижньої грані пластин вздовж колон. Максимальні руйнівні навантаження відповідали текучості арматури розтягнутого ряду горизонтальних анкерів. У зразку SF-2в обірвався один анкер в місці його приварювання до пластини. Руйнування супроводжувалось виколонуванням шару бетону під нижньою гранню пластини і зминанням його під нижнім рядом горизонтальних анкерів. Одночасно пройшов зсув вниз на 3–4 мм пластин закладної деталі, а вздовж дотичних анкерів на бокових гранях колони утворились вертикальні тріщини розколювання, що свідчить про проковзування цих анкерів в бетоні.

Значення критичних і руйнівних навантажень для зразків серій S і SF подано в табл. 2. Практично однакові критичні сили і руйнівні навантаження мали зразки серій S і SF з закладними деталями №10. Критичні сили і несуча здатність закладних деталей №10 з нормальними та дотичними анкерами у 1,4–1,3 раза більша, ніж закладних деталей №7, тільки з нормальними анкерами. Під час випробувань на зсув зі згином вплив дотичних анкерів на величину критичної сили і несучу здатність значно менший. Закладні деталі № 10 мали лише у 1,08 раза більшу критичну силу і в 1,13 раза більшу несучу здатність порівняно з закладними деталями №7. Руйнування зразків з закладними деталями №10 настало до текучості арматури дотичних анкерів і супроводжувалось їх проковзуванням в бетоні. Отже, порівнюючи руйнівні навантаження на

закладну деталь №7 і №10, можна зробити висновок, що дотичні анкери неістотно вплинули на несучу здатність закладної деталі №10 під час її роботи на зсув зі згином.

Цей результат випробувань дещо неочікуваний, оскільки відігнуті анкери рекомендують використовувати як найбільш ефективні для сприйняття зсуваючих зусиль. Проведеними експериментами це не підтвердилось. В зразках з закладними деталями №10 при настанні текучості арматури верхнього ряду поздовжніх розтягнутих анкерів і зминанні бетону під нижнім рядом стиснутих, відігнуті анкери слабо включались в роботу, що і призвело лише до незначного збільшення їх несучої здатності порівняно з закладними деталями №7.

Як і в дослідженнях зразків груп А і Б, за основну кількісну характеристику міцності одиночного трубчастого анкера за зсув прийнято критичну силу Q_{cr} , яка відповідає початку інтенсивного розвитку деформацій зсуву і визначається за точкою перелому та початку значного викривлення графіків $Q_{sh}-\Delta$ (рис. 6, а), [15]. До її досягнення вони близькі до лінійних, а переміщення є незначні. Після досягнення критичної сили деформації зсуву різко збільшуються, а податливість анкера значно зростає. Перед руйнуванням їх величина в перерізі під силою досягає 2–4 мм на кромці каналу. Тому експлуатаційна несуча здатність працюючих на зріз нормальних стрижневих або трубчастих анкерів з умов забезпечення їх жорсткості і обмеження податливості не повинна перевищувати критичної сили. Цю умову необхідно приймати за розрахунковий граничний стан під час розрахунків міцності анкерів на зсув.

У проведених дослідах середнє значення критичної сили, визначене за узагальненим графіком деформацій найбільше навантаженого перерізу 1 під силою з шести випробуваних зразків, становило $Q_{sh}^{cr}=100,2$ кН, а руйнівне навантаження – $Q_{sh}^u=145,5$ кН. Співвідношення між ними досить значне і становить $Q_{sh}^u / Q_{sh}^{cr}=1,37$, що свідчить про істотний резерв міцності анкера за межами критичних сил. Максимальне переміщення анкера на кромці каналу (переріз 1) за критичного навантаження становило $\Delta_{cr}=0,24$ мм (рис. 6, б). Збільшення навантаження до $Q_{sh}=125$ кН, тобто лише на 17,7 %, призвело до збільшення переміщення анкера в цьому ж перерізі до $\Delta=0,408$ мм (в 1,7 раза). Аналогічні результати отримані під час випробувань на зсув закладних деталей з груповим розташуванням нормальних стрижневих анкерів [2, 3, 4, 6, 12, 13, 14].

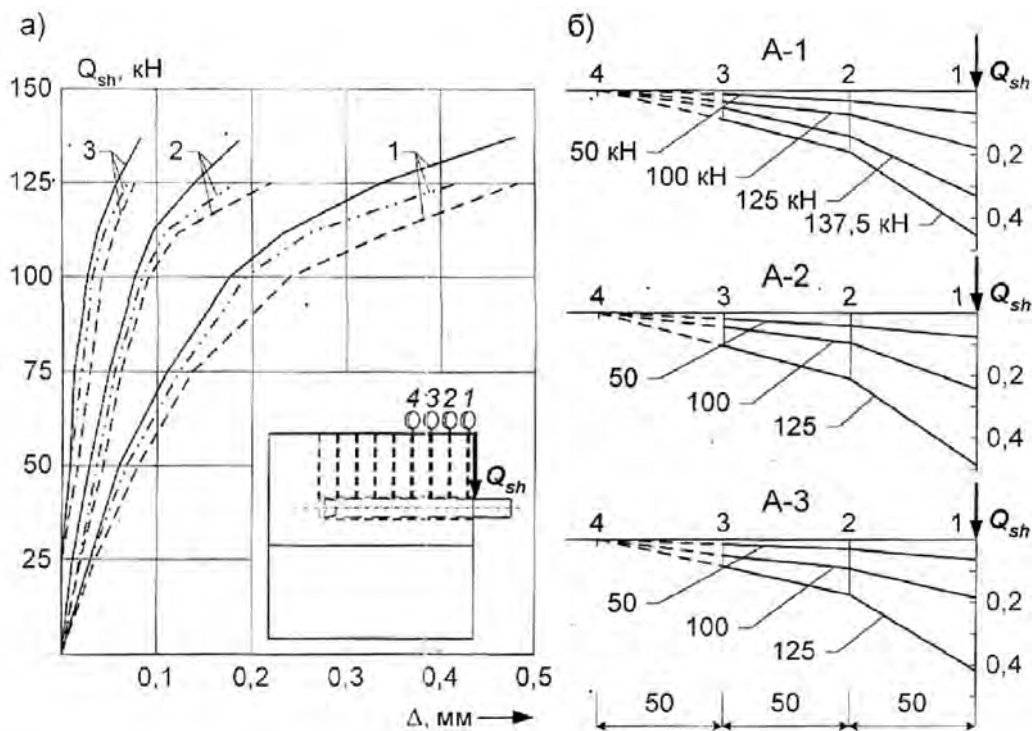


Рис. 6. Експериментальні графіки (а) і етори (б) вертикальних переміщень стрижня анкерів в перерізах 1, 2, 3 бетонного масиву залежно від величини зсуваючої сили для випробуваних зразків

Аналіз графіків $\Delta-Q_{sh}$ дав можливість також оцінити напружено-деформований стан бетонної основи під анкером. Залежність $\Delta-Q_{sh}$ на значній ділянці графіків 2, 3 (майже до Q_{sh}^{cr}) близька до лінійної, що свідчить про пружний характер роботи бетону. Приблизно лінійна ділянка графіків 1 є значно меншою і становить близько половини критичної сили, тобто в найбільше навантаженому перерізі і суміжними з ним за навантажень, близьких до критичних, графіки переміщень очевидно криволінійні, що свідчить про пружно-пластичну роботу бетону в цій зоні. У такий спосіб на рівні критичних навантажень за характером деформування бетонна основа під анкером розподіляється на дві ділянки: пружної і пружно-пластичної роботи. Границю між ними за одержаними експериментальними даними можна приймати на відстані $1/3$ загальної робочої довжини анкера l_x від обрізу бетонного масиву (кромки каналу).

За вимірними переміщеннями в перерізах 1, 2, 3 зразків А-1, А-2, А-3 побудовано епюри їх розподілу вздовж анкера, починаючи від перерізу під силою (рис. 6, б). За ними для кожного типу зразків з різною довжиною вмонтованих анкерів визначено їх робочу довжину. Усі зразки на відстані 100 мм від зовнішньої грані бетонного масиву (прилад №3) мали переміщення 0,2–0,25 від максимальних, а на відстані 150 мм (прилад №4 і наступні) переміщень взагалі не було, що стало підставою прийняти цю площину за умовне защемлення анкера в бетонному масиві. Отже, для всіх трьох типів експериментальних зразків робоча довжина анкера виявилась однаковою і дорівнювала 150 мм, що становить приблизно $4d$ ($d=38$ мм). Тобто з практичних міркувань для надійного закріплення натурального анкера в бетоні достатньо його довжини (5–6) d .

Характер руйнування зразків з різною довжиною анкерів був також однаковий (рис. 7, а). За навантажень, дещо більших від Q_{sh}^{cr} , настало зминання зчипного шару цементно-епоксидного розчину і бетону по контактній поверхні анкера і каналу, а також фактично одночасне відколювання бетону по нижньому півколу його кромки. Зона зминання розповсюдилась приблизно на $1/3$ робочої довжини. При цьому вертикальні переміщення анкера під силою інтенсивно розвивались (рис. 7, б), труба в межах робочої довжини згиналась, внаслідок чого по верхньому півколу кромки каналу між анкером і зчипним шаром утворився сегментний зазор з максимальним розкриттям у 2–3 мм (рис. 7, а). Одночасно з цим пройшло місцеве зминання оболонки труби анкера та її зріз на цій же ділянці. В окремих зразках, руйнування яких настало при $Q_{sh} > 150$ кН, за навантаження 80–90 % від руйнівного, під анкером утворились вертикальні тріщини розколювання з розкриттям 0,05–0,1 мм.

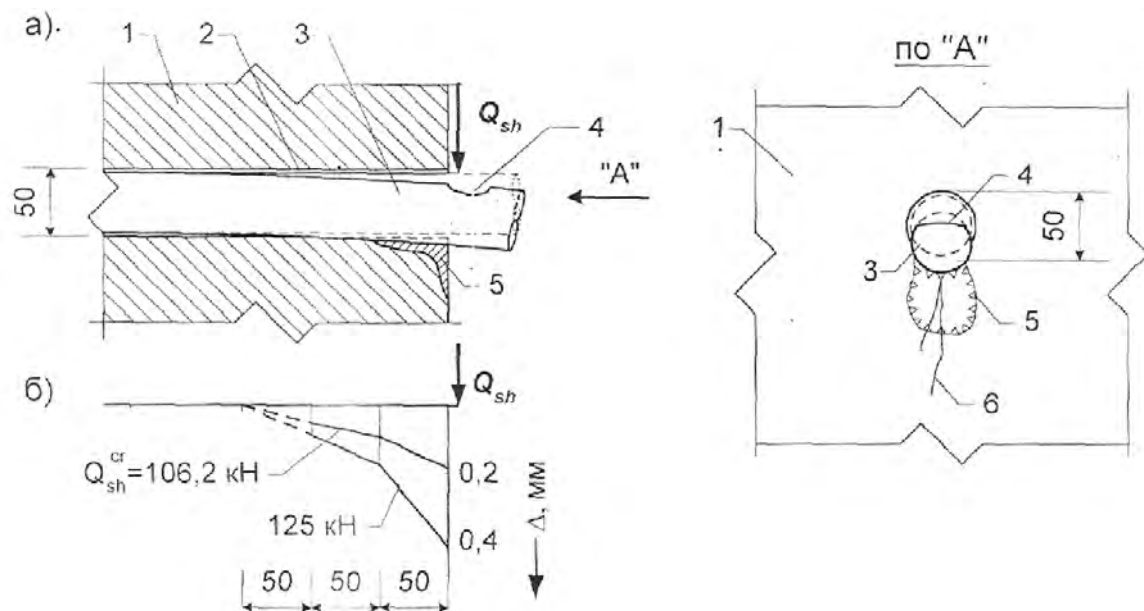


Рис. 7. Схема руйнування анкера за зсуву (а) та епюра переміщень за критичної зсуваючої сили Q_{shcr} і більшої за неї (б): 1 – бетонний масив; 2 – проміжний (зчипний) шар цементно-епоксидного розчину (5–6 мм); 3 – трубчастий анкер; 4 – зона місцевого зминання і зрізу труби; 5 – зона зминання і виколювання бетону під нижнім півколом кромки каналу; 6 – тріщини розколювання в бетонному масиві

Виконаний вище аналіз графіків і епюр вертикальних переміщень показав, що для створення розрахункової моделі системи анкер–бетонний масив можна застосовувати методи розрахунку балок на пружній або пружно-пластичній основі. Випробування показали, що сприйняття зсуваючої сили системою анкер–оточуючий бетон відбуваються на ділянці довжиною до перерізу, в якому переміщення дорівнює нулю, а згинальний момент має максимальне значення. Враховуючи цю умову, розрахункову модель анкера можна подати у вигляді консольної умовно защемленої балки завдовжки l_x або аналогічної напівбезконечної балки робочою довжиною l_x на бетонній основі, складеній з пружної і пружно-пластичної ділянок. Балка навантажена на кінці зсуваючою силою Q_{sh} .

Як розрахункову модель для визначення коефіцієнта постелі, можна розглядати плоску задачу дії жорсткого кругового штампа на бетонну основу так само, як прийнято в [10]. У цьому випадку його знаходять як відношення рівномірно розподіленого навантаження $g_{sh}=Q_{sh}/d$ до переміщення Δ по вертикальній осі: $k=q_{sh}/\Delta$ [16].

Якщо переміщення Δ розглядати як функцію напружень, відносних деформацій і модуля деформацій бетону основи $\Delta=f(\sigma_e, \varepsilon_e, E_e)$, то в такий спосіб зміною модуля можна врахувати пружно-пластичну роботу найбільше навантаженої крайньої ділянки основи.

6. Розрахункова модель анкера в бетонному масиві і методика розрахунку

Узагальнена розрахункова модель прийнята за аналогією до моделей розглянутих в роботах [10, 11, 19]. В ній розглядається граничний стан системи анкер–бетонний масив. Причому стрижень анкера, розміщений в бетонному масиві, розглянутий як балка на пружній або пружно-пластичній основі, завантажена на кінці поперечною силою P [16]. У розрахунковій схемі (рис. 8) прийнято, що зсуваюча сила P сприймається системою анкер–бетонний масив на ефективній довжині заанкерювання l_k , в кінці якої вертикальні переміщення анкера зменшуються до нуля, а згинальний момент зростає до максимальної величини. При цьому вертикальні переміщення описуються відомими рівняннями для балок на пружній основі (модель Вінклера). В реальних умовах точка прикладення сили P не знаходиться на краю пружної основи, а віддалена від неї на певну відстань e (рис. 8, а). В цьому випадку задача зводиться до визначення переміщень анкера як балки на пружній основі, навантаженої на вільному кінці силою P і згинальним моментом M (рис. 8, з). Задачу розв'язуємо окремо для балки кінцевої довжини на пружній основі під дією сили P (рис. 8, в) і згинального моменту M (рис. 8, г), враховуючи гіпотезу Вінклера, і відповідного диференціального рівняння, яке за відсутності погонного навантаження балки, має такий вигляд:

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = 0, \quad (1)$$

де E, I – модуль пружності і момент інерції анкера; $K=K_0 \cdot v$ – погонний коефіцієнт жорсткості основи; K_0 – коефіцієнт постелі основи; $v=d$ – ширина підшви балки; d – діаметр анкера.

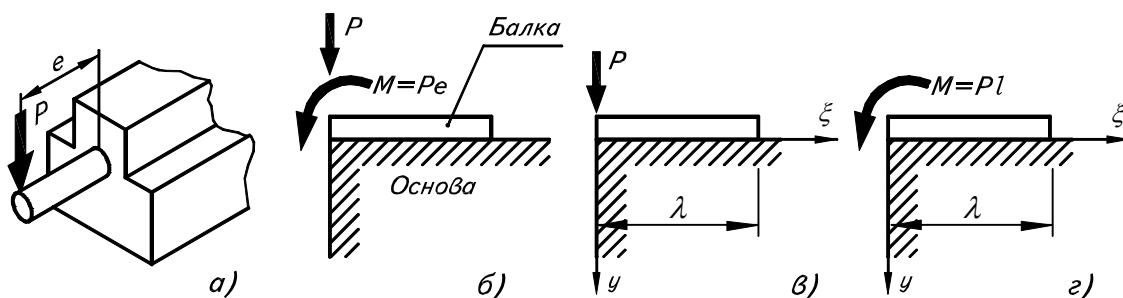


Рис. 8. Розрахункові схеми анкера:
а – схема навантаження; б, в, г – схеми прикладення зсуваючої сили і згинального моменту

В результаті розв'язку диференціального рівняння (1) одержимо переміщення анкера, згинальні моменти і поперечні сили:

$$y(\xi) = y_0 Y_1 + L \varphi_0 Y_2 - \frac{L^2}{EI} M_0 Y_3 - \frac{L^3}{EI} Q_0 Y_4; \quad (2)$$

$$M(\xi) = M_0 Y_1 + Q_0 L Y_2 + y_0 \frac{4EI}{L^2} Y_3 + \varphi_0 \frac{4EI}{L} Y_4; \quad (3)$$

$$Q(\xi) = Q_0 Y_1 + y_0 \frac{4EI}{L^3} Y_2 + \varphi_0 \frac{4EI}{L^2} Y_3 - M_0 \frac{4}{L} Y_4. \quad (4)$$

Визначивши початкові параметри y_0 , φ_0 , M_0 , Q_0 з відповідних крайових умов окремо для балки, навантаженої силою P і моментом M , одержимо вирази для відповідних прогинів і згинальних моментів [16].

Для встановлення довжини ділянки, на якій фактично відбуваються переміщення анкера (ефективної довжини заанкерювання), потрібно знати коефіцієнт постелі бетонної основи K_0 . Його можна наближено визначити з розв'язку задачі Бусінеска про тиск жорсткого круглого штампа (що моделює круглий стрижень) на площину, яка моделює бетонну основу [10, 16] (рис. 9):

$$K_0 = \frac{K}{d}; \quad K = \frac{q}{\Delta}, \quad (5)$$

де q – інтенсивність прикладеного до штампа рівномірно розподіленого навантаження; Δ – вертикальне переміщення анкера в бетонній основі; d – діаметр анкера.

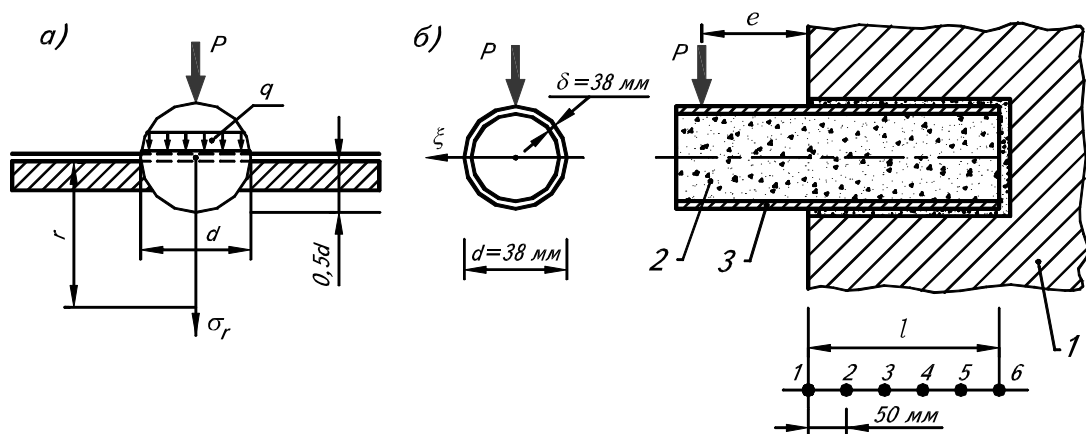


Рис. 9. Розрахункова схема до визначення коефіцієнта постелі (а) та до розрахунку дослідного зразка анкера (б):
1 – бетон; 2 – заповнювач; 3 – сталева труба

Згідно з розв'язком Бусінеска за умови затухання радіальних напружень в масиві бетону на відстані $r=6d$ [9] дістанемо:

$$K = \frac{q}{\Delta_6} = 0,63 \frac{E_6 \delta}{d}; \quad K_0 = \frac{K}{e} = \frac{K}{d} = 0,63 E_6, \quad (6)$$

де E_6 – модуль пружності бетону основи.

З аналізу виразів (2), (3), (4) зрозуміло, що ці величини практично наближаються до нуля за відносної довжини анкера в бетоні:

$$\xi_k = \frac{l_k}{L} = \pi, \quad (7)$$

звідки $l_k = \pi L$.

Формула (7) являє собою ефективну довжину анкера, на якій переважно проходять його деформації і сприймання поперечного навантаження P . Це є довжина, меншою від якої не може бути довжина замоноличеного анкера: $l_k \geq \pi L$.

Висновки:

1. Руйнування гнучких анкерів, що працюють в складі закладних деталей при груповому розташуванні, і таких, що працюють окремо, починається після досягнення зсуваючим зусиллям критичного значення. З умов обмеження деформативності і забезпечення жорсткості вузлових з'єднань експлуатаційні навантаження на анкери не повинні перевищувати критичних, які під час розрахунку міцності анкерів слід розглядати як граничні. Розрахунок на зсув проводять з умови $Q_{sh} \leq Q_{sh}^{cr}$.

2. Величина критичних сил залежить від кількості анкерів, схеми їх розташування в межах пластин закладної деталі, діаметра, площі і межі текучості арматури, а також міцності бетону. За певних умов на величину критичної сили також істотно впливає опір бетону на відколювання під нижньою гранню пластини закладної деталі.

3. За зсуву наявність відігнутих анкерів збільшує несучу здатність закладних деталей. Руйнування їх настає від текучості арматури нормальних і відігнутих анкерів. За зсуву зі згином вплив дотичних анкерів на міцність закладних деталей є незначний. Руйнування настає від текучості верхнього ряду нормальних анкерів до текучості відігнутих.

4. Відігнуті анкери істотно зменшують деформативність пластин закладних деталей як за зсуву, так і за зсуву зі згином. Деформативність закладних деталей за чистого зсуву значно менша, ніж за зсуву зі згином.

5. Визначена за епіюрами переміщень робоча довжина досліджених трубчастих анкерів становить $4d$. Для надійного заанкерювання в бетонному масиві можна рекомендувати приймати їх повну довжину такою: $(5-6)d$.

6. За характером руйнування встановлено, що за поперечного навантаження трубчастий анкер працює на згин, як балка на бетонній пружній або пружно-пластичній основі, тому розрахункову модель для розрахунку на зсув системи анкер-бетонний масив можна подати у вигляді балки на бетонній основі, складеній з пружної і пружно-пластичної ділянок. Коефіцієнт постелі основи під анкером можна визначити з розгляду плоскої задачі дій жорсткого кругового штамп на бетонну основу.

1. Гутковский В.А. О влиянии армирования на сопротивление бетона срезу // Сб. "Вопросы строительства и архитектуры. Строительные конструкции и теория сооружений". – Минск, 1981. – Вып. XI. – С.88–91. 2. Катин Н.И., Стульчиков А.П. Работа закладных деталей при сдвиге и совместном действии сдвигающих сил и изгибающих моментов // Сб. "Стыки сборных железобетонных конструкций". – М., 1970. – Вып. 21. – С.118–161. 3. Катин Н.И., Шитиков В.А. Работа закладных деталей с нормальными гибкими анкерами // Сб. "Расчет и конструирование железобетонных конструкций". – М., 1972. 4. Катин Н.И., Шитиков В.А. Критические нагрузки на закладные детали при сдвиге // Сб. "Сборные железобетонные конструкции из высокопрочного бетона". – М., 1976. 5. Кваша В.Г., Ковальчик Т.П., Салійчук Л.В. Підсилення кам'яного аркового моста при його реконструкції // Наук. праці семінару "Сучасні проблеми проектування, будівництва та експлуатації споруд на шляхах сполучення". – К., 2000. – С.69–73. 6. Кваша В.Г., Салійчук Л.В. Работа бетона в зоне размещения арматурных анкеров закладных деталей // Сб. "Проблемы теории и практики железобетона". – Полтава, 1997. – С.198–201. 7. Кваша В.Г., Салійчук Л.В., Стечишин О.Я., Щербенков М.П. Использование комбинированного способа уширения при реконструкции железобетонного автомобильного моста через р. Свислочь у с. Дукоры: Сб. "Строительство и эксплуатация автомобильных дорог и мостов". – Минск, 1998. – С.258–264. 8. Клименко Ф.Е. Сталебетонные конструкции с внешним полосовым армированием. – К.: Будівельник, 1984. – 86 с. 9. Клименко Ф.Е., Гайдаш Н.Л. Экспериментальное исследование связей-анкеров упоров в сталежелезобетонных изгибаемых конструкциях // Вопросы современного строительства. – 1971. – №63. – С.9–15. 10. Климов Ю. Предельное состояние арматурного стержня в бетонном массиве при продольно-поперечном изгибе // XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB Problemy naukowo-badawcze budownictwa.– tom 3: Konstrukcje betonowe. – Rzeszów–Krynica–Warszawa, 1994. – С. 85. 11. Кольнер В.М., Тевелев Ю.А. Работа арматурного стержня в бетоне при поперечном нагружении // Сб. трудов ВНИИЖелезобетон. – 1967. – Вып.13. – С.119–131. 12. Салійчук Л.В. Вплив конструкції анкерів на

опір зсуву закладних деталей залізобетонних конструкцій: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 1999. – Вип. 3. – С.252–255. 13. Салійчук Л.В. Взаємодія з бетоном анкерів закладних деталей в зоні їх розташування: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 2003. – Вип. 9. – С.311–316. 14. Салійчук Л.В., Кваша В.Г. Робота нормальних і дотичних анкерів у закладних деталях залізобетонних конструкцій // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка" "Теорія і практика будівництва". – 1996. – № 300. – С.127–134. 15. Салійчук Л.В., Кваша В.Г. Дослідження міцності і деформативності вмонтованого в бетоні трубчастого анкера при згині: Зб. "Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди". – Рівне, 2003. – Вип. 10. – С. 202–208. 16. Салійчук Л.В., Ольховий І.М. Розрахункове дослідження роботи в бетоні трубчастого вмонтованого анкера при поперечному навантаженні: Зб. "Автомобільні дороги і дорожнє будівництво". – 2004. – Вип. 69. – С. 219–225. 17. Стрелецький Н.И. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов. – М.: Транспорт, 1981. – 360 с. 18. Холмянский М.М. Закладные детали сборных железобетонных элементов. – М., 1968. – 208 с. 19. Шитиков Б.А. Изгиб стального стержня в бетоне // Сб. НИИЖБ "Штампованные и сварные закладные детали железобетонных конструкций". – М., 1979. – С.110–127. 20. Furmańczyk S., Lefik M. Zakotwienie kotka rozporowego w betonie // XLI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB: Problemy naukowo-badawcze budownictwa. – T. 5: Konstrukcje betonowe. – Krakow–Krynica, 1995. – S. 45–52. 20. Starosolski W. Łączniki rozporowe – przegląd // Przegląd budowlany. –Warszawa, 1998. – Nr 8–9. – S. 382–388. 21. Żaboklicki M. Łącznik rozporowy poddany obciążeniu poprzecznemu // XLII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB: Problemy naukowo-badawcze budownictwa.– T. 4: Konstrukcje betonowe. – Krakow–Krynica, 1995. – S. 157–164.

УДК 624.075: 539.3

Р.М. Тацій, О.Р. Давидчак

Національний університет "Львівська політехніка"

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ І СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ

© Тацій Р.М., Давидчак О.Р., 2006

Запропоновано методику дослідження динаміки і стійкості стрижневих систем із довільним розподілом масами, жорсткості та навантаження, розроблену на основі алгоритму методу граничних елементів і методу дискретизації елементів.

To find frequencies and forms of characteristic oscillations, critical (buckling) loads of durability of framed structures with discrete–continuous distribution of parameters, the presented article suggests using the boundary elements method with evolutionary operators that correspond to quasi–differential equations obtained during certain approximation of coefficients of corresponding equations.

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень

Сьогодні активно розглядається багатьма дослідниками універсальний числово-аналітичний метод граничних елементів (МГЕ), який порівняно з методом скінченних елементів і методом скінченних різниць має певні переваги під час розв'язку тривимірних і динамічних задач [1, 2]. Порівняно повно розроблений МГЕ для задач статички та динаміки стрижневих систем, які зводяться до розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Проте за дискретно-неперервних розподілів параметрів моделі інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов'язано зі значними труднощами або з появою складних фундаментальних функцій. Тому в літературі під час розрахунку МГЕ використовувались різні наближені підходи, наприклад, врахування зосереджених мас на стрижневих елементах у задачах динаміки